Сибирский математический журнал
Июль—август, 2017. Том 58, № 4

УДК 512.542

КОНЕЧНЫЕ ГРУППЫ С ФОРМАЦИОННО СУБНОРМАЛЬНЫМИ ПРИМАРНЫМИ ПОДГРУППАМИ

В. С. Монахов, И. Л. Сохор

Аннотация. Для произвольной насыщенной наследственной формации $\mathfrak{F}$, содержащей все нильпотентные группы, получено описание конечных разрешимых групп, в которых каждая примарная подгруппа самонормализуема или $\mathfrak{F}$-субнормальна.

DOI 10.17377/smzh.2017.58.412

Ключевые слова: конечные группы, примарная подгруппа, субнормальная подгруппа, абнормальная подгруппа.

Введение

Все рассматриваемые группы предполагаются конечными. Используемая терминология соответствует [1–3].

Подгруппа H группы G называется *абнормальной*, если $x \in \langle H, H^x \rangle$ для любого $x \in G$. *Субнормальной подгруппой* называют подгруппу K, для которой существует цепочка подгрупп

$$K = K_0 \leq K_1 \leq K_2 \leq \dots \leq K_{m-1} \leq K_m = G$$

такая, что K_i нормальна в K_{i+1} для каждого i. Эти понятия альтернативные, только вся группа одновременно субнормальна и абнормальна. Естественным обобщением субнормальности и абнормальности являются формационные понятия $\mathfrak{F}$-субнормальности [3, IV.5.12] и $\mathfrak{F}$-абнормальности [3, IV.5.6] соответственно.

Пусть $\mathfrak{F}$ — формация и G — группа. Пересечение всех нормальных подгрупп группы G, фактор-группы по которым принадлежат $\mathfrak{F}$, обозначается через $G^{\mathfrak{F}}$ и называется $\mathfrak{F}$-*корадикалом группы* G. Подгруппа H называется $\mathfrak{F}$-*субнормальной*, если существует цепочка подгрупп

$$H = H_0 <\cdot\, H_1 <\cdot\, \dots <\cdot\, H_n = G \qquad (1)$$

такая, что $H_i / \operatorname{Core}_{H_i} H_{i-1} \in \mathfrak{F}$ для всех i. Это равносильно тому, что $H_i^{\mathfrak{F}} \leq \operatorname{Core}_{H_i} H_{i-1}$. Здесь $\operatorname{Core}_G H = \bigcap_{g \in G} H^g$ — ядро подгруппы H в группе G, а запись $H_{i-1} <\cdot\, H_i$ означает, что H_{i-1} — максимальная подгруппа группы H_i.

Подгруппа H группы G называется $\mathfrak{F}$-*абнормальной*, если $L / \operatorname{Core}_L K \notin \mathfrak{F}$ для всех подгрупп K и L таких, что $H \leq K <\cdot\, L \leq G$. Понятно, что в любой группе G каждая собственная подгруппа не может быть одновременно $\mathfrak{F}$-субнормальной и $\mathfrak{F}$-абнормальной.

Для формации $\mathfrak{N}$ всех нильпотентных групп каждая $\mathfrak{N}$-субнормальная подгруппа группы G субнормальна, а каждая абнормальная подгруппа $\mathfrak{N}$-абнормальна. Если группа G разрешима, то справедливы и обратные утверждения: каждая субнормальная подгруппа разрешимой группы G будет $\mathfrak{N}$-субнормальной, а каждая $\mathfrak{N}$-абнормальная подгруппа — абнормальной.

Теории $\mathfrak{F}$-субнормальных подгрупп посвящена гл. 6 монографии [4], в которой изложены результаты по состоянию на 2005 г. В текущем десятилетии группы с $\mathfrak{F}$-субнормальными примарными подгруппами изучались в [5–11]. Предложены следующие обозначения: $\mathrm{w}\mathfrak{F}$ — класс всех групп, в которых каждая силовская подгруппа $\mathfrak{F}$-субнормальна [6]; $\mathrm{v}\mathfrak{F}$ — класс всех групп, в которых каждая примарная циклическая подгруппа $\mathfrak{F}$-субнормальна [11].

Если $G \notin \mathfrak{F}$ и каждая нетривиальная подгруппа из G $\mathfrak{F}$-субнормальна или $\mathfrak{F}$-абнормальна, то G называется *$E_{\mathfrak{F}}$-группой* [12]. Некоторые свойства $E_{\mathfrak{F}}$-групп для любой наследственной насыщенной формации $\mathfrak{F}$ получены в [13, 14]. Строение $E_{\mathfrak{N}}$-групп установили Эберт и Бауман [12]. Строение $E_{\mathfrak{U}}$-группы для формации $\mathfrak{U}$ всех сверхразрешимых групп получили В. Н. Семенчук и А. Н. Скиба [15]. В другой работе [16] они исследовали строение $E_{\mathfrak{F}}$-группы для формации $\mathfrak{F}$ с условием Шеметкова. Новые аспекты и открытые проблемы, относящиеся к $E_{\mathfrak{F}}$-группам, обсуждаются в статье А. Н. Скибы [17, 7.2].

Естественным продолжением этих исследований является изучение групп, все примарные подгруппы которых $\mathfrak{F}$-субнормальны или $\mathfrak{F}$-абнормальны. В случае, когда $\mathfrak{F}$ — формация с условием Шеметкова, такие группы изучались в работе В. Н. Семенчука и С. Н. Шевчука [18]. В. С. Монахов [9] исследовал группы, все примарные подгруппы которых $\mathfrak{U}$-субнормальны или $\mathfrak{U}$-абнормальны.

Если формация $\mathfrak{F}$ содержит все нильпотентные группы, то каждая подгруппа, содержащая некоторую $\mathfrak{F}$-абнормальную подгруппу, самонормализуема. В симметрической группе S_4 степени 4 силовская 2-подгруппа одновременно самонормализуема и $\mathfrak{U}$-субнормальна. Поэтому самонормализуемость и $\mathfrak{F}$-субнормальность не являются альтернативными понятиями, что затрудняет исследования групп с $\mathfrak{F}$-субнормальными и самонормализуемыми системами подгрупп.

Несложно получить строение группы, в которой каждая примарная подгруппа самонормализуема или $\mathfrak{N}$-субнормальна, они устроены так же, как $E_{\mathfrak{N}}$-группы (см. лемму 1.5). В. С. Монахов [9] исследовал группы, все примарные подгруппы которых $\mathfrak{U}$-субнормальны или самонормализуемы. Класс таких групп значительно шире класса $E_{\mathfrak{U}}$-групп.

В настоящей работе развиваются перечисленные результаты. Получены новые свойства классов $\mathrm{w}\mathfrak{F}$ и $\mathrm{v}\mathfrak{F}$. В частности, установлено (теорема 2.3), что в любой разрешимой группе каждая примарная подгруппа $\mathfrak{A}_1\mathfrak{N}$-субнормальна, а каждая примарная циклическая подгруппа $\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}$-субнормальна. Здесь $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{A}_1$ — формации всех абелевых групп и всех абелевых групп с элементарными абелевыми силовскими подгруппами соответственно. Кроме того, для большого класса формаций $\mathfrak{F}$ доказано (теорема 2.5), что разрешимая группа принадлежит классу $\mathrm{w}\mathfrak{F}$ тогда и только тогда, когда каждая ее метанильпотентная подгруппа содержится в $\mathfrak{F}$. Исследованы (теорема 3.3) разрешимые группы, все примарные подгруппы которых $\mathfrak{F}$-субнормальны или самонормализуемы для любой наследственной насыщенной формации $\mathfrak{F}$, содержащей все нильпотентные группы.

1. Вспомогательные результаты

Запись $X \leq Y$ означает, что X является подгруппой группы Y. Если X нормальна в Y, то пишем $X \trianglelefteq Y$. При $X \neq Y$ используем обозначения $X < Y$ и $X \triangleleft Y$. Полупрямое произведение двух подгрупп A и B с нормальной подгруппой A записывается в виде $A \rtimes B$.

Формации всех абелевых, нильпотентных, сверхразрешимых и разрешимых групп обозначаются через $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{N}$, $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{S}$ соответственно, а $\mathfrak{E}$ — формация всех групп. Формация называется *радикальной*, если она является классом Фиттинга. Если $\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{F}$ — наследственные формации, то произведение

$$\mathfrak{X}\mathfrak{F} = \{G \in \mathfrak{E} \mid G^{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{X}\}$$

согласно [1, с. 191; 3, с. 337] является наследственной формацией.

Лемма 1.1. *Пусть $\mathfrak{F}$ — формация и H, K — подгруппы группы G, $N \trianglelefteq G$. Тогда справедливы следующие утверждения.*

(1) *Если K — $\mathfrak{F}$-субнормальна в H, а H $\mathfrak{F}$-субнормальна в G, то K $\mathfrak{F}$-субнормальна в G* [4, 6.1.6(1)].

(2) *Если K/N $\mathfrak{F}$-субнормальна в G/N, то K $\mathfrak{F}$-субнормальна в G* [4, 6.1.6(2)].

(3) *Если H $\mathfrak{F}$-субнормальна в G, то HN/N $\mathfrak{F}$-субнормальна в G/N* [4, 6.1.6(3)].

(4) *Если $\mathfrak{F}$ — наследственная формация и $G^{\mathfrak{F}} \leq K$, то K $\mathfrak{F}$-субнормальна в G* [4, 6.1.7(1)].

(5) *Если $\mathfrak{F}$ — наследственная формация и H $\mathfrak{F}$-субнормальна в G, то $H \cap K$ $\mathfrak{F}$-субнормальна в K* [4, 6.1.7(2)].

(6) *Если $\mathfrak{F}$ — наследственная формация и подгруппы H и K $\mathfrak{F}$-субнормальны в G, то $H \cap K$ $\mathfrak{F}$-субнормальна в G* [4, 6.1.7(3)].

(7) *Если $\mathfrak{F}$ — наследственная формация, $K \leq H$ и H $\mathfrak{F}$-субнормальна в G, $H \in \mathfrak{F}$, то K $\mathfrak{F}$-субнормальна в G.*

(8) *Если $\mathfrak{F}$ — наследственная формация и H $\mathfrak{F}$-субнормальна в G, то $H^{\mathfrak{F}}$ субнормальна в G.*

Доказательство. (7) Так как $\mathfrak{F}$ — наследственная формация и $H \in \mathfrak{F}$, то K $\mathfrak{F}$-субнормальна в H и K $\mathfrak{F}$-субнормальна в G в силу (2).

(8) Проведем доказательство индукцией по порядку группы G. Если $H = G$, то $H^{\mathfrak{F}} = G^{\mathfrak{F}}$ нормальна в G. Если H — собственная подгруппа группы G, то в G существует максимальная подгруппа M, содержащая H и $G^{\mathfrak{F}}$. По индукции $H^{\mathfrak{F}}$ субнормальна в M, а так как $H^{\mathfrak{F}} \leq G^{\mathfrak{F}} \leq M$, то $H^{\mathfrak{F}}$ субнормальна в G. □

Лемма 1.2 [9, лемма 1.11]. *Пусть H — подгруппа группы G.*

(1) *Если H $\mathfrak{N}$-субнормальна в G, то H субнормальна в G.*

(2) *Если G — разрешимая группа и H субнормальна в G, то H $\mathfrak{N}$-субнормальна в G.*

В дальнейшем $\mathbb{P}$ всегда множество всех простых чисел.

Лемма 1.3 [9, лемма 1.4]. *Пусть $\mathfrak{F}$ — наследственная формация, содержащая группы порядка p для всех $p \in \mathbb{P}$, и A — $\mathfrak{F}$-абнормальная подгруппа группы G. Тогда*

(1) *если $A \leq B \leq G$, то A $\mathfrak{F}$-абнормальна в B и $A = N_G(A)$;*

(2) *если $A \leq B \leq G$, то B $\mathfrak{F}$-абнормальна в G и $B = N_G(B)$;*

(3) *если G разрешима, то A абнормальна в G.*

Лемма 1.4 [9, лемма 1.5]. *Пусть A — подгруппа группы G.*

(1) *Если A абнормальна в G, то A $\mathfrak{N}$-абнормальна в G.*

(2) *Если G разрешима и A $\mathfrak{N}$-абнормальна в G, то A абнормальна в G.*

(3) *Подгруппа A $\mathfrak{N}$-абнормальна в G тогда и только тогда, когда $B = N_G(B)$ для каждой подгруппы B из G, содержащей A.*

Лемма 1.5. *Если в разрешимой группе G каждая примарная циклическая подгруппа $\mathfrak{N}$-субнормальна или самонормализуема, то G является $E_{\mathfrak{N}}$-группой.*

Доказательство. В силу леммы 1.2(1) каждая $\mathfrak{N}$-субнормальная подгруппа субнормальна. Пусть в группе G каждая примарная циклическая подгруппа субнормальна или самонормализуема и $X < G$. Предположим, что в X существует примарная циклическая подгруппа A такая, что $A = N_G(A)$. Тогда A — силовская подгруппа и по лемме 1.4(3) подгруппа A $\mathfrak{N}$-абнормальна в G. По лемме 1.3(2) подгруппа X $\mathfrak{N}$-абнормальна в G. Если в X нет самонормализуемых циклических примарных подгрупп, то каждая примарная циклическая подгруппа из X субнормальна в G. Но все циклические примарные подгруппы из X порождают X. Поскольку подгруппа, порожденная субнормальными подгруппами, является субнормальной подгруппой [1, 2.43], подгруппа X субнормальна в группе G и по лемме 1.2(2) подгруппа X $\mathfrak{N}$-субнормальна в группе G. Таким образом, G является $E_{\mathfrak{N}}$-группой. $\square$

Подгруппа H группы G называется $\mathfrak{X}$-*проектором группы* G, если HN/N — $\mathfrak{X}$-максимальная подгруппа группы G/N для любой нормальной подгруппы N группы G. *Подгруппой Картера* называют нильпотентную самонормализуемую подгруппу [2, VI.12; 3, III.4.5]. В разрешимых группах подгруппы Картера являются $\mathfrak{N}$-проекторами, они существуют и сопряжены. В неразрешимой группе подгруппы Картера может не быть, но по теореме Е. П. Вдовина [19], которая использует классификацию конечных простых групп, подгруппы Картера сопряжены в любой группе, где присутствуют.

Лемма 1.6 [20, теорема 15.1]. *Пусть $\mathfrak{F}$ — формация. Подгруппа H разрешимой группы G является $\mathfrak{F}$-проектором G тогда и только тогда, когда она принадлежит $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{F}$-абнормальна в G.*

Если $G \notin \mathfrak{F}$, но каждая собственная подгруппа группы G принадлежит $\mathfrak{F}$, то говорят, что G — *минимальная не* $\mathfrak{F}$-*группа*. Множество всех минимальных не $\mathfrak{F}$-групп обозначают через $\mathscr{M}(\mathfrak{F})$. Минимальная не $\mathfrak{N}$-группа называется также *группой Шмидта*, и ее свойства хорошо известны [21].

Формация $\mathfrak{F}$ называется *сверхрадикальной*, если она удовлетворяет следующим двум требованиям:

(1) $\mathfrak{F}$ — нормально наследственная формация;

(2) любая группа $G = AB$, где A и B — $\mathfrak{F}$-субнормальные $\mathfrak{F}$-подгруппы из G, принадлежит $\mathfrak{F}$.

Изначально сверхрадикальные формации называли $\mathfrak{F}$-*радикальными*, а в монографии [4, с. 265] использовался термин «$\mathfrak{F}$-фиттингов класс». Известно, что формация с условием Шеметкова [4, 6.4.6] и решеточная формация [22, лемма 4] сверхрадикальны.

Лемма 1.7 [23, лемма 3]. *Пусть $\mathfrak{F}$ — наследственная насыщенная сверхрадикальная формация. Тогда разрешимая минимальная не $\mathfrak{F}$-группа G является группой одного из следующих типов:*

(1) *G — группа порядка p, где $p \notin \pi(\mathfrak{F})$ простое;*

(2) *G — группа Шмидта.*

Лемма 1.8. *Пусть $\mathfrak{F}$ — наследственная насыщенная сверхрадикальная формация. Тогда $\mathfrak{F}$-корадикал в каждой разрешимой минимальной не $\mathfrak{F}$-группе является силовской подгруппой.*

Доказательство. Пусть G — разрешимая минимальная не $\mathfrak{F}$-группа и $K = G^{\mathfrak{F}}$. По лемме 1.7 либо $|G| = p$, $p \notin \pi(\mathfrak{F})$, либо G является группой Шмидта. В первом случае $G = K$, и утверждение справедливо. Пусть $G = P \rtimes \langle y \rangle$ — группа Шмидта [21, теорема 1.1]. Согласно [21, теорема 1.5(5.2)] либо $K \subseteq \Phi(P) \times \langle y^g \rangle = \Phi(G)$, либо $P \subseteq K$. Если $K \subseteq \Phi(G)$, то $G \in \mathfrak{F}$, поскольку формация $\mathfrak{F}$ насыщенна; противоречие. Пусть $P \subseteq K$. Тогда G/K — циклическая q-группа. Теперь [1, 5.5] $\mathfrak{N}_q \subseteq \mathfrak{F}$, поэтому $P = K$. □

2. Группы с $\mathfrak{F}$-субнормальными примарными подгруппами

Понятно, что $\mathfrak{F} \subseteq \mathrm{w}\mathfrak{F} \subseteq \mathrm{v}\mathfrak{F}$ для наследственной формации $\mathfrak{F}$. Если $\mathfrak{N} \subseteq \mathfrak{F}$ и $G \in \mathrm{w}\mathfrak{F}$, то в G каждая примарная подгруппа $\mathfrak{F}$-субнормальна.

А. Ф. Васильев, Т. И. Васильева и В. Н. Тютянов [5] предложили следующее понятие. Подгруппа H группы G называется $\mathbb{P}$-*субнормальной*, если $H = G$ или существует цепочка подгрупп (1) такая, что $|H_i : H_{i-1}| \in \mathbb{P}$ для любого i. В классе разрешимых групп понятие $\mathbb{P}$-субнормальной подгруппы совпадает с понятием $\mathfrak{U}$-субнормальной подгруппы [9, лемма 1.12]. Класс групп, в которых каждая примарная подгруппа $\mathbb{P}$-субнормальна, совпадает с классом $\mathrm{w}\mathfrak{U}$. Группы из класса $\mathrm{w}\mathfrak{U}$ полностью изучены (см. [5, 8]).

В. С. Монахов и В. Н. Княгина [8] ввели в рассмотрение класс групп $\mathfrak{X}$, у которых каждая примарная циклическая подгруппа $\mathbb{P}$-субнормальна, и полностью описали свойства класса $\mathfrak{X}$ и групп из этого класса. Понятно, что $\mathfrak{X} = \mathrm{v}\mathfrak{U}$.

Известны следующие свойства классов $\mathrm{v}\mathfrak{F}$ и $\mathrm{w}\mathfrak{F}$ для произвольной наследственной насыщенной формации $\mathfrak{F}$.

Лемма 2.1. (1) *Если $\mathfrak{F}$ — наследственная насыщенная формация, то $\mathrm{w}\mathfrak{F}$, $\mathrm{v}\mathfrak{F}$ — наследственные насыщенные формации* [6, *теорема* B*;* 11, *теорема* C].

(2) *Если $\mathfrak{F}$ — наследственная разрешимая формация, то $\mathrm{w}\mathfrak{F}$ — наследственная разрешимая формация* [6, *лемма* 1.6].

(3) *Если $\mathfrak{F}$ — наследственная насыщенная формация, то $\mathrm{w}\mathfrak{F} \cap \mathfrak{N}^2 = \mathfrak{F} \cap \mathfrak{N}^2$* [6, *теорема* A *при* $\mathfrak{X} = \mathfrak{N}^2$].

Укажем новые свойства классов $\mathrm{w}\mathfrak{F}$ и $\mathrm{v}\mathfrak{F}$. Формацию всех разрешимых групп с абелевыми силовскими подгруппами обозначим через $\mathscr{A}$.

Лемма 2.2. *Пусть $\mathfrak{F}$ — наследственная насыщенная сверхрадикальная формация, $\mathfrak{N} \subseteq \mathfrak{F}$.*

(1) *Разрешимая группа G принадлежит $\mathfrak{F}$ тогда и только тогда, когда каждая примарная циклическая подгруппа группы G $\mathfrak{F}$-субнормальна.*

(2) *Разрешимая группа G принадлежит $\mathfrak{F}$ тогда и только тогда, когда каждая примарная подгруппа группы G $\mathfrak{F}$-субнормальна.*

Доказательство. (1) Пусть $G \in \mathfrak{F}$. Тогда каждая собственная, а значит, и каждая примарная циклическая подгруппа группы G $\mathfrak{F}$-субнормальна.

Обратно, допустим, что существуют группы, не принадлежащие $\mathfrak{F}$, в которых все примарные циклические подгруппы $\mathfrak{F}$-субнормальны. Среди таких групп выберем группу G наименьшего порядка. Тогда каждая собственная подгруппа в G принадлежит $\mathfrak{F}$. Ввиду леммы 1.7 группа G является группой Шмидта. Согласно [21, теорема 1.5(5)] и лемме 1.8 $G = P \rtimes Q$, где $P = G^{\mathfrak{F}}$ и $Q = \langle q \rangle$.

По выбору G подгруппа Q $\mathfrak{F}$-субнормальна в G, а значит, в G существует максимальная подгруппа M, содержащая Q и $G^{\mathfrak{F}}$; противоречие.

Утверждение (2) следует из (1). $\square$

Теорема 2.3. (1) $\mathfrak{S} = \mathrm{w}(\mathfrak{A}_1\mathfrak{N})$.

(2) $\mathfrak{S} = \mathrm{v}(\mathfrak{A}_1\mathfrak{A})$.

(3) $\mathrm{w}(\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}) = \mathfrak{N}\mathscr{A}$.

Доказательство. (1) Включение $\mathrm{w}(\mathfrak{A}_1\mathfrak{N}) \subseteq \mathfrak{S}$ справедливо в силу леммы 2.1(2). Проверим обратное включение. Допустим противное, и пусть G — разрешимая группа наименьшего порядка такая, что $G \notin \mathrm{w}(\mathfrak{A}_1\mathfrak{N})$. Пусть N — минимальная нормальная подгруппа, а Q — не $\mathfrak{A}_1\mathfrak{N}$-субнормальная силовская подгруппа группы G. Так как

$$NQ \in \mathfrak{A}_1\mathfrak{N} \subseteq \mathrm{w}(\mathfrak{A}_1\mathfrak{N}),$$

то NQ — собственная подгруппа группы G и Q $\mathfrak{A}_1\mathfrak{N}$-субнормальна в NQ. По индукции $G/N \in \mathrm{w}(\mathfrak{A}_1\mathfrak{N})$, а значит, NQ/N $\mathfrak{A}_1\mathfrak{N}$-субнормальна в G/N. По лемме 1.1(2) подгруппа NQ $\mathfrak{A}_1\mathfrak{N}$-субнормальна в G, а по лемме 1.1(1) подгруппа Q $\mathfrak{A}_1\mathfrak{N}$-субнормальна в G; противоречие. Значит, предположение неверно, и $\mathfrak{S} \subseteq \mathrm{w}(\mathfrak{A}_1\mathfrak{N})$.

(2) Включение $\mathrm{v}(\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}) \subseteq \mathfrak{S}$ проверим с помощью индукции по порядку группы. Пусть $G \in \mathrm{v}(\mathfrak{A}_1\mathfrak{A})$ и $\langle a\rangle$ — примарная подгруппа. По условию подгруппа $\langle a\rangle$ $\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}$-субнормальна в G. Из определения $\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}$-субнормальности следует, что существует максимальная в G подгруппа M такая, что $\langle a\rangle \le M$ и $G/\operatorname{Core}_G M \in \mathfrak{A}_1\mathfrak{A}$. По индукции подгруппа M разрешима, поэтому группа G разрешима и $\mathrm{v}(\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}) \subseteq \mathfrak{S}$.

Проверим обратное включение. Допустим противное, и пусть G — разрешимая группа наименьшего порядка такая, что $G \notin \mathrm{v}(\mathfrak{A}_1\mathfrak{A})$. Выберем в G минимальную нормальную подгруппу N и не $\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}$-субнормальную примарную подгруппу $\langle a\rangle$. Так как

$$N\langle a\rangle \in \mathfrak{A}_1\mathfrak{A} \subseteq \mathrm{v}(\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}),$$

то $N\langle a\rangle$ — собственная подгруппа группы G и $\langle a\rangle$ $\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}$-субнормальна в $N\langle a\rangle$. По индукции $G/N \in \mathrm{v}(\mathfrak{A}_1\mathfrak{A})$, а значит, $N\langle a\rangle/N$ $\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}$-субнормальна в G/N. По лемме 1.1(2) подгруппа $N\langle a\rangle$ $\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}$-субнормальна в G, а по лемме 1.1(1) подгруппа $\langle a\rangle$ $\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}$-субнормальна в G; противоречие. Значит, предположение неверно, и $\mathfrak{S} \subseteq \mathrm{v}(\mathfrak{A}_1\mathfrak{A})$.

(3) В [7, 3.10] установлено равенство $\mathrm{w}(\mathfrak{N}\mathfrak{A}) = \mathfrak{N}\mathscr{A}$. Поскольку $\mathfrak{A}_1\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{N}\mathfrak{A}$, то $\mathrm{w}(\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}) \subseteq \mathrm{w}(\mathfrak{N}\mathfrak{A}) = \mathfrak{N}\mathscr{A}$. Докажем обратное включение. Допустим противное, и пусть G — группа наименьшего порядка такая, что $G \in \mathfrak{N}\mathscr{A} \setminus \mathrm{w}(\mathfrak{A}_1\mathfrak{A})$. Пусть N — минимальная нормальная подгруппа в G и R — не $\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}$-субнормальная силовская подгруппа группы G. По индукции $G/N \in \mathrm{w}(\mathfrak{A}_1\mathfrak{A})$, тем самым NR/N $\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}$-субнормальна в G/N и по лемме 1.1(2) подгруппа NR $\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}$-субнормальна в G. Если $NR < G$, то $NR \in \mathrm{w}(\mathfrak{A}_1\mathfrak{A})$ и R $\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}$-субнормальна в NR. По лемме 1.1(1) подгруппа R $\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}$-субнормальна в G; противоречие. Теперь $G = N \rtimes R$. Поскольку $G \in \mathfrak{N}\mathscr{A}$, то R абелева и $G \in \mathfrak{A}_1\mathfrak{A} \subseteq \mathrm{w}(\mathfrak{A}_1\mathfrak{A})$; противоречие. Поэтому допущение неверно и $\mathfrak{N}\mathscr{A} \subseteq \mathrm{w}(\mathfrak{A}_1\mathfrak{A})$. $\square$

Следствие 2.3.1. (1) *В любой разрешимой группе каждая силовская подгруппа $\mathfrak{A}_1\mathfrak{N}$-субнормальна.*

(2) *В любой разрешимой группе каждая примарная циклическая подгруппа $\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}$-субнормальна.*

(3) *В разрешимой группе G каждая силовская подгруппа $\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}$-субнормальна тогда и только тогда, когда $G^{\mathscr{A}}$ нильпотентна.*

Согласно [7, 3.1(7)] и [11, A(7)] $\mathrm{w}\mathfrak{F} \subseteq \mathrm{w}\mathfrak{H}$ и $\mathrm{v}\mathfrak{F} \subseteq \mathrm{v}\mathfrak{H}$ для наследственных формаций $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{H}$. Поскольку

$$\mathfrak{A}_1\mathfrak{N} \subseteq \mathfrak{N}^2, \quad \mathfrak{A}_1\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{A}^2 \subseteq \mathfrak{N}\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{N}^2,$$

из теоремы 2.3 вытекает

Следствие 2.3.2. (1) $\mathfrak{S} = \mathrm{w}(\mathfrak{N}^2)$ [6, D.2].
(2) $\mathfrak{S} = \mathrm{v}(\mathfrak{N}\mathfrak{A})$ [11, D.2].

Следствие 2.3.3. $\mathrm{w}(\mathfrak{N}\mathscr{A}) = \mathfrak{N}\mathscr{A}$.

Доказательство. Согласно [7, 3.1(6)] $\mathrm{w}(\mathrm{w}\mathfrak{F}) = \mathrm{w}\mathfrak{F}$ для наследственной формации $\mathfrak{F}$. Из этого равенства и теоремы 2.3(3) получаем

$$\mathrm{w}(\mathfrak{N}\mathscr{A}) = \mathrm{w}(\mathrm{w}(\mathfrak{A}_1\mathfrak{A})) = \mathrm{w}(\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}) = \mathfrak{N}\mathscr{A}. \quad \square$$

В дальнейшем считаем, что $\mathfrak{F}$ — наследственная насыщенная формация и $\mathfrak{N} \subseteq \mathfrak{F}$.

Теорема 2.4. (1) *Если $G \in \mathrm{w}\mathfrak{F}$, то каждая метанильпотентная подгруппа из G принадлежит $\mathfrak{F}$.*

(2) *Если разрешимая группа G принадлежит $\mathrm{w}\mathfrak{F}$, то каждая нильпотентная подгруппа из G $\mathfrak{F}$-субнормальна.*

(3) *Каждая разрешимая минимальная не $\mathrm{w}\mathfrak{F}$-группа бипримарна.*

Доказательство. (1) Пусть H — метанильпотентная подгруппа группы $G \in \mathrm{w}\mathfrak{F}$. Тогда $H \in \mathrm{w}\mathfrak{F}$ по лемме 2.1(1) и $H \in \mathfrak{F}$ по лемме 2.1(3).

(2) Доказательство проведем индукцией по порядку группы G. Пусть $G \in \mathrm{w}\mathfrak{F}$ — группа наименьшего порядка, содержащая нильпотентную не $\mathfrak{F}$-субнормальную подгруппу H, и N — минимальная нормальная подгруппа группы G. Так как $HN \in \mathrm{w}\mathfrak{F}$ и HN метанильпотентна, $HN \in \mathfrak{F}$ по утверждению (1). По индукции HN/N $\mathfrak{F}$-субнормальна в G/N, а по лемме 1.1(2) подгруппа HN $\mathfrak{F}$-субнормальна в G. Теперь H $\mathfrak{F}$-субнормальна в G по лемме 1.1(7).

(3) Допустим противное и выберем разрешимую минимальную не $\mathrm{w}\mathfrak{F}$-группу G наименьшего порядка, для которой $|\pi(G)| > 2$. Поскольку $G \notin \mathrm{w}\mathfrak{F}$, существует не $\mathfrak{F}$-субнормальная силовская подгруппа R. Пусть N — минимальная нормальная подгруппа группы G. Тогда N — примарная подгруппа и $G \neq RN$. Подгруппа RN принадлежит $\mathrm{w}\mathfrak{F}$, значит, R $\mathfrak{F}$-субнормальна в RN. Если RN/N $\mathfrak{F}$-субнормальна в G/N, то по лемме 1.1(2) подгруппа RN $\mathfrak{F}$-субнормальна в G, а по лемме 1.1(1) подгруппа R $\mathfrak{F}$-субнормальна в G; противоречие. Значит, RN/N не $\mathfrak{F}$-субнормальна в G/N, и $G/N \notin \mathrm{w}\mathfrak{F}$. Тогда G/N — минимальная не $\mathrm{w}\mathfrak{F}$-группа и $|\pi(G/N)| = 2$ по индукции. Поэтому N — силовская подгруппа группы G и $G = N \leftthreetimes RQ$, где Q — силовская подгруппа группы G. Подгруппа RQ принадлежит $\mathrm{w}\mathfrak{F}$, тем самым R $\mathfrak{F}$-субнормальна в RQ. По лемме 1.1(3) подгруппа RN/N $\mathfrak{F}$-субнормальна в $G/N \simeq RQ$; противоречие. $\square$

Следствие 2.4.1. *Если разрешимая группа G принадлежит $\mathscr{M}(\mathfrak{F}) \setminus \mathrm{w}\mathfrak{F}$, то $|\pi(G)| = 2$.*

Доказательство. Допустим противное, и пусть G — разрешимая группа, $G \in \mathscr{M}(\mathfrak{F}) \setminus \mathrm{w}\mathfrak{F}$, $|\pi(G)| \neq 2$. Если $|\pi(G)| = 1$, то $G \in \mathfrak{N} \subseteq \mathfrak{F}$; противоречие. Значит, $|\pi(G)| > 2$. Пусть $H \leq G$ и H является минимальной не $\mathrm{w}\mathfrak{F}$-группой.

Если H — собственная подгруппа группы G, то $H \in \mathfrak{F} \subseteq \mathrm{w}\mathfrak{F}$; противоречие. Следовательно, $G = H$, и G — минимальная не $\mathrm{w}\mathfrak{F}$-группа. По теореме 2.4(3) группа G бипримарна, что противоречит ее выбору. $\square$

Теорема 2.5. *Предположим, что в каждой бипримарной минимальной не $\mathfrak{F}$-группе $\mathfrak{F}$-корадикал является силовской подгруппой.*

(1) *Если $G \in \mathrm{w}\mathfrak{F}$, то каждая бипримарная подгруппа из G принадлежит $\mathfrak{F}$.*

(2) *Каждая разрешимая минимальная не $\mathrm{w}\mathfrak{F}$-группа является бипримарной минимальной не $\mathfrak{F}$-группой.*

(3) *Разрешимая группа G принадлежит $\mathrm{w}\mathfrak{F}$ тогда и только тогда, когда каждая метанильпотентная подгруппа группы G принадлежит $\mathfrak{F}$.*

Доказательство. (1) Допустим противное, и пусть G — группа, в которой существует бипримарная подгруппа H такая, что $G \in \mathrm{w}\mathfrak{F}$, $H \notin \mathfrak{F}$ и $|G| + |H|$ наименьшее. Тогда H — минимальная не $\mathfrak{F}$-группа. По выбору $\mathfrak{F}$ будет $H = P \rtimes Q$ и $H^{\mathfrak{F}} = P$, где P и Q — силовские подгруппы. Подгруппа Q $\mathfrak{F}$-субнормальна в H, поскольку $H \in \mathrm{w}\mathfrak{F}$ по лемме 2.1(1). Поэтому существует максимальная в H подгруппа K такая, что $Q \leq K$ и $H/\operatorname{Core}_H K \in \mathfrak{F}$. Тогда $P \leq \operatorname{Core}_H K$ и $H = PQ \leq K$; противоречие.

(2) Пусть G — разрешимая минимальная не $\mathrm{w}\mathfrak{F}$-группа. По теореме 2.4(3) группа G бипримарна, а по утверждению (1) каждая собственная подгруппа группы G принадлежит $\mathfrak{F}$. Поэтому G — бипримарная минимальная не $\mathfrak{F}$-группа.

(3) Пусть разрешимая группа G принадлежит $\mathrm{w}\mathfrak{F}$. Тогда по теореме 2.4(1) каждая метанильпотентная подгруппа группы G принадлежит $\mathfrak{F}$.

Обратно, пусть G — разрешимая группа наименьшего порядка такая, что каждая ее метанильпотентная подгруппа принадлежит $\mathfrak{F}$, а $G \notin \mathrm{w}\mathfrak{F}$. Пусть $H \leq G$ и H является минимальной не $\mathrm{w}\mathfrak{F}$-группой. По утверждению (2) подгруппа H — бипримарная минимальная не $\mathfrak{F}$-группа. Поэтому H метанильпотентна по выбору $\mathfrak{F}$, подгруппа H принадлежит $\mathfrak{F}$ и $H \in \mathrm{w}\mathfrak{F}$; противоречие. $\square$

Следствие 2.5.1. *Если в каждой бипримарной минимальной не $\mathfrak{F}$-группе $\mathfrak{F}$-корадикал является силовской подгруппой, то $\mathscr{M}(\mathrm{w}\mathfrak{F}) \cap \mathfrak{S} = \{G \in \mathscr{M}(\mathfrak{F}) \mid |\pi(G)| = 2\}$.*

Доказательство. По теореме 2.5(2) справедливо включение

$$\mathscr{M}(\mathrm{w}\mathfrak{F}) \cap \mathfrak{S} \subseteq \{G \in \mathscr{M}(\mathfrak{F}) \mid |\pi(G)| = 2\}.$$

Обратно, пусть $G \in \mathscr{M}(\mathfrak{F})$ и $|\pi(G)| = 2$. Если $G \in \mathrm{w}\mathfrak{F}$, то $G \in \mathfrak{F}$ по теореме 2.5(1); противоречие. Поэтому $G \in \mathscr{M}(\mathfrak{F}) \setminus \mathrm{w}\mathfrak{F}$ и $G \in \mathscr{M}(\mathrm{w}\mathfrak{F})$. $\square$

Теорема 2.6. (1) *Каждая разрешимая минимальная не $\mathrm{v}\mathfrak{F}$-группа бипримарна.*

(2) *Предположим, что в каждой бипримарной минимальной не $\mathfrak{F}$-группе $\mathfrak{F}$-корадикал является силовской подгруппой. Тогда справедливы следующие утверждения:*

(2.1) *каждая разрешимая минимальная не $\mathrm{v}\mathfrak{F}$-группа является бипримарной минимальной не $\mathfrak{F}$-группой и ее не нормальная силовская подгруппа циклическая;*

(2.2) *разрешимая группа G принадлежит $\mathscr{M}(\mathfrak{F}) \setminus \mathrm{v}\mathfrak{F}$ тогда и только тогда, когда $G \in \mathscr{M}(\mathfrak{F})$, группа G бипримарна и ее не нормальная силовская подгруппа циклическая.*

Доказательство. (1) Допустим противное и выберем разрешимую минимальную не $\mathrm{v}\mathfrak{F}$-группу G наименьшего порядка, для которой $|\pi(G)| > 2$. Поскольку $G \notin \mathrm{v}\mathfrak{F}$, в G существует не $\mathfrak{F}$-субнормальная циклическая примарная подгруппа A. Пусть N — минимальная нормальная подгруппа группы G. Тогда N примарна и $G \neq AN$. Подгруппа AN принадлежит $\mathrm{v}\mathfrak{F}$, значит, A $\mathfrak{F}$-субнормальна в AN. Если AN/N $\mathfrak{F}$-субнормальна в G/N, то по лемме 1.1(2) подгруппа AN $\mathfrak{F}$-субнормальна в G, а по лемме 1.1(1) подгруппа A $\mathfrak{F}$-субнормальна в G; противоречие. Значит, AN/N не $\mathfrak{F}$-субнормальна в G/N, и $G/N \notin \mathrm{v}\mathfrak{F}$. Тогда G/N — минимальная не $\mathrm{v}\mathfrak{F}$-группа и $|\pi(G/N)| = 2$ по индукции. Поэтому N — силовская подгруппа группы G и $G = N \rtimes M$, где M — собственная бипримарная подгруппа группы G. Подгруппа M принадлежит $\mathrm{v}\mathfrak{F}$, а значит, $G/N \simeq M$ также принадлежит $\mathrm{v}\mathfrak{F}$; противоречие.

(2.1) Пусть G — разрешимая минимальная не $\mathrm{v}\mathfrak{F}$-группа. Тогда по утверждению (1) группа G бипримарна. Покажем, что $G \in \mathscr{M}(\mathfrak{F})$. Поскольку $G \notin \mathrm{v}\mathfrak{F}$, в G существует не $\mathfrak{F}$-субнормальная циклическая примарная подгруппа, и пусть A является такой подгруппой наименьшего порядка. Выберем в G минимальную нормальную подгруппу N. Заметим, что $A \nsubseteq N$. Действительно, если $A \subseteq N$, то A субнормальна, а значит, и $\mathfrak{F}$-субнормальна в G; противоречие.

Пусть $\Phi(G) = 1$. Тогда $G = N \rtimes M$, где M — максимальная подгруппа группы G. Если $H = NA$ — собственная подгруппа группы G, то $H \in \mathrm{v}\mathfrak{F}$ и A $\mathfrak{F}$-субнормальна в H. Поскольку $G/N \simeq M \in \mathrm{v}\mathfrak{F}$, то H/N $\mathfrak{F}$-субнормальна в G/N. По лемме 1.1(2) подгруппа H $\mathfrak{F}$-субнормальна в G, а по лемме 1.1(1) подгруппа A $\mathfrak{F}$-субнормальна в G; противоречие. Значит, $G = NA = N \rtimes A$, и $A = M^y$ для некоторого $y \in G$. Пусть K — максимальная подгруппа группы G. Тогда либо $N \subseteq K$, либо $A^g = K$ для некоторого $g \in G$. Если $A^g = K$, то подгруппа K примарна, а значит, $K \in \mathfrak{F}$. Если $N \subseteq K$, то по тождеству Дедекинда $K = N \rtimes (K \cap A)$. По выбору A подгруппа $K \cap A$ $\mathfrak{F}$-субнормальна в G. Подгруппа N также $\mathfrak{F}$-субнормальна в G. Следовательно, $K \in \mathrm{w}\mathfrak{F}$, и $K \in \mathfrak{F}$ по теореме 2.5(1). Таким образом, $G \in \mathscr{M}(\mathfrak{F})$ при $\Phi(G) = 1$.

Пусть $\Phi(G) \neq 1$. Так как $\mathrm{v}\mathfrak{F}$ — насыщенная формация по лемме 2.1(1), $G/\Phi(G) \notin \mathrm{v}\mathfrak{F}$, по индукции $G/\Phi(G)$ — бипримарная минимальная не $\mathfrak{F}$-группа и ее не нормальная силовская подгруппа циклическая. По выбору $\mathfrak{F}$ группа G содержит нормальную силовскую подгруппу P. Аналогично тому, как доказано, что $A \nsubseteq N$, можно проверить, что $A \nsubseteq P$. Если $H = PA < G$, то $H \in \mathrm{v}\mathfrak{F}$ и A $\mathfrak{F}$-субнормальна в H. Поскольку H субнормальна в G, то H $\mathfrak{F}$-субнормальна в G и по лемме 1.1(1) подгруппа A также $\mathfrak{F}$-субнормальна в G; противоречие. Значит, $G = PA = P \rtimes A$. Пусть K — максимальная подгруппа группы G. Тогда либо $P \subseteq K$, либо $A^g \subseteq K$ для некоторого $g \in G$. Если $P \subseteq K$, то по тождеству Дедекинда $K = P \rtimes (K \cap A)$. По выбору A подгруппа $K \cap A$ $\mathfrak{F}$-субнормальна в G. Подгруппа P также $\mathfrak{F}$-субнормальна в G. Следовательно, $K \in \mathrm{w}\mathfrak{F}$, и $K \in \mathfrak{F}$ по теореме 2.5(1). Если $A^g \subseteq K$ для некоторого $g \in G$, то $K = (K \cap P) \rtimes A^g$. Так как $K \in \mathrm{v}\mathfrak{F}$, то A^g $\mathfrak{F}$-субнормальна в K. Подгруппа $K \cap P$ также $\mathfrak{F}$-субнормальна в K, и $K \in \mathrm{w}\mathfrak{F}$. Отсюда $K \in \mathfrak{F}$ по теореме 2.5(1). Таким образом, $G \in \mathscr{M}(\mathfrak{F})$ при $\Phi(G) \neq 1$.

Группа G представима в виде $G = P \rtimes Q$, где P, Q — силовские подгруппы группы G и $P = G^{\mathfrak{F}}$. Предположим, что Q не циклическая и $a \in Q$. Тогда $H = P \rtimes \langle a \rangle$ — собственная подгруппа группы G и $H \in \mathfrak{F}$, поскольку $G \in \mathscr{M}(\mathfrak{F})$. По лемме 1.1(4) подгруппа H $\mathfrak{F}$-субнормальна в G, а по лемме 1.1(7) подгруппа $\langle a \rangle$ $\mathfrak{F}$-субнормальна в G. Если $b \in P$, то $\langle b \rangle$ субнормальна, а значит, и $\mathfrak{F}$-субнормальна в G. Таким образом, $G \in \mathrm{v}\mathfrak{F}$, что противоречит условию. Следовательно, предположение неверно, и не нормальная силовская подгруппа Q группы G циклическая.

(2.2) Если разрешимая группа G принадлежит $\mathscr{M}(\mathfrak{F}) \setminus \mathrm{v}\mathfrak{F}$, то по утверждению (2.1) группа G бипримарна и ее не нормальная силовская подгруппа циклическая. Обратно, пусть $G \in \mathscr{M}(\mathfrak{F})$, группа G бипримарна и ее не нормальная силовская подгруппа циклическая. По выбору $\mathfrak{F}$ $G = P \rtimes \langle x\rangle$, где P, $\langle x\rangle$ — силовские подгруппы группы G и $P = G^{\mathfrak{F}}$. Предположим, что $G \in \mathrm{v}\mathfrak{F}$. Тогда подгруппа $\langle x\rangle$ $\mathfrak{F}$-субнормальна в G. Поскольку P нормальна в G, то P также $\mathfrak{F}$-субнормальна в G. Таким образом, $G \in \mathrm{w}\mathfrak{F}$. По теореме 2.5(1) $G \in \mathfrak{F}$; противоречие. $\square$

В силу леммы 1.8 теоремы 2.5 и 2.6(2) охватывают сверхрадикальные формации, содержащие все нильпотентные группы.

Пример 2.1. Хорошо известно, что у следующих формаций $\mathfrak{F}$ в каждой минимальной не $\mathfrak{F}$-группе $\mathfrak{F}$-корадикал является силовской подгруппой: $\mathfrak{N}$, $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{E}_{p'}\mathfrak{N}_p$, $\mathfrak{N}_2\mathfrak{E}_{2'}$. Поэтому перечисленные формации также охватываются теоремами 2.5 и 2.6(2).

Пример 2.2. Для формации $\mathfrak{N}^2$ всех метанильпотентных групп симметрическая группа S_4 степени 4 является минимальной не $\mathfrak{N}^2$-группой, а $\mathfrak{N}^2$-корадикал $(S_4)^{\mathfrak{N}^2}$ имеет порядок 4 и не является силовской подгруппой. Ясно, что $S_4 \in \mathrm{w}\mathfrak{N}^2$. Поэтому ограничение на формацию в теореме 2.5 существенно.

Для формации $\mathfrak{U}$ утверждения теорем 2.4–2.6 превращаются в известные результаты, полученные в [5, теоремы 2.9, 2.13; 8, теорема B; 9, теорема 2.6]. Для других формаций, перечисленных в примере 2.1, можно записать новые результаты.

3. Группы с $\mathfrak{F}$-субнормальными и самонормализуемыми подгруппами

Как и ранее, считаем, что $\mathfrak{F}$ — наследственная насыщенная формация и $\mathfrak{N} \subseteq \mathfrak{F}$.

Теорема 3.1. *Каждая примарная циклическая подгруппа разрешимой группы G самонормализуема или $\mathfrak{F}$-субнормальна тогда и только тогда, когда либо $G \in \mathrm{v}\mathfrak{F}$, либо $G = G' \rtimes \langle x\rangle$, где $\langle x\rangle$ — самонормализуемая силовская p-подгруппа для некоторого $p \in \pi(G)$ и $G' \rtimes \langle x^p\rangle \in \mathrm{v}\mathfrak{F}$.*

Доказательство. Пусть каждая примарная циклическая подгруппа разрешимой группы G самонормализуема или $\mathfrak{F}$-субнормальна и $G \notin \mathrm{v}\mathfrak{F}$. Тогда существует циклическая p-подгруппа $\langle x\rangle$ для некоторого $p \in \pi(G)$, не $\mathfrak{F}$-субнормальная в G. По выбору G будет $\langle x\rangle = N_G(\langle x\rangle)$, а значит, $\langle x\rangle$ — силовская подгруппа и подгруппа Картера. Поскольку подгруппа Картера является $\mathfrak{N}$-проектором [1, 5.27], $G = G^{\mathfrak{N}}\langle x\rangle$. С другой стороны, в G существует [2, IV.2.6] нормальная p'-холлова подгруппа $G_{p'}$, и $G^{\mathfrak{N}} \le G_{p'}$. Таким образом, $G = G^{\mathfrak{N}}\langle x\rangle = G_{p'} \rtimes \langle x\rangle$, отсюда $G^{\mathfrak{N}} = G_{p'}$ и $G = G^{\mathfrak{N}} \rtimes \langle x\rangle$. Так как $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{N}$, то $G^{\mathfrak{N}} \subseteq G^{\mathfrak{A}} = G'$. С другой стороны, $G/G^{\mathfrak{N}} \simeq \langle x\rangle$ абелева, поэтому $G^{\mathfrak{N}} = G'$. Поскольку в разрешимой группе подгруппы Картера сопряжены [1, 5.28], $G' \rtimes \langle x^p\rangle$ не содержит самонормализуемых примарных циклических подгрупп, а значит, $G' \rtimes \langle x^p\rangle \in \mathrm{v}\mathfrak{F}$.

Обратно, если $G \in \mathrm{v}\mathfrak{F}$, то каждая примарная циклическая подгруппа группы G $\mathfrak{F}$-субнормальна в G. Пусть разрешимая группа G не принадлежит $\mathrm{v}\mathfrak{F}$ и для нее выполняются условия: $G = G' \rtimes \langle x \rangle$, где $\langle x \rangle$ — самонормализуемая силовская p-подгруппа для некоторого $p \in \pi(G)$ и $G' \rtimes \langle x^p \rangle \in \mathrm{v}\mathfrak{F}$. Выберем произвольную циклическую r-подгруппу A группы G. Если $r \neq p$, то $A \leq G'$. Поскольку $G' \in \mathrm{v}\mathfrak{F}$, то A $\mathfrak{F}$-субнормальна в G'. По лемме 1.1(4) подгруппа G' $\mathfrak{F}$-субнормальна в G, а по лемме 1.1(1) подгруппа A $\mathfrak{F}$-субнормальна в G. Пусть $r = p$. Тогда $A^g \leq \langle x \rangle$ для некоторого $g \in G$. Если $A^g = \langle x \rangle$, то A самонормализуема, поскольку $\langle x \rangle$ самонормализуема. Если $A^g < \langle x \rangle$, то $G' \rtimes A^g \in \mathrm{v}\mathfrak{F}$ и A^g $\mathfrak{F}$-субнормальна в $G' \rtimes A^g$. По лемме 1.1(4) подгруппа $G' \rtimes A^g$ $\mathfrak{F}$-субнормальна в G, а по лемме 1.1(1) подгруппа A^g $\mathfrak{F}$-субнормальна в G. $\square$

Теорема 3.2. *Каждая примарная подгруппа в разрешимой группе $G \in \mathrm{v}\mathfrak{F} \setminus \mathrm{w}\mathfrak{F}$ самонормализуема или $\mathfrak{F}$-субнормальна тогда и только тогда, когда*

(1) *подгруппой Картера является не $\mathfrak{F}$-субнормальная нециклическая силовская p-подгруппа P для некоторого $p \in \pi(G)$ и каждая собственная подгруппа из P $\mathfrak{F}$-субнормальна в G;*

(2) *$G = G^{\mathfrak{N}}P$ и $H \in \mathrm{w}\mathfrak{F}$ для всех $G^{\mathfrak{N}} \leq H < G$.*

Доказательство. Пусть каждая примарная подгруппа разрешимой группы $G \in \mathrm{v}\mathfrak{F} \setminus \mathrm{w}\mathfrak{F}$ самонормализуема или $\mathfrak{F}$-субнормальна. Так как $G \notin \mathrm{w}\mathfrak{F}$, существует силовская p-подгруппа P, которая не $\mathfrak{F}$-субнормальна в G. По условию $P = N_G(P)$ и P — подгруппа Картера. Понятно, что каждая собственная подгруппа из P $\mathfrak{F}$-субнормальна в G. Поскольку $G \in \mathrm{v}\mathfrak{F}$, то P нециклическая. Подгруппа Картера является $\mathfrak{N}$-проектором [1, 5.27], поэтому $G = G^{\mathfrak{N}}P$. Предположим, что $H \notin \mathrm{w}\mathfrak{F}$ для некоторой $G^{\mathfrak{N}} \leq H < G$. Тогда в H существует силовская t-подгруппа T, не $\mathfrak{F}$-субнормальная в H. Подгруппа T не $\mathfrak{F}$-субнормальна в G по лемме 1.1(5), поэтому T самонормализуема. Теперь T сопряжена с P, что невозможно, поскольку $|T| \neq |P|$. Тем самым предположение неверно и $H \in \mathrm{w}\mathfrak{F}$.

Обратно, пусть для разрешимой группы $G \in \mathrm{v}\mathfrak{F} \setminus \mathrm{w}\mathfrak{F}$ выполняются утверждения (1), (2) теоремы. Выберем произвольную r-подгруппу R группы G, $r \in \pi(G)$. Если $G^{\mathfrak{N}}R < G$, то $G^{\mathfrak{N}}R \in \mathrm{w}\mathfrak{F}$ по утверждению (2) и R $\mathfrak{F}$-субнормальна в $G^{\mathfrak{N}}R$. Поскольку $G^{\mathfrak{N}}R$ $\mathfrak{F}$-субнормальна в G по лемме 1.1(4), то R $\mathfrak{F}$-субнормальна в G по лемме 1.1(7). Пусть $G^{\mathfrak{N}}R = G$. Тогда $r = p$ и $R^g \leq P$ для некоторого $g \in G$. Если $R^g = P$, то R^g сопряжена с подгруппой Картера P, а значит, R^g самонормализуема. Таким образом, $R^g < P$, и R^g $\mathfrak{F}$-субнормальна в G по (1). $\square$

Объединяя две предыдущие теоремы, получаем следующий результат.

Теорема 3.3. *Каждая примарная подгруппа разрешимой группы G самонормализуема или $\mathfrak{F}$-субнормальна тогда и только тогда, когда либо $G \in \mathrm{w}\mathfrak{F}$,*

либо

(1) *$G \notin \mathrm{v}\mathfrak{F}$, $G = G' \rtimes \langle x \rangle$, где $\langle x \rangle$ — самонормализуемая силовская p-подгруппа для некоторого $p \in \pi(G)$ и $G' \rtimes \langle x^p \rangle \in \mathrm{w}\mathfrak{F}$,*

либо

(2) *$G \in \mathrm{v}\mathfrak{F} \setminus \mathrm{w}\mathfrak{F}$, подгруппой Картера является не $\mathfrak{F}$-субнормальная нециклическая силовская p-подгруппа P для некоторого $p \in \pi(G)$ и каждая собственная подгруппа из P $\mathfrak{F}$-субнормальна в G, $G = G^{\mathfrak{N}}P$ и $H \in \mathrm{w}\mathfrak{F}$ для всех $G^{\mathfrak{N}} \leq H < G$.*

Применяя теорему 2.5, получаем

Следствие 3.3.1. *Пусть в каждой бипримарной минимальной не $\mathfrak{F}$-группе $\mathfrak{F}$-корадикал является силовской подгруппой. Каждая примарная подгруппа разрешимой группы G самонормализуема или $\mathfrak{F}$-субнормальна тогда и только тогда, когда либо*

(1) *$G \notin \mathrm{v}\mathfrak{F}$, $G = G' \rtimes \langle x \rangle$, где $\langle x \rangle$ — самонормализуемая силовская p-подгруппа для некоторого $p \in \pi(G)$ и $G' \rtimes \langle x^p \rangle \in \mathrm{w}\mathfrak{F}$,*

либо

(2) *$G \in \mathrm{v}\mathfrak{F} \backslash \mathrm{w}\mathfrak{F}$, подгруппой Картера является не $\mathfrak{F}$-субнормальная нециклическая силовская p-подгруппа P для некоторого $p \in \pi(G)$ и каждая собственная подгруппа из P $\mathfrak{F}$-субнормальна в G, $G = G^{\mathfrak{N}}P$ и $H \in \mathrm{w}\mathfrak{F}$ для всех $G^{\mathfrak{N}} \leq H < G$,*

либо

(3) *каждая метанильпотентная подгруппа группы G принадлежит $\mathfrak{F}$.*

Конкретизируем теорему 3.3 для сверхрадикальной формации.

Следствие 3.3.2. *Если $\mathfrak{F}$ — сверхрадикальная формация, то для разрешимой группы $G \notin \mathfrak{F}$ следующие утверждения эквивалентны.*

(1) *Каждая примарная циклическая подгруппа в G самонормализуема или $\mathfrak{F}$-субнормальна.*

(2) *Каждая примарная подгруппа в G самонормализуема или $\mathfrak{F}$-субнормальна.*

(3) *$G = G' \rtimes \langle x \rangle$, где $G' = G^{\mathfrak{N}}$, а $\langle x \rangle$ — самонормализуемая силовская p-подгруппа для некоторого $p \in \pi(G)$ и $G' \rtimes \langle x^p \rangle \in \mathfrak{F}$.*

Доказательство. Ввиду леммы 2.2 группа G не принадлежит $\mathrm{v}\mathfrak{F}$ и $\mathrm{w}\mathfrak{F}$. Тогда по следствию 3.3.1 эквивалентны (2) и (3), а по теореме 3.1 эквивалентны (1) и (3). $\square$

Полагая $\mathfrak{F} = \mathfrak{U}$ в теоремах 3.1 и 3.2, получаем теоремы 3.1 и 3.5 из [9]. Для других формаций, перечисленных в примере 2.1, на основании следствий 3.3.1 и 3.3.2 можно записать новые результаты.

Замечание 3.1. Так как $\mathfrak{F}$-абнормальная подгруппа всегда самонормализуема (лемма 1.3(1)), теорема 3.3 развивает результаты из [12, 14, 16, 18, 24].

Благодарим Татьяну Ивановну Васильеву за полезные обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Монахов В. С.* Введение в теорию конечных групп и их классов. Минск: Выш. шк., 2006.
2. *Huppert B.* Endliche Gruppen. I. Berlin: Springer-Verl., 1967.
3. *Doerk K., Hawkes T.* Finite soluble groups. Berlin; New York: Walter de Gruyter, 1992.
4. *Ballester-Bolinches A., Ezquerro L. M.* Classes of finite groups. Dordrecht: Springer-Verl., 2006.
5. *Васильев А. Ф., Васильева Т. И., Тютянов В. Н.* О конечных группах сверхразрешимого типа // Сиб. мат. журн. 2010. Т. 51, № 6. С. 1270–1281.
6. *Васильев А. Ф., Васильева Т. И.* О конечных группах с обобщенно субнормальными силовскими подгруппами // Пробл. физики, математики и техники. 2011. № 4. С. 86–91.
7. *Васильев А. Ф., Васильева Т. И., Вегера А. С.* Конечные группы с обобщенно субнормальным вложением силовских подгрупп // Сиб. мат. журн. 2016. Т. 57, № 2. С. 259–275.
8. *Monakhov V. S., Kniahina V. N.* Finite groups with $\mathbb{P}$-subnormal subgroups // Ric. Mat. 2013. V. 62, N 2. P. 307–322.
9. *Монахов В. С.* Конечные группы с абнормальными и $\mathfrak{U}$-субнормальными подгруппами // Сиб. мат. журн. 2016. Т. 57, № 2. С. 447–462.
10. *Мурашко В. И.* Свойства класса конечных групп с $\mathbb{P}$-субнормальными циклическими примарными подгруппами // Докл. НАН Беларуси. 2014. Т. 58, № 1. С. 5–8.

11. *Мурашко В. И.* Классы конечных групп с обобщенно субнормальными циклическими примарными подгруппами // Сиб. мат. журн. 2014. Т. 55, № 6. С. 1353–1367.
12. *Ebert G., Bauman S.* A note on subnormal and abnormal chains // J. Algebra. 1975. V. 36, N 2. P. 287–293.
13. *Förster P.* Finite groups all of whose subgroups are $\mathfrak{F}$-subnormal or $\mathfrak{F}$-subabnormal // J. Algebra. 1986. V. 103, N 1. P. 285–293.
14. *Семенчук В. Н.* Строение конечных групп с $\mathfrak{F}$-абнормальными или $\mathfrak{F}$-субнормальными подгруппами // Вопросы алгебры. Минск: Университетское, 1986. С. 50–55.
15. *Semenchuk V. N., Skiba A. N.* On one generalization of finite $\mathfrak{U}$-critical groups // J. Algebra Appl. 2016. V. 15 [11 pages]. DOI: http://dx.doi.org/10.1142/S0219498816500638.
16. *Семенчук В. Н., Скиба А. Н.* О конечных группах, в которых каждая подгруппа либо $\mathfrak{F}$-субнормальна, либо $\mathfrak{F}$-абнормальна // Пробл. физики, математики и техники. 2015. № 2. С. 72–74.
17. *Skiba A. N.* On some results in the theory of finite partially soluble groups // Commun. Math. Stat. 2016. V. 4, N 3. P. 281–309.
18. *Семенчук В. Н., Шевчук С. Н.* Конечные группы, у которых примарные подгруппы либо $\mathfrak{F}$-субнормальны, либо $\mathfrak{F}$-абнормальны // Изв. вузов. Математика. 2011. № 8. С. 46–55.
19. *Вдовин Е. П.* Картеровы подгруппы конечных групп // Мат. тр. 2008. Т. 11, № 2. С. 20–106.
20. *Шеметков Л. А.* Формации конечных групп. М.: Наука, 1978.
21. *Монахов В. С.* Подгруппы Шмидта, их существование и некоторые приложения // Тр. Укр. мат. конгресса-2001. Киев: Ин-т математики НАН Украины, 2002. С. 81–90.
22. *Васильев А. Ф., Каморников С. Ф., Семенчук В. Н.* О решетках подгрупп конечных групп // Бесконечные группы и примыкающие алгебраические системы. Киев: Ин-т математики НАН Украины, 1993. С. 27–54.
23. *Семенчук В. Н.* Разрешимые $\mathfrak{F}$-радикальные формации // Мат. заметки. 1996. Т. 59, № 2. С. 261–266.
24. *Fattahi A.* Groups with only normal and abnormal subgroups // J. Algebra. 1974. V. 28, N 1. P. 15–19.

Статья поступила 5 октября 2016 г.

Монахов Виктор Степанович, Сохор Ирина Леонидовна
Гомельский гос. университет им. Ф. Скорины,
ул. Советская, 104, Гомель 246019, Беларусь
Victor.Monakhov@gmail.com, Irina.Sokhor@gmail.com