Сибирский математический журнал
Сентябрь—октябрь, 2015. Том 56, № 5

УДК 517.518+517.54

ИЗОМОРФИЗМЫ СОБОЛЕВСКИХ ПРОСТРАНСТВ НА ГРУППАХ КАРНО И КВАЗИКОНФОРМНЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ

С. К. Водопьянов, Н. А. Евсеев

Аннотация. Доказано, что измеримое отображение областей на группе Карно индуцирует по правилу замены переменной изоморфизм пространств Соболева, показатель суммируемости которых равен хаусдорфовой размерности группы, тогда и только тогда, когда оно совпадает почти всюду с некоторым квазиконформным отображением.

DOI 10.17377/smzh.2015.56.503

Ключевые слова: оператор композиции, пространство Соболева, квазиконформное отображение, группа Карно.

К семидесятилетию С. С. Кутателадзе

Введение

Работу можно рассматривать как естественное продолжение исследований, начатых в [1–5]. В этих работах получены различные доказательства теоремы о том, что измеримое отображение в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$, индуцирующее изоморфизм некоторых пространств дифференцируемых функций по правилу замены переменной, совпадает почти всюду с квазиконформным отображением.

В данной работе получим решение аналогичной задачи для измеримых отображений областей группы Карно, индуцирующих изоморфизмы горизонтальных классов Соболева. Метод настоящей работы представляет модификацию рассуждений работы [5] и основан на результатах из [6]. В [6] введен основной объект исследования — класс IL^1_p отображений на группе Карно.

Определение 1. Пусть D, D' — области на группе Карно $\mathbb{G}$. Измеримое отображение $\varphi : D \to D'$ *принадлежит классу* IL^1_p, $p \in [1,\infty]$, если φ индуцирует оператор композиции в пространствах Соболева:

$$\varphi^* : L^1_p(D') \cap C^\infty(D') \to L^1_p(D),\ \varphi^*(f) = f \circ \varphi, \quad f \in L^1_p(D') \cap C^\infty(D'), \tag{1}$$

такой, что

1) справедливы неравенства

$$K^{-1}\big\|f \mid L^1_p(D')\big\| \le \big\|\varphi^*(f) \mid L^1_p(D)\big\| \le K\big\|f \mid L^1_p(D')\big\| \tag{2}$$

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Правительства Российской Федерации для государственной поддержки научных исследований (договор № 14.B25.31.0029) и Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 14–01–00552).

для любой функции $f \in L^1_p(D') \cap C^\infty(D')$, где постоянная K не зависит от выбора функции f,

2) образ $\varphi^*\big(L^1_p(D') \cap C^\infty(D')\big)$ всюду плотен в $L^1_p(D)$.

В [6] показано, что условие 2 этого определения не зависит от первого.

В данной работе приводим полное описание отображений класса IL^1_ν, где ν — хаусдорфова размерность $\mathbb{G}$, т. е. получаем полное описание измеримых отображений областей групп Карно, индуцирующих в смысле определения 1 изоморфизмы пространств Соболева L^1_ν, в [6] исследован случай $p \neq \nu$, общая схема изложена в [7]. Основной результат настоящей работы сформулирован в следующем утверждении (см. определения основных понятий после формулировки теоремы).

Теорема 2. *Пусть D, D' — области на группе Карно $\mathbb{G}$, а ν — хаусдорфова размерность $\mathbb{G}$. Измеримое отображение $\varphi : D \to D'$ принадлежит классу IL^1_ν тогда и только тогда, когда φ совпадает почти всюду с некоторым квазиконформным отображением $\Phi : D \setminus \{x_0\} \to \mathbb{G}$, для которого области $\Phi(D \setminus \{x_0\})$ и D' $(1,\nu)$-эквивалентны, где $x_0 \in \overline{\mathbb{G}}$ — некоторая точка (здесь $\overline{\mathbb{G}}$ — одноточечная компактификация $\mathbb{G}$)*[1)].

Определение 3. Гомеоморфизм $\Phi : D \to D'$ класса $W^1_{\nu,\mathrm{loc}}$ называется *квазиконформным*, если существует постоянная K такая, что $|D\Phi(x)|^\nu \leq K|J(x,\Phi)|$ п. в. в D, где $D\Phi(x)$ — аппроксимативный дифференциал [8] отображения Φ, а $J(x,\Phi) = \det D\Phi(x)$.

Определение 4. Два открытых множества D_1 и D_2 называются $(1,p)$-*эквивалентными*, если операторы ограничения $r_i : L^1_p(D_1 \cup D_2) \to L^1_p(D_i)$, $r_i(f) = f|_{D_i}$, где $f \in L^1_p(D_1 \cup D_2)$, являются изоморфизмами.

Это определение эквивалентно определению из [9], а также определению из [6].

Определение 5 [6, определение 2]. Два открытых множества D_1 и D_2 называются $(1,p)$-*эквивалентными*, если операторы ограничения $r_i : L^1_p(D_i) \to L^1_p(D_1 \cap D_2)$, $r_i(f) = f|_{D_1 \cap D_2}$, где $f \in L^1_p(D_i)$, таковы, что $r_2^{-1} \circ r_1$, $r_1^{-1} \circ r_2$ являются изоморфизмами[2)].

В евклидовом пространстве теорема, аналогичная теореме 2, доказана в [1] при условии, что область D' ограничена. Свойства $(1,p)$-эквивалентных областей исследованы в евклидовом пространстве в [9], на группе Карно — в [10].

Основу полученного в настоящей работе доказательства теоремы 2 составляет метод из [5] с существенными добавлениями, неизбежными для приведенной в работе ситуации: в [5] в качестве областей D и D' рассматривается евклидово пространство $\mathbb{R}^n$, а в качестве пространства функций — подходящее нормированное функциональное пространство.

Заметим, что классы отображений IL^1_p при $p \neq \nu$ полностью исследованы в [6], где также приведены детальная история данного вопроса и подробная

---

1) Отметим, что в [6] формулировка этой теоремы содержит опечатку: вместо «для которой области $\Phi(D)$ и D' $(1,\nu)$-эквивалентны» написано «для которой пространства Соболева $L^1_\nu(\Phi(D))$ и $L^1_\nu(D')$ $(1,\nu)$-эквивалентны».

2) В [6] в этом определении содержится опечатка: вместо «таковы, что $r_2^{-1} \circ r_1$, $r_1^{-1} \circ r_2$ являются изоморфизмами» написано «являются изоморфизмами».

библиография. Для сравнения с теоремой 2 сформулируем основной результат из [6].

Теорема 6 [6, теорема 1]. *Пусть $p \geq 1$, $p \neq \nu$, и D, D' — области на группе Карно $\mathbb{G}$ (здесь ν — хаусдорфова размерность $\mathbb{G}$). Измеримое отображение $\varphi : D \to D'$ принадлежит классу IL_p^1 тогда и только тогда, когда φ совпадает почти всюду с некоторой квазиизометрией $\Phi : D \to \Phi(D)$, для которой области $\Phi(D)$ и D' $(1,p)$-эквивалентны*[3]*.*

1. Предварительные сведения

1.1. Пространства Соболева на группе Карно. Группа Карно $\mathbb{G}$ — это связная односвязная стратифицированная нильпотентная группа Ли. Это означает, что алгебра Ли $\mathfrak{g}$ группы $\mathbb{G}$ раскладывается в прямую сумму векторных подпространств: $\mathfrak{g} = V_1 \oplus \dots \oplus V_m$ таких, что $[V_1, V_j] = V_{j+1}$ для $j = 1, \dots, m-1$, а $[V_1, V_m] = \{0\}$. Далее используем обозначение $n = n_1$. Пусть $X_1, \dots, X_n$ — векторные поля, составляющие базис горизонтального подпространства V_1. Абсолютно непрерывная кусочно гладкая кривая $\gamma : [a, b] \to \mathbb{G}$, касательный вектор $\dot\gamma(t)$ которой принадлежит V_1 для п. в. $t \in [a, b]$, называется *горизонтальной* кривой. *Длина* горизонтальной кривой $\gamma : [a, b] \to \mathbb{G}$ выражается интегралом $l(\gamma) = \int\limits_a^b |\dot\gamma(t)|\, dt$ (здесь $|\dot\gamma(t)|$ — длина касательного вектора, базис $X_1, \dots, X_n$ предполагается ортонормированным).

Определение 7. *Метрика Карно — Каратеодори* $d(x, y)$ на группе $\mathbb{G}$ — это точная нижняя грань длин всех горизонтальных кривых, соединяющих точки x и y.

Далее рассматриваем семейство Γ_j интегральных кривых базисного горизонтального векторного поля X_j, образующих гладкое слоение открытого множества $A \subset \mathbb{G}$. Если соответствующий этому полю поток обозначить символом g_s, то слой имеет вид $\gamma(s) = g_s(p)$, где p принадлежит поверхности S_j, трансверсальной к векторному полю X_j, а параметр s берется из интервала $I \subset \mathbb{R}$. Для слоения, определяемого векторным полем X_j, мера $d\gamma$ может быть получена как внутреннее умножение $i(X_j)$ векторного поля X_j с биинвариантной формой объема dx. Если $\mathbb{J}_{g_s}$ — якобиан потока g_s, то

$$g_s^* i(X_j)\, dx = \mathbb{J}_{g_s} i(X_j)\, dx \quad \text{или} \quad g_s^*(\mathbb{J}_{g_{-s}} i(X_j)\, dx) = i(X_j)\, dx.$$

Поскольку поток g_s переводит касательный вектор к однопараметрическому семейству кривых γ_t в касательный вектор к тому же семейству, форма $\mathbb{J}_{g_{-s}} i(V)\, dx$ определяет меру $d\gamma$ на слоении Γ_j. Так как X_j — левоинвариантное горизонтальное векторное поле, поток g_s есть правый сдвиг на $\exp sX_j$: $\mathbb{G} \ni p \mapsto p \exp sX_j$. В силу того, что dx — биинвариантная форма, имеем $\mathbb{J}_{g_s} = 1$. Используя левоинвариантность и однородность относительно растяжений, находим

$$\int\limits_{\gamma \cap B(x,r) \neq \varnothing} d\gamma = c|B(x, r)|^{\frac{\nu-1}{\nu}}.$$

Отсюда можно вывести теорему Фубини, применяемую ниже.

[3] Отметим, что в [6] формулировка этой теоремы содержит опечатку: вместо «для которой области $\Phi(D)$ и D' $(1,p)$-эквивалентны» написано «для которой пространства Соболева $L_p^1(\Phi(D))$ и $L_p^1(D')$ $(1,p)$-эквивалентны».

Пространство Соболева $L^1_p(D)$ состоит из локально интегрируемых функций $f : D \to \mathbb{R}$, имеющих обобщенные производные $X_i f \in L_p(D)$, $i = 1, \dots, n$. Полунорма в $L^1_p(D)$ определяется как величина

$$\big\|f \mid L^1_p(D)\big\| = \|\nabla_{\mathscr{L}} f \mid L_p(D)\| = \bigg(\int\limits_D |\nabla_{\mathscr{L}} f(x)|^p\,dx\bigg)^{\frac{1}{p}},$$

где $\nabla_{\mathscr{L}} f(x) = (X_1 f(x), \dots, X_n f(x))$ — обобщенный субградиент функции f в точке $x \in D$, а $|\nabla_{\mathscr{L}} f(x)| = \sqrt{(X_1 f(x))^2 + \dots + (X_n f(x))^2}$. Пространство Соболева $W^1_p(D)$ состоит из локально суммируемых функций, имеющих конечную норму

$$\big\|f \mid W^1_p(D)\big\| = \|f \mid L_p(D)\| + \|\nabla_{\mathscr{L}} f \mid L_p(D)\|.$$

Будем говорить, что f *принадлежит* $W^1_{p,\mathrm{loc}}(D)$, если $f \in W^1_p(V)$ для любой ограниченной подобласти $V \subset D$ такой, что $\overline{V} \subset D$ (в обозначениях $V \Subset D$).

Будем говорить (см. [11]), что отображение $\varphi : D \to \mathbb{G}$ *принадлежит классу* $W^1_{p,\mathrm{loc}}(D; \mathbb{G})$, если выполнены следующие условия.

(A) Для всякого $z \in \mathbb{G}$ функция $[\varphi]_z : D \ni x \mapsto d(\varphi(x), z)$ принадлежит классу $W^1_{p,\mathrm{loc}}(D)$.

(B) Семейство субградиентов $(\nabla_{\mathscr{L}} [\varphi]_z)_{z\in\mathbb{G}}$ имеет *мажоранту*, принадлежащую $L_{p,\mathrm{loc}}(D)$, т. е. существует функция $g \in L_{p,\mathrm{loc}}(D)$, не зависящая от z, такая, что $|\nabla_{\mathscr{L}} [\varphi]_z(x)| \le g(x)$ для почти всех $x \in D$.

В [8] отражена специфика этого определения применительно к отображениям классов Соболева на группе Карно. В частности, приводится *эквивалентное* описание отображений классов Соболева: отображение $\varphi : D \to \mathbb{G}$ принадлежит $W^1_{p,\mathrm{loc}}(D)$ тогда и только тогда, когда его можно изменить на множестве нулевой меры так, что

1) для всякого $z \in \mathbb{G}$ функция $[\varphi]_z : D \ni x \mapsto d(\varphi(x), z)$ принадлежит классу $L_{p,\mathrm{loc}}(D)$,

2) отображение $\varphi : D \to \mathbb{G}$ *абсолютно непрерывно* на почти всех интегральных линиях горизонтальных векторных полей X_j, $j = 1, \dots, n$, ($\varphi \in ACL(D)$),

3) производная $X_j\varphi(x) = \lim\limits_{t\to 0} \delta_{t^{-1}}(\varphi(x)^{-1}\varphi(\exp tX_j))$ существует п. в. в открытом множестве D, принадлежит $V_1(\varphi(x))$ и, кроме того, $|X_j\varphi| \in L_{p,\mathrm{loc}}(D)$ для всех j.

Напомним, что отображение $\varphi : D \to \mathbb{G}$ называется *абсолютно непрерывным* на почти всех интегральных линиях базисных горизонтальных векторных полей X_j, $j = 1, \dots, n$, если для любой области $U \Subset D$ и слоения Γ_j, определяемого векторным полем X_j ($j = 1, \dots, n$), отображение φ абсолютно непрерывно на пересечении $\gamma \cap U$ относительно одномерной меры Хаусдорфа для $d\gamma$-почти всех кривых $\gamma \in \Gamma_j$. Для такого отображения почти всюду в D существуют производные $X_j\varphi$ ($j = 1, \dots, n$) (см. различные доказательства этого факта в [12–14]).

Обозначим символом $D\varphi$ аппроксимативный дифференциал отображения φ [8], а символом $D_h\varphi$ — горизонтальную часть дифференциала. Якобиан $\det D\varphi$ отображения φ обозначим символом $J(x, \varphi)$.

Имеет место следующая формула замены переменных.

Предложение 8 [8, следствие 5.1; 15]. *Пусть отображение $\varphi : A \to \mathbb{G}$, где $A \subset \mathbb{G}$ — измеримое множество, имеет аппроксимативные частные производные на A. Тогда существует множество $\Sigma_\varphi \subset A$ меры 0 такое, что формула* *замены переменных в интеграле Лебега для любой неотрицательной измеримой функции $f : A \to \mathbb{R}$ имеет вид*

$$\int\limits_A f(x)|J(x,\varphi)|\,dx = \int\limits_{\mathbb{G}} \Big(\sum_{x\in\varphi^{-1}(y)\cap(A\setminus\Sigma_\varphi)} f(x)\Big)\,dy. \tag{3}$$

1.2. Области Джона и неравенство Пуанкаре. В этом пункте применяем неравенство Пуанкаре в областях Джона на группе Карно, доказанное в [16] (более ранние результаты установлены в [17–20]). Более того, это неравенство потребуется нам далее в некоторой специальной модификации (см. ниже лемму 12).

Определение 9 [21]. Собственная область $\Omega \subset \mathbb{G}$ называется *областью Джона $J_{\alpha,\beta}$* (коротко $\Omega \in J_{\alpha,\beta}$), $0 < \alpha \le \beta$, если найдется точка $x_0 \in \Omega$ такая, что любую точку $x \in \Omega$ можно соединить с x_0 спрямляемой кривой γ, которая содержится в Ω и удовлетворяет следующим условиям: если $s \in [0,l]$ — натуральная параметризация кривой γ ($\gamma(0) = x$, $\gamma(l) = x_0$), то

$$l \le \beta \quad \text{и} \quad \operatorname{dist}(\gamma(s), \partial\Omega) \ge \frac{\alpha s}{l} \ \text{ для всех } s \in [0,l]. \tag{4}$$

Лемма 10 [6, лемма 3]. *Пусть D — произвольная область в $\mathbb{G}$ и шары B_0, B_1 содержатся в этой области. Тогда найдется область Джона $\Omega \in J_{\alpha,\beta}$, $\Omega \subset D$, с некоторыми параметрами α, β, зависящими от области D и шаров B_0, B_1, которая будет содержать оба этих шара.*

Замечание 11. Из доказательства леммы 3 в [6] получаем следующее свойство: если $\operatorname{dist}(\partial D, B_0) > 0$ и $\operatorname{dist}(\partial D, B_1) > 0$, то для достаточно малого параметра $\lambda > 0$ можно построить дополнительную область Джона Ω_λ такую, что $\Omega \Subset \Omega_\lambda \Subset D$, т. е. области Ω, Ω_λ ограниченные и $\operatorname{dist}(\partial D, \Omega_\lambda) > 0$, $\operatorname{dist}(\partial\Omega, \Omega_\lambda) > 0$. Действительно, идея доказательства леммы 3 из [6] состоит в построении спрямляемой кривой Γ, содержащейся в области D и соединяющей центры шаров B_0, B_1. Область Джона Ω строится как совокупность шаров с центрами на кривой Γ с радиусами, не превышающими $\frac12 \operatorname{dist}(\Gamma, \partial D)$. Область Ω_λ можно построить как объединение шаров с теми же центрами, увеличив при этом радиус. В качестве такого радиуса можно взять любое значение в интервале $\big(\frac12 \operatorname{dist}(\Gamma, \partial D), \frac34 \operatorname{dist}(\Gamma, \partial D)\big)$.

Лемма 12 [6, лемма 4]. *Пусть U — область Джона $J_{\alpha,\beta}$ и подмножество $F \subset U$ имеет положительную меру, $|F| > 0$. Тогда для всех $u(x) \in W^1_p(U)$, $p \le q \le \frac{\nu p}{\nu - p}$, $p < \nu$ ($p \le q < \infty$ при $p = \nu$), таких, что $u|_F = 0$, выполняется неравенство*

$$\Big(\int\limits_U |u(x)|^q\,dx\Big)^{\frac1q} \le C\frac{|U|^{\frac1q}}{|F|^{\frac1q}}\Big(\frac{\alpha}{\beta}\Big)^{\nu} (\operatorname{diam} U)^{1-\frac{\nu}{p}+\frac{\nu}{q}} \Big(\int\limits_U |\nabla u(x)|^p\,dx\Big)^{\frac1p}. \tag{5}$$

1.3. Свойства отображений класса IL^1_p. Для отображений класса IL^1_p в [6] установлены следующие свойства.

Предложение 13. 1. *Областью определения отображения φ можно считать множество $T = \bigcup\limits_k T_k$, $|D \setminus T| = 0$, где $\{T_k\}$ — возрастающая по включению* *последовательность ограниченных множеств положительной меры, состоящих из точек положительной плотности.*

2. *Отображение φ непрерывно на каждом из T_k.*

3. *На множестве T для отображения φ выполнены $\mathscr{N}$-свойство и $\mathscr{N}^{-1}$-свойство Лузина.*

4. *Отображение $\varphi : T \to D'$ инъективно.*

5. *Образ $\varphi(T)$ всюду плотен в D' и $|D' \setminus \varphi(T)| = 0$.*

Оператор (1) распространяется на $L^1_p(D)$ с сохранением свойств оператора композиции.

Лемма 14 [6, лемма 10]. *Пусть измеримое отображение $\varphi : D \to D'$ принадлежит классу IL^1_p. Тогда оператор $\varphi* : L^1_p(D') \cap C^\infty(D') \to L^1_p(D)$ продолжается по непрерывности до оператора $\widetilde{\varphi*} : L^1_p(D') \to L^1_p(D)$ и обладает следующими свойствами:*

1) *значение оператора $\widetilde{\varphi*} : L^1_p(D') \to L^1_p(D)$ на классах $[f] \in L^1_p(D')$ можно найти по формуле*

$$\widetilde{\varphi^*}([f]) = \begin{cases} f \circ \varphi & \text{при } p \le \nu, \text{ где } f \text{ — произвольный представитель класса } [f], \\ \tilde{f} \circ \varphi & \text{при } p > \nu, \text{ где } \tilde{f} \text{ — непрерывный представитель класса } [f]; \end{cases}$$

2) $K^{-1}\|f \mid L^1_p(D')\| \le \|\widetilde{\varphi^*}(f) \mid L^1_p(D)\| \le K\|f \mid L^1_p(D')\|$;

3) $\widetilde{\varphi^*} : L^1_p(D') \to L^1_p(D)$ — *изоморфизм.*

2. Пространство $L^1_{\nu,F}$

Всюду далее изучаем отображение $\varphi : D \to D'$ класса IL^1_ν. Всякое такое отображение обладает свойствами, сформулированными в п. 1.3.

Фиксируем $k_0 \in \mathbb{N}$ и замкнутое множество положительной меры $F \subset T_{k_0}$ без изолированных точек. Можно считать, что $F \subset B_F$, где $B_F \subset D$ — некоторый шар. В силу замечания 15 из [6] можно также предполагать, что отображение $\varphi : F \to \varphi(F)$ билипшицево. Такой выбор обеспечивает для образа $\varphi(F)$ выполнение тех же свойств, которые выполнены для множества F: образ $\varphi(F)$ замкнут, не имеет изолированных точек, и его мера положительна.

Рассмотрим совокупность функций

$$L^1_{\nu,F}(D) = \big\{u \in L^1_\nu(D) : u(x) = 0 \text{ для п. в. } x \in F\big\}.$$

Заметим, что $L^1_{\nu,F}(D)$ является замкнутым подпространством в $L^1_\nu(D)$ и нормированным пространством с нормой $\|u \mid L^1_{\nu,F}(D)\| = \|u \mid L^1_\nu(D)\|$. Последнее легко показать с помощью леммы 12. Следовательно, $L^1_{\nu,F}(D)$ — банахово пространство.

Аналогично предыдущему определим еще одно банахово пространство

$$L^1_{\nu,\varphi(F)}(D') = \big\{v \in L^1_\nu(D') : v(y) = 0 \text{ для п. в. } y \in \varphi(F)\big\}.$$

С помощью предложения 13 и леммы 14 можно проверить, что $f \in L^1_{\nu,\varphi(F)}(D')$ тогда и только тогда, когда $f \circ \varphi \in L^1_{\nu,F}(D)$. Следовательно, оператор

$$\varphi^*_F : L^1_{\nu,\varphi(F)}(D') \to L^1_{\nu,F}(D), \quad \varphi^*_F(f) = f \circ \varphi, \quad f \in L^1_{\nu,\varphi(F)}(D')$$

является изоморфизмом.

Применение пространств $L^1_{\nu,F}$ позволит установить существование квазинепрерывного представителя для отображения φ.

Введем обозначения $D_F = D \setminus F$ и $D'_F = D' \setminus \varphi(F)$.

3. Емкость

В этом разделе приведем основные свойства емкости в пространствах Соболева, которые помогут в изучении дальнейших свойств отображения φ.

3.1. Емкость в пространстве $L^1_{\nu,F}(D)$ и ее свойства. Приведем понятие емкости в пространстве $L^1_{\nu,F}(D)$ и свойства, которые потребуются в дальнейшем. Близкое изложение применительно к другим пространствам функций в разд. 3, пп. 4.1, 4.2 см. в [5, § 6; 10, § 6; 22]. Для удобства читателя мы приводим его полностью. В скобках даем ссылки на работы, содержащие утверждения, близкие по содержанию к формулируемым в настоящей статье.

Емкостью $\operatorname{Cap}\bigl(K; L^1_{\nu,F}(D)\bigr)$ компакта $K \subset D_F$ в пространстве $L^1_{\nu,F}(D)$ называется величина

$$\operatorname{Cap}\bigl(K; L^1_{\nu,F}(D)\bigr) = \inf \bigl\| g \mid L^1_{\nu,F}(D) \bigr\|^{\nu}, \tag{6}$$

где точная нижняя грань берется по всем непрерывным функциям $g \in L^1_{\nu,F}(D)$ таким, что $g \geq 1$ на K.

Замечание 15. Точная нижняя грань в (6) не изменится, если рассматривать *неотрицательные* непрерывные функции из $L^1_{\nu,F}(D)$ такие, что $g > 1$ на K.

Для произвольного множества $E \subset D_F$ его *внутренняя емкость* определяется как

$$\underline{\operatorname{Cap}}\bigl(E; L^1_{\nu,F}(D)\bigr) = \sup\bigl\{\operatorname{Cap}\bigl(K; L^1_{\nu,F}(D)\bigr) : K \subset E,\ K \text{ компактно}\bigr\},$$

а его *внешняя емкость* — как

$$\overline{\operatorname{Cap}}\bigl(E; L^1_{\nu,F}(D)\bigr) = \inf\bigl\{\underline{\operatorname{Cap}}\bigl(U; L^1_{\nu,F}(D)\bigr) : E \subset U,\ U \subset D_F \text{ открыто}\bigr\}.$$

В следующей лемме сформулированы основные свойства емкости.

Лемма 16 [10, теорема 6.1; 5, лемма 6.1]. *Емкость в пространстве $L^1_{\nu,F}(D)$ обладает следующими свойствами.*

1. *Если множество $K \subset D_F$ компактно, то для любого $\varepsilon > 0$ существует открытое множество $U_\varepsilon \subset D_F$ такое, что $K \subset U_\varepsilon$ и для всякого компакта $K' \subset U_\varepsilon$*

$$\operatorname{Cap}\bigl(K'; L^1_{\nu,F}(D)\bigr) \leq \operatorname{Cap}\bigl(K; L^1_{\nu,F}(D)\bigr) + \varepsilon.$$

2. *Если $E \subset E'$, то*

$$\underline{\operatorname{Cap}}\bigl(E; L^1_{\nu,F}(D)\bigr) \leq \underline{\operatorname{Cap}}\bigl(E'; L^1_{\nu,F}(D)\bigr), \quad \overline{\operatorname{Cap}}\bigl(E; L^1_{\nu,F}(D)\bigr) \leq \overline{\operatorname{Cap}}\bigl(E'; L^1_{\nu,F}(D)\bigr).$$

3. *Пусть $K_1, K_2 \subset D_F$ — компактные множества, тогда*

$$\operatorname{Cap}\bigl(K_1 \cup K_2; L^1_{\nu,F}(D)\bigr) + \operatorname{Cap}\bigl(K_1 \cap K_2; L^1_{\nu,F}(D)\bigr) \\ \leq \operatorname{Cap}\bigl(K_1; L^1_{\nu,F}(D)\bigr) + \operatorname{Cap}\bigl(K_2; L^1_{\nu,F}(D)\bigr).$$

4. *Пусть $E_1, \dots, E_k \subset D_F$, $F_i \subset E_i$, $\overline{\operatorname{Cap}}\left(\bigcup\limits_{i=1}^{k} F_i; L^1_{\nu,F}(D)\right) < \infty$. Тогда*

$$\overline{\operatorname{Cap}}\left(\bigcup_{i=1}^{k} E_i; L^1_{\nu,F}(D)\right) - \overline{\operatorname{Cap}}\left(\bigcup_{i=1}^{k} F_i; L^1_{\nu,F}(D)\right) \\ \leq \sum_{i=1}^{k} \bigl(\overline{\operatorname{Cap}}\bigl(E_i; L^1_{\nu,F}(D)\bigr) - \overline{\operatorname{Cap}}\bigl(F_i; L^1_{\nu,F}(D)\bigr)\bigr).$$

5. *Для всякой возрастающей последовательности множеств* $E_1 \subset E_2 \subset \dots \subset E_k \subset \dots \subset D_F$ *справедливо*

$$\overline{\mathrm{Cap}}\Bigg(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k; L^1_{\nu,F}(D)\Bigg) = \lim_{k\to\infty} \overline{\mathrm{Cap}}\big(E_k; L^1_{\nu,F}(D)\big).$$

6. *Пусть* $\{E_k\} \subset D_F$, $k \in \mathbb{N}$, — *последовательность множеств,* $E = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} E_k$. *Тогда*

$$\overline{\mathrm{Cap}}\big(E; L^1_{\nu,F}(D)\big) \le \sum_{k=1}^{\infty} \overline{\mathrm{Cap}}\big(E_k; L^1_{\nu,F}(D)\big).$$

Доказательство. 1. По определению емкости найдется непрерывная функция $u \in L^1_{\nu,F}(D)$ такая, что $u > 1$ на K (см. замечание 15) и $\|u \mid L^1_{\nu,F}(D)\|^\nu \le \mathrm{Cap}\big(K; L^1_{\nu,F}(D)\big) + \varepsilon$. Определим множество $U_\varepsilon = \{x \in D_F : u(x) > 1\}$. Тогда U_ε открыто, $K \subset U_\varepsilon$ и $u > 1$ на любом компакте $K' \subset U_\varepsilon$. Отсюда получаем

$$\mathrm{Cap}\big(K'; L^1_{\nu,F}(D)\big) \le \|u \mid L^1_{\nu,F}(D)\|^\nu \le \mathrm{Cap}\big(K; L^1_{\nu,F}(D)\big) + \varepsilon.$$

2. Если E, E' — компактные множества, то

$$\mathrm{Cap}\big(E; L^1_{\nu,F}(D)\big) \le \|g \mid L^1_{\nu,F}(D)\|^\nu$$

для любой непрерывной функции $g \in L^1_{\nu,F}(D)$ такой, что $u > 1$ на E' (см. замечание 15), и, следовательно, $\mathrm{Cap}\big(E; L^1_{\nu,F}(D)\big) \le \mathrm{Cap}\big(E'; L^1_{\nu,F}(D)\big)$.

Для произвольных множеств имеем

$$\begin{aligned}\underline{\mathrm{Cap}}\big(E; L^1_{\nu,F}(D)\big) &= \sup_{K\subset E} \mathrm{Cap}\big(K; L^1_{\nu,F}(D)\big) \\ &\le \sup_{K\subset E'} \mathrm{Cap}\big(K; L^1_{\nu,F}(D)\big) = \underline{\mathrm{Cap}}\big(E'; L^1_{\nu,F}(D)\big),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overline{\mathrm{Cap}}\big(E; L^1_{\nu,F}(D)\big) &= \inf_{E\subset U} \underline{\mathrm{Cap}}\big(U; L^1_{\nu,F}(D)\big) \\ &\le \inf_{E'\subset U} \underline{\mathrm{Cap}}\big(U; L^1_{\nu,F}(D)\big) = \overline{\mathrm{Cap}}\big(E'; L^1_{\nu,F}(D)\big),\end{aligned}$$

где супремумы берутся по компактным множествам, а инфимумы — по открытым.

3. Рассмотрим непрерывные функции $g_1, g_2 \in L^1_{\nu,F}(D)$ такие, что $g_i \ge 1$ на K_i, $i = 1, 2$. Тогда функции $\min(g_1, g_2)$ и $\max(g_1, g_2)$ непрерывны, принадлежат $L^1_{\nu,F}(D)$, $\min(g_1, g_2) \ge 1$ на $K_1 \cap K_2$, $\max(g_1, g_2) \ge 1$ на $K_1 \cup K_2$ и выполнено неравенство

$$\begin{aligned}&\|\min(g_1, g_2) \mid L^1_{\nu,F}(D)\|^\nu + \|\max(g_1, g_2) \mid L^1_{\nu,F}(D)\|^\nu \\ &\qquad\le \|g_1 \mid L^1_{\nu,F}(D)\|^\nu + \|g_1 \mid L^1_{\nu,F}(D)\|^\nu.\end{aligned}$$

Отсюда получаем

$$\begin{aligned}&\mathrm{Cap}\big(K_1 \cup K_2; L^1_{\nu,F}(D)\big) + \mathrm{Cap}\big(K_1 \cap K_2; L^1_{\nu,F}(D)\big) \\ &\qquad\le \|\min(g_1, g_2) \mid L^1_{\nu,F}(D)\|^\nu + \|\max(g_1, g_2) \mid L^1_{\nu,F}(D)\|^\nu \\ &\qquad\qquad\le \|g_1 \mid L^1_{\nu,F}(D)\|^\nu + \|g_2 \mid L^1_{\nu,F}(D)\|^\nu.\end{aligned}$$

Переходя в последнем неравенстве к инфимуму по всем допустимым функциям g_1, g_2, получаем требуемое.

4. Сначала по индукции докажем соотношение для компактных множеств. Если $k = 1$, то неравенство очевидно. Пусть оно выполнено для j множеств, т. е.

$$\overline{\mathrm{Cap}}\Big(\bigcup_{i=1}^{j} E_i; L^1_{\nu,F}(D)\Big) - \overline{\mathrm{Cap}}\Big(\bigcup_{i=1}^{j} F_i; L^1_{\nu,F}(D)\Big) \\ \le \sum_{i=1}^{j}\big(\overline{\mathrm{Cap}}\big(E_i; L^1_{\nu,F}(D)\big) - \overline{\mathrm{Cap}}\big(F_i; L^1_{\nu,F}(D)\big)\big).$$

Пусть $F_{j+1} \subset E_{j+1}$. Обозначим $A = \bigcup\limits_{i=1}^{j} E_i$, $B = \bigcup\limits_{i=1}^{j} F_i$. Применяя свойство 3 для пар компактных множеств A, E_{j+1} и B, F_{j+1}, получаем

$$\mathrm{Cap}\big(A \cup E_{j+1}; L^1_{\nu,F}(D)\big) - \mathrm{Cap}\big(B \cup F_{j+1}; L^1_{\nu,F}(D)\big) \\ + \mathrm{Cap}\big(A \cap E_{j+1}; L^1_{\nu,F}(D)\big) - \mathrm{Cap}\big(B \cap F_{j+1}; L^1_{\nu,F}(D)\big) \\ \le \mathrm{Cap}\big(A; L^1_{\nu,F}(D)\big) + \mathrm{Cap}\big(E_{j+1}; L^1_{\nu,F}(D)\big) \\ - \mathrm{Cap}\big(B; L^1_{\nu,F}(D)\big) - \mathrm{Cap}\big(F_{j+1}; L^1_{\nu,F}(D)\big).$$

Поскольку $B \cap F_{j+1} \subset A \cap E_{j+1}$, по свойству 2 получаем

$$\mathrm{Cap}\big(A \cup E_{j+1}; L^1_{\nu,F}(D)\big) - \mathrm{Cap}\big(B \cup F_{j+1}; L^1_{\nu,F}(D)\big) \\ \le \mathrm{Cap}\big(A; L^1_{\nu,F}(D)\big) + \mathrm{Cap}\big(E_{j+1}; L^1_{\nu,F}(D)\big) \\ - \mathrm{Cap}\big(B; L^1_{\nu,F}(D)\big) - \mathrm{Cap}\big(F_{j+1}; L^1_{\nu,F}(D)\big).$$

По индукционному предположению имеем

$$\mathrm{Cap}\big(A \cup E_{j+1}; L^1_{\nu,F}(D)\big) - \mathrm{Cap}\big(B \cup F_{j+1}; L^1_{\nu,F}(D)\big) \\ \le \sum_{i=1}^{j}\big(\overline{\mathrm{Cap}}\big(E_i; L^1_{\nu,F}(D)\big) - \overline{\mathrm{Cap}}\big(F_i; L^1_{\nu,F}(D)\big)\big) \\ + \mathrm{Cap}\big(E_{j+1}; L^1_{\nu,F}(D)\big) - \mathrm{Cap}\big(F_{j+1}; L^1_{\nu,F}(D)\big).$$

Следовательно, свойство 4 доказано для компактных множеств.

В случае, когда E_i, F_i являются открытыми множествами, используется следующий факт: если $K \subset \bigcup\limits_{i=1}^{k} E_i$ и $C_i \subset F_i$ — компактные подмножества, $\bigcup\limits_{i=1}^{k} C_i \subset K$, то компактное множество $K_j = K \setminus \bigcup\limits_{i=1,\, i\ne j}^{k} E_i$ есть подмножество E_j и содержит C_j. Кроме того, $K = \bigcup\limits_{i=1}^{k} K_i$. Тогда

$$\overline{\mathrm{Cap}}\Big(\bigcup_{i=1}^{k} E_i; L^1_{\nu,F}(D)\Big) - \overline{\mathrm{Cap}}\Big(\bigcup_{i=1}^{k} F_i; L^1_{\nu,F}(D)\Big) \\ \le \mathrm{Cap}\big(K; L^1_{\nu,F}(D)\big) - \mathrm{Cap}\Big(\bigcup_{i=1}^{k} C_i; L^1_{\nu,F}(D)\Big)$$

$$= \operatorname{Cap}\Bigl(\bigcup_{i=1}^{k} K_i; L^1_{\nu,F}(D)\Bigr) - \operatorname{Cap}\Bigl(\bigcup_{i=1}^{k} C_i; L^1_{\nu,F}(D)\Bigr)$$
$$\le \sum_{i=1}^{k}\bigl(\operatorname{Cap}(K_i; L^1_{\nu,F}(D)) - \operatorname{Cap}(C_i; L^1_{\nu,F}(D))\bigr).$$

Переходя в последнем выражении к супремумам по K_i и C_i, получаем требуемое.

Имея свойство 4 для компактных и открытых множеств, можно получить его для произвольных.

5. Обозначим $E = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} E_k$. Используя свойство 2, имеем неравенство

$$\overline{\operatorname{Cap}}\bigl(E; L^1_{\nu,F}(D)\bigr) \ge \lim_{k\to\infty} \overline{\operatorname{Cap}}\bigl(E_k; L^1_{\nu,F}(D)\bigr).$$

Докажем обратное неравенство. Можно считать, что $\overline{\operatorname{Cap}}\bigl(E_k; L^1_{\nu,F}(D)\bigr) < \infty$ для любого k (если это не так, то обратное неравенство, очевидно выполняется). Фиксируем $\varepsilon > 0$ и выбираем такое открытое множество U_k, что $E_k \subset U_k \subset D_F$ и

$$\overline{\operatorname{Cap}}\bigl(U_k; L^1_{\nu,F}(D)\bigr) \le \overline{\operatorname{Cap}}\bigl(E_k; L^1_{\nu,F}(D)\bigr) + 2^{-k}\varepsilon.$$

Поскольку $\overline{\operatorname{Cap}}\Bigl(\bigcup\limits_{k=1}^{n} E_k; L^1_{\nu,F}(D)\Bigr) = \overline{\operatorname{Cap}}\bigl(E_n; L^1_{\nu,F}(D)\bigr) < \infty$ для каждого номера n, по свойству 4

$$\overline{\operatorname{Cap}}\Bigl(\bigcup_{k=1}^{n} U_k; L^1_{\nu,F}(D)\Bigr) - \overline{\operatorname{Cap}}\Bigl(\bigcup_{k=1}^{n} E_k; L^1_{\nu,F}(D)\Bigr) \le \sum_{k=1}^{n} 2^{-k}\varepsilon < \varepsilon.$$

Если K — компактное множество в $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} U_k$, то для некоторого n имеем $K \subset \bigcup\limits_{k=1}^{n} U_k$, откуда получаем

$$\operatorname{Cap}\bigl(K; L^1_{\nu,F}(D)\bigr) \le \overline{\operatorname{Cap}}\Bigl(\bigcup_{k=1}^{n} U_k; L^1_{\nu,F}(D)\Bigr)$$
$$\le \overline{\operatorname{Cap}}\Bigl(\bigcup_{k=1}^{n} E_k; L^1_{\nu,F}(D)\Bigr) + \varepsilon \le \lim_{k\to\infty} \overline{\operatorname{Cap}}\bigl(E_k; L^1_{\nu,F}(D)\bigr) + \varepsilon.$$

Следовательно,

$$\overline{\operatorname{Cap}}\bigl(E; L^1_{\nu,F}(D)\bigr) \le \overline{\operatorname{Cap}}\Bigl(\bigcup_{k=1}^{n} U_k; L^1_{\nu,F}(D)\Bigr)$$
$$\le \sup_K \operatorname{Cap}\bigl(K; L^1_{\nu,F}(D)\bigr) \le \lim_{k\to\infty} \overline{\operatorname{Cap}}\bigl(E_k; L^1_{\nu,F}(D)\bigr) + \varepsilon,$$

где супремум берется по всем компактным множествам $K \subset \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} U_k$.

6. Из свойства 4 для любого конечного набора верно

$$\overline{\operatorname{Cap}}\Bigl(\bigcup_{k=1}^{n} E_k; L^1_{\nu,F}(D)\Bigr) \le \sum_{k=1}^{n} \overline{\operatorname{Cap}}\bigl(E_k; L^1_{\nu,F}(D)\bigr).$$

Так как совокупность $\bigcup\limits_{k=1}^{n} E_k$ образует возрастающую последовательность, применяя свойство 5, получаем требуемое. $\square$

Множество E называется *измеримым* относительно емкости, если

$$\underline{\mathrm{Cap}}\big(E; L^1_{\nu,F}(D)\big) = \overline{\mathrm{Cap}}\big(E; L^1_{\nu,F}(D)\big).$$

В силу леммы 16 емкость в пространстве $L^1_{\nu,F}(D)$ является емкостью в смысле Шоке [23]. Отсюда вытекает [23], что все аналитические, в частности, борелевские множества измеримы.

Говорят, что некоторое свойство выполняется *квазивсюду*, если оно выполняется всюду, за исключением множества, имеющего нулевую емкость.

Определение 17. Функция $f \in L^1_{\nu,F}(D)$ называется *уточненной*, если существует последовательность $\{f_s\}$, $s \in \mathbb{N}$, функций из $L^1_{\nu,F}(D) \cap C(D)$ такая, что

1) $\big\|f - f_s \mid L^1_{\nu,F}(D)\big\| \to 0$ при $s \to \infty$;

2) для любого положительного $\varepsilon > 0$ найдется открытое множество $U_\varepsilon \subset D_F$ такое, что $\overline{\mathrm{Cap}}(U_\varepsilon) < \varepsilon$ и последовательность f_s сходится к функции f равномерно на $D_F \setminus U_\varepsilon$.

Замечание 18. 1. Всякий элемент пространства $L^1_{\nu,F}(D)$ содержит уточненную функцию (см. [5, следствие 6.4]).

2. Всякая последовательность уточненных функций, сходящаяся в $L^1_{\nu,F}(D)$ к уточненной функции f, содержит подпоследовательность, сходящуюся к f квазивсюду (см. [5, следствие 6.7]).

Лемма 19 [10, лемма 6.4; 5, лемма 6.5]. *Пусть $E \subset D_F$ — произвольное множество и $f \in L^1_{\nu,F}(D)$ — уточненная функция такая, что $|f(x)| \geq \alpha > 0$ квазивсюду на E. Тогда*

$$\overline{\mathrm{Cap}}\big(E; L^1_{\nu,F}(D)\big) \leq \frac{\big\|f \mid L^1_{\nu,F}(D)\big\|^\nu}{\alpha^\nu}.$$

Доказательство. В силу замечания 15 функцию f можно считать неотрицательной. Рассмотрим функцию $g(x) = f(x)/\alpha$. Поскольку g — уточненная функция, существуют последовательность $\big\{g_k \in L^1_{\nu,F}(D) \cap C(D)\big\}$, для которой $\big\|g - g_k \mid L^1_{\nu,F}(D)\big\| \to 0$ при $k \to \infty$, и открытое множество U_ε, $\overline{\mathrm{Cap}}\big(U_\varepsilon; L^1_{\nu,F}(D)\big) \leq \varepsilon$, для произвольного $\varepsilon \in (0,1)$ такие, что на дополнении $D_F \setminus U_\varepsilon$ последовательность $\{g_k\}$ сходится равномерно к g.

Пусть $E_1 = \{x \in D_F : g(x) \geq 1\}$. Тогда $E \subset E_1 \cup E_0$, где E_0 — некоторое множество нулевой емкости. Отсюда

$$\overline{\mathrm{Cap}}\big(E; L^1_{\nu,F}(D)\big) \leq \overline{\mathrm{Cap}}\big(E_1; L^1_{\nu,F}(D)\big) + \overline{\mathrm{Cap}}\big(E_0; L^1_{\nu,F}(D)\big) = \overline{\mathrm{Cap}}\big(E_1; L^1_{\nu,F}(D)\big).$$

Начиная с некоторого номера множества $E_{k,\varepsilon} = \{x \in D_F : g_k(x) > 1 - \varepsilon\}$ содержат множество $E_1 \setminus U_\varepsilon$. Поэтому для больших номеров имеем $\overline{\mathrm{Cap}}\big(E_1 \setminus U_\varepsilon; L^1_{\nu,F}(D)\big) \leq \overline{\mathrm{Cap}}\big(E_{k,\varepsilon}; L^1_{\nu,F}(D)\big)$, откуда

$$\begin{aligned}\overline{\mathrm{Cap}}\big(E; L^1_{\nu,F}(D)\big) &\leq \overline{\mathrm{Cap}}\big(E_1; L^1_{\nu,F}(D)\big) \\ &\leq \overline{\mathrm{Cap}}\big(E_1 \setminus U_\varepsilon; L^1_{\nu,F}(D)\big) + \overline{\mathrm{Cap}}\big(U_\varepsilon; L^1_{\nu,F}(D)\big) \leq \overline{\mathrm{Cap}}\big(E_{k,\varepsilon}; L^1_{\nu,F}(D)\big) + \varepsilon.\end{aligned}$$

Заметим, что $\overline{\mathrm{Cap}}\big(E_{k,\varepsilon}; L^1_{\nu,F}(D)\big) \le \big\| g_k \mid L^1_{\nu,F}(D)\big\|^{\nu}/(1-\varepsilon)^{\nu}$ для любого k. Принимая во внимание равенство $\lim\limits_{k\to\infty}\big\|g_k \mid L^1_{\nu,F}(D)\big\| = \big\|g \mid L^1_{\nu,F}(D)\big\|$, получаем $\overline{\mathrm{Cap}}\big(E; L^1_{\nu,F}(D)\big) \le \frac{\|g \mid L^1_{\nu,F}(D)\|^{\nu}}{(1-\varepsilon)^{\nu}} + \varepsilon$. Так как ε произвольно, то

$$\overline{\mathrm{Cap}}\big(E; L^1_{\nu,F}(D)\big) \le \big\|g \mid L^1_{\nu,F}(D)\big\|^{\nu} = \frac{\big\|f \mid L^1_{\nu,F}(D)\big\|^{\nu}}{\alpha^{\nu}}. \quad \square$$

Следствие 20 [5, следствие 6.6; 10, следствие 6.2]. *Две уточненные функции, принадлежащие одному элементу пространства $L^1_{\nu,F}(D)$, совпадают квазивсюду на D_F.*

Доказательство. Пусть f и g — две уточненные функции, принадлежащие одному элементу пространства $L^1_{\nu,F}(D)$. В частности,

$$\big\|f - g \mid L^1_{\nu,F}(D)\big\| = 0. \tag{7}$$

Обозначим $\Sigma = \{x \in D_F : f(x) \ne g(x)\}$ и $\Sigma_k = \{x \in D_F : |f(x) - g(x)| > 2^{-k}\}$, тогда

$$\Sigma = \bigcup_{k=1}^{\infty} \Sigma_k.$$

По лемме 19 и неравенству (7) для любого $k \in \mathbb{N}$ имеем $\overline{\mathrm{Cap}}\big(\Sigma_k; L^1_{\nu,F}(D)\big) = 0$. В силу счетной полуаддитивности внешней емкости (см. лемму 16) выводим $\overline{\mathrm{Cap}}\big(\Sigma; L^1_{\nu,F}(D)\big) = 0$. $\square$

Определение 21. Для произвольного множества $E \subset D_F$ положим $A(E) = \big\{f \in L^1_{\nu,F}(D) :$ уточненный представитель $\tilde f(x)$ не меньше 1 квазивсюду на $E\big\}$. Функция $f \in A(E)$ называется *допустимой* для множества E.

Лемма 22 [10, лемма 6.5]. *Пусть $E \subset D_F$ — произвольное множество. Совокупность $A(E)$ допустимых функций слабо замкнуто и выпукло в $L^1_{\nu,F}(D)$.*

Доказательство. Если $A(E) = \varnothing$, то доказывать нечего. В противном случае рассмотрим $f, g \in A(E)$ и их соответствующие уточненные функции $\tilde f, \tilde g$. Имеем $\tilde f \ge 1$ и $\tilde g \ge 1$ квазивсюду на E. Для любого $t \in (0,1)$ имеем $t\tilde f + (1-t)\tilde g \ge 1$ квазивсюду на E. Таким образом, $tf + (1-t)g \in A(E)$, и выпуклость $A(E)$ доказана.

Докажем слабую замкнутость $A(E)$. Пусть $\{f_n \in A(E)\}_{n\in\mathbb{N}}$ слабо сходится к $f \in L^1_{\nu,F}(D)$. Используем лемму Мазура для слабо сходящихся последовательностей (см., например, [10, лемма 1.6]): существует некоторая выпуклая комбинация $\{g_k\}_{k\in\mathbb{N}} \in A(E)$, составленная из элементов $f_1, \dots, f_k$, сходящаяся к f в $L^1_{\nu,F}(D)$, т. е. $\big\|f - g_k \mid L^1_{\nu,F}(D)\big\| \to 0$ при $k \to \infty$.

При каждом $k \in \mathbb{N}$ для g_k существует уточненная функция $\tilde g_k$ такая, что $\overline{\mathrm{Cap}}\big(\{x \in E : \tilde g_k < 1\}; L^1_{\nu,F}(D)\big) = 0$. Пусть $\tilde f$ — уточненная функция для f, тогда $\tilde f - \tilde g_k$ также уточненная функция. Для любого $\varepsilon \in (0,1)$ справедливо включение

$$\{x \in E : \tilde f(x) \le 1 - \varepsilon\} \subset \{x \in D_F : |\tilde f(x) - \tilde g_k(x)| \ge \varepsilon\} \cup \bigcup_{i=1}^{\infty}\{x \in E : \tilde g_i(x) < 1\}.$$

Применяя леммы 16 и 19, получаем неравенство

$$\overline{\mathrm{Cap}}\big(\{x \in E : \tilde f(x) \le 1 - \varepsilon\}; L^1_{\nu,F}(D)\big) \le \frac{\big\|g_k - f \mid L^1_{\nu,F}(D)\big\|^{\nu}}{\varepsilon^{\nu}}.$$

Устремляя k к ∞, приходим к соотношению $\overline{\mathrm{Cap}}\big(\{x \in E : \tilde f(x) \le 1-\varepsilon\}; L^1_{\nu,F}(D)\big) = 0$. Далее,

$$\{x \in E : \tilde f(x) < 1\} = \bigcup_{i=1}^{\infty} \{x \in E : \tilde f(x) \le 1 - j^{-1}\},$$

т. е. левая часть равна объединению возрастающей последовательности множеств, имеющих нулевую емкость. Тогда, по п. 5 леммы 16 имеем $\overline{\mathrm{Cap}}\big(\{x \in E : \tilde f(x) < 1\}; L^1_{\nu,F}(D)\big) = 0$. Следовательно, $\tilde f \ge 1$ квазивсюду на E, и $f \in A(E)$. Таким образом, слабая замкнутость $A(E)$ доказана. $\square$

Из леммы 22 получаем

Следствие 23 [10, следствие 6.4]. *Если $E \in D_F$ и $A(E) \ne \varnothing$, то существует единственный элемент $f_E \in A(E)$ такой, что*

$$\big\| f_E \mid L^1_{\nu,F}(D)\big\| = \inf\big\{\big\| f \mid L^1_{\nu,F}(D)\big\| : f \in A(E)\big\}.$$

Доказательство. Обозначим $I = \inf\big\{\big\| f \mid L^1_{\nu,F}(D)\big\| : f \in A(E)\big\}$. Пусть $\{f_k\}_{k\in\mathbb N} \subset A(E)$ — последовательность такая, что $I = \lim\limits_{k\to\infty} \big\| f_k \mid L^1_{\nu,F}(D)\big\|$. Из последовательности $\{f_k\}_{k\in\mathbb N}$ можно выделить слабо сходящуюся подпоследовательность f_{k_j}. Обозначим символом f_E ее слабый предел: $f_E \underset{\text{сл}}{=} \lim\limits_{j\to\infty} f_{k_j}$. По лемме 22 имеем $f_E \in A(E)$. Единственность можно вывести стандартным способом из равномерной выпуклости нормы в пространстве $L^1_{\nu,F}(D)$. $\square$

Следствие 24 [10, следствие 6.5]. *Пусть $\{E_m\}_{m\in\mathbb N}$ — возрастающая последовательность множеств, $E = \bigcup\limits_{m=1}^{\infty} E_m$, $A(E_m) \ne \varnothing$ для всех m. Тогда*

$$A(E) = \bigcap_{m=1}^{\infty} A(E_m), \quad \lim_{m\to\infty} \big\| f_{E_m} \mid L^1_{\nu,F}(D)\big\| = \inf\big\{\big\| f \mid L^1_{\nu,F}(D)\big\| : f \in A(E)\big\}.$$

Доказательство. Заметим, что $A(E_m) \supset A(E_{m+1}) \supset \dots \supset A(E)$, и потому $\big\| f_{E_m} \mid L^1_{\nu,F}(D)\big\| \le \big\| f_{E_{m+1}} \mid L^1_{\nu,F}(D)\big\|$.

Покажем, что $A(E) = \bigcap\limits_{m=1}^{\infty} A(E_m)$. Действительно, включение $A(E) \subset \bigcap\limits_{m=1}^{\infty} A(E_m)$ очевидно. Пусть $f \in L^1_{\nu,F}(D)$ принадлежит $\bigcap\limits_{m=1}^{\infty} A(E_m)$. Тогда для каждого m функция f определяет уточненную функцию $\tilde f_m$ такую, что $\tilde f_m \ge 1$ квазивсюду на E_m. Все такие уточненные функции совпадают квазивсюду на D_F. Определим функцию

$$\tilde f(x) = \begin{cases} \tilde f_1(x), & \text{если } x \in E_1, \\ \tilde f_m(x), & \text{если } x \in E_m \setminus E_{m-1},\ m \ge 2, \\ \tilde f_1(x), & \text{если } x \notin \bigcup\limits_{m=1}^{\infty} E_m. \end{cases}$$

Очевидно, $\tilde f(x)$ совпадает с $\tilde f_1(x)$ квазивсюду на D_F, поэтому является уточненной функцией. Таким образом, для данной функции f нашелся уточненный представитель $\tilde{f}$ такой, что $\tilde{f} \geq 1$ квазивсюду на каждом E_m и, следовательно, $\tilde{f} \geq 1$ квазивсюду на $E = \bigcup\limits_{m=1}^{\infty} E_m$. Окончательно, $f \in A(E)$, поэтому $\bigcap\limits_{m=1}^{\infty} A(E_m) \subset A(E)$.

Если $A(E) = \varnothing$, то $\inf\bigl\{\bigl\|f \mid L^1_{\nu,F}(D)\bigr\| : f \in A(E)\bigr\} = +\infty$. Одновременно $\lim\limits_{m\to\infty}\bigl\|f_{E_m} \mid L^1_{\nu,F}(D)\bigr\| = +\infty$. В противном случае из последовательности $\{f_{E_m}\}_{m\in\mathbb{N}}$ можно было бы извлечь подпоследовательность, слабо сходящуюся к некоторой функции $f_0 \in L^1_{\nu,F}(D)$. Докажем, что $f_0 \in A(E)$. Действительно, нетрудно проверить, что в силу слабой замкнутости $A(E_m)$ имеем $f_0 \in A(E_m)$ для всех $m \in \mathbb{N}$. Отсюда выводим, что $f_0 \geq 1$ квазивсюду на E_m для всех $m \in \mathbb{N}$. Следовательно, $f_0 \geq 1$ квазивсюду на E, поэтому $f_0 \in A(E)$.

Если $A(E) \neq \varnothing$, то $\bigl\|f_{E_m} \mid L^1_{\nu,F}(D)\bigr\| \leq \bigl\|f_E \mid L^1_{\nu,F}(D)\bigr\|$ и $\lim\limits_{m\to\infty}\bigl\|f_{E_m} \mid L^1_{\nu,F}(D)\bigr\| \leq \bigl\|f_E \mid L^1_{\nu,F}(D)\bigr\|$. Допустим, что $\lim\limits_{m\to\infty}\bigl\|f_{E_m} \mid L^1_{\nu,F}(D)\bigr\| < \bigl\|f_E \mid L^1_{\nu,F}(D)\bigr\|$. Извлекая из $\{f_{E_m}\}_{m\in\mathbb{N}}$ подпоследовательность, слабо сходящуюся к $f_0 \in A(E)$, имеем

$$\bigl\|f_0 \mid L^1_{\nu,F}(D)\bigr\| \leq \varliminf_{m\to\infty}\bigl\|f_{E_m} \mid L^1_{\nu,F}(D)\bigr\| < \bigl\|f_E \mid L^1_{\nu,F}(D)\bigr\|,$$

что противоречит экстремальности f_E. $\square$

Теорема 25 [10, теорема 6.4; 5, теорема 6.11]. *Для произвольного множества $E \subset D_F$*

$$\overline{\operatorname{Cap}}\bigl(E; L^1_{\nu,F}(D)\bigr) = \inf\bigl\{\bigl\|f \mid L^1_{\nu,F}(D)\bigr\|^{\nu} : f \in A(E)\bigr\}.$$

Если $A(E) \neq \varnothing$, то найдется функция f_E такая, что

$$\overline{\operatorname{Cap}}\bigl(E; L^1_{\nu,F}(D)\bigr) = \bigl\|f_E \mid L^1_{\nu,F}(D)\bigr\|^{\nu}.$$

Доказательство. Если $f \in A(E)$, то по лемме 19 справедливо неравенство $\overline{\operatorname{Cap}}\bigl(E; L^1_{\nu,F}(D)\bigr) \leq \bigl\|f \mid L^1_{\nu,F}(D)\bigr\|^{\nu}$. Поэтому для произвольного множества E выполнено

$$\overline{\operatorname{Cap}}\bigl(E; L^1_{\nu,F}(D)\bigr) \leq \inf\bigl\{\bigl\|f \mid L^1_{\nu,F}(D)\bigr\|^{\nu} : f \in A(E)\bigr\}.$$

Для компактного множества K из определения емкости получаем

$$\inf\bigl\{\bigl\|f \mid L^1_{\nu,F}(D)\bigr\|^{\nu} : f \in A(K)\bigr\} \leq \operatorname{Cap}\bigl(K; L^1_{\nu,F}(D)\bigr),$$

поскольку справа точная нижняя грань берется по меньшей совокупности функций.

Пусть E — открытое множество и $\{K_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ — возрастающая последовательность компактов такие, что $E = \bigcup\limits_{m=1}^{\infty} K_m$ и $\lim\limits_{m\to\infty}\operatorname{Cap}\bigl(K_m; L^1_{\nu,F}(D)\bigr) = \overline{\operatorname{Cap}}\bigl(E; L^1_{\nu,F}(D)\bigr)$. Тогда из равенства $\operatorname{Cap}\bigl(K_m; L^1_{\nu,F}(D)\bigr) = \bigl\|f_{K_m} \mid L^1_{\nu,F}(D)\bigr\|^{\nu}$ и следствия 24 вытекает, что

$$\overline{\operatorname{Cap}}\bigl(E; L^1_{\nu,F}(D)\bigr) = \lim_{m\to\infty}\bigl\|f_{K_m} \mid L^1_{\nu,F}(D)\bigr\|^{\nu} = \inf\bigl\{\bigl\|f \mid L^1_{\nu,F}(D)\bigr\|^{\nu} : f \in A(E)\bigr\}.$$

Пусть E — произвольное множество, а U — открытое множество, содержащее E. Тогда, очевидно, $A(U) \supset A(E)$ и

$$\inf\bigl\{\bigl\|f \mid L^1_{\nu,F}(D)\bigr\|^{\nu} : f \in A(E)\bigr\} \leq \inf\bigl\{\bigl\|f \mid L^1_{\nu,F}(D)\bigr\|^{\nu} : f \in A(U)\bigr\} = \overline{\operatorname{Cap}}\bigl(U; L^1_{\nu,F}(D)\bigr).$$

Отсюда $\inf\{\|f \mid L^1_{\nu,F}(D)\|^\nu : f \in A(E)\} \le \overline{\mathrm{Cap}}(E; L^1_{\nu,F}(D))$, что в сочетании с полученным в начале доказательства обратным неравенством составляет первое утверждение теоремы. Второе утверждение вытекает из следствия 23. $\square$

Функция f_E из теоремы 25 называется *емкостной функцией* для множества E.

Лемма 26. *Если $f \in L^1_{\nu,F}(D)$ — уточненная функция, то равенство*

$$f(x) = \lim_{r\to 0} r^{-\nu} \int\limits_{B(x,r)} f(z)\,dz \tag{8}$$

выполняется для квазивсех $x \in D_F$.

Доказательство. Действительно, так как результат локальный, можно предполагать (умножая на срезку), что $f \in S^1_\nu(\mathbb{G})$ (определение пространства $S^1_\nu(\mathbb{G})$ см. в п. 3.2). Для функций из пространства потенциалов утверждение леммы доказано в [5, предложение 6.14]. $\square$

Определение 27. Функцию f, определенную квазивсюду на D_F, будем называть *квазинепрерывной*, если для всякого $\varepsilon > 0$ можно найти открытое множество $U_\varepsilon \subset D_F$ такое, что $\overline{\mathrm{Cap}}(U_\varepsilon; L^1_{\nu,F}(D)) < \varepsilon$ и сужение f на дополнение $D_F \setminus U_\varepsilon$ непрерывно.

Замечание 28. Ниже в предложении 34 будет доказано, что функция класса $L^1_{\nu,F}(D)$ квазинепрерывна тогда и только тогда, когда она уточненная функция.

Определение 29. Пусть $E \subset D_F$ — произвольное измеримое множество. Точку $x \in D_F$ будем называть *точкой ненулевой плотности* для множества E, если

$$\overline{\lim_{r\to 0}} \frac{|B(x,r)\cap E|}{|B(x,r)|} > 0.$$

Совокупность всех точек $x \in D_F$, которые являются точками ненулевой плотности для множества E, будем обозначать символом $\widetilde{E}$.

Лемма 30 [10, теорема 6.5; 5, предложение 6.16]. *Пусть $E \subset D_F$ — множество положительной меры. Если функция $f \in L^1_{\nu,F}(D)$ квазинепрерывна и для п. в. $x \in E$ выполняется неравенство $f(x) \ge g(x)$, где $g : E \cup \widetilde{E} \to \mathbb{R}$ — полунепрерывная снизу функция, то $f(x) \ge g(x)$ для квазивсех $x \in \widetilde{E}$.*

Доказательство. Поскольку функция f квазинепрерывна, для любого $\varepsilon > 0$ существует открытое множество U_ε такое, что $\overline{\mathrm{Cap}}(U_\varepsilon; L^1_{\nu,F}(D)) < \varepsilon$ и f непрерывна на $D_F \setminus U_\varepsilon$. Пусть f_m — неотрицательная емкостная функция для множества $U_{\frac{1}{m}}$. Так как $\|f_m \mid L^1_{\nu,F}(D)\| \to 0$ при $m \to \infty$, переходя к подпоследовательности, можно считать, что

$$\lim_{m\to\infty} f_m(x) = 0 \quad \text{при квазивсех } x \in D_F. \tag{9}$$

По лемме 26 для любого m имеем

$$f_m(x) = \lim_{r\to 0} r^{-\nu} \int\limits_{B(x,r)} f_m(z)\,dz \quad \text{при квазивсех } x \in D_F. \tag{10}$$

Поэтому равенства (9) и (10) выполняются при квазивсех $x \in \widetilde{E}$. Пусть $x \in \widetilde{E}$ — точка, в которой справедливы равенства (9) и (10) одновременно. Поскольку x — точка положительной плотности множества E, найдется число $\rho_0 > 0$ такое, что $\frac{|E \cap B(x,\rho)|}{|B(x,\rho)|} > \delta > 0$ для всех $\rho \in (0, \rho_0)$. Докажем, что при всех достаточно больших m неравенство

$$|U_{\frac{1}{m}} \cap E \cap B(x,\rho)| < |E \cap B(x,\rho)|$$

выполняется для достаточно малых ρ.

Действительно, так как $\lim\limits_{m\to\infty} f_m(x) = 0$, при достаточно больших m имеем $f_m(x) < \delta$. Далее,

$$\varlimsup_{\rho\to 0} \frac{|U_{\frac{1}{m}} \cap E \cap B(x,\rho)|}{|E \cap B(x,\rho)|} \le \varlimsup_{\rho\to 0} \frac{|B(x,\rho)|}{|E \cap B(x,\rho)|} \varlimsup_{\rho\to 0} \rho^{\nu} \int\limits_{U_{\frac{1}{m}} \cap E \cap B(x,\rho)} f_m(y)\, dy$$
$$< \frac{1}{\delta} \lim_{\rho\to 0} \frac{1}{|B(x,\rho)|} \int\limits_{B(x,\rho)} f_m(y)\, dy = \delta^{-1} f_m(x) < 1.$$

Таким образом, найдутся числа $m(x) \in \mathbb{N}$ и $\rho(x) > 0$ такие, что при всех $m > m(x)$ и каждом $\rho \in (0, \rho(x))$ мера множества $V_\rho = (E \cap B(x,\rho)) \setminus U_{\frac{1}{m}}$ положительная. Учитывая непрерывность f_m на $D_F \setminus U_{\frac{1}{m}}$ и тот факт, что $f(y) \ge g(y)$ при п. в. $y \in E$, получаем

$$f(x) = \lim_{\rho\to 0} \frac{1}{|V_\rho|} \int\limits_{V_\rho} f(y)\, dy \ge \lim_{\rho\to 0} \frac{1}{|V_\rho|} \int\limits_{V_\rho} g(y)\, dy \ge g(x). \quad \square$$

Следствие 31 [10, следствие 6.7; 5, следствие 6.17]. *Пусть измеримое множество $E \subset D_F$ имеет положительную меру. Если две квазинепрерывные функции $f_1, f_2 \in L^1_{\nu,F}(D)$ совпадают почти всюду на E, то f_1 и f_2 совпадают квазивсюду на $\widetilde{E}$.*

Доказательство. Действительно, по лемме 30 получаем, что $f_1(x) \le f_2(x)$ и $f_1(x) \ge f_2(x)$ квазивсюду на $\widetilde{E}$. Следовательно, $f_1(x) = f_2(x)$ квазивсюду на $\widetilde{E}$. $\square$

Следствие 32 [5, следствие 6.19]. *Для любого множества $E \subset D_F$ справедливо $\overline{\mathrm{Cap}}\big(E \cup \widetilde{E}; L^1_{\nu,F}(D)\big) = \overline{\mathrm{Cap}}\big(E; L^1_{\nu,F}(D)\big)$.*

Доказательство. Заметим, что по свойству 2 леммы 16 имеем

$$\overline{\mathrm{Cap}}\big(E \cup \widetilde{E}; L^1_{\nu,F}(D)\big) \ge \overline{\mathrm{Cap}}\big(E; L^1_{\nu,F}(D)\big). \tag{11}$$

Если $\overline{\mathrm{Cap}}\big(E; L^1_{\nu,F}(D)\big) = \infty$, то равенство очевидно.

Пусть $\overline{\mathrm{Cap}}\big(E; L^1_{\nu,F}(D)\big) < \infty$, тогда согласно теореме 25 и замечанию 18 существует уточненная функция f_E такая, что $\overline{\mathrm{Cap}}\big(E; L^1_{\nu,F}(D)\big) = \big\|f_E \mid L^1_{\nu,F}(D)\big\|^{\nu}$ и $f(x) \ge 1$ квазивсюду на E. В силу леммы 30 неравенство $f(x) \ge 1$ справедливо квазивсюду на $\widetilde{E}$. Таким образом, $f_E \in A(E \cup \widetilde{E})$. Следовательно,

$$\overline{\mathrm{Cap}}\big(E \cup \widetilde{E}; L^1_{\nu,F}(D)\big) \le \big\|f_E \mid L^1_{\nu,F}(D)\big\|^{\nu} = \overline{\mathrm{Cap}}\big(E; L^1_{\nu,F}(D)\big),$$

что вместе с неравенством (11) обеспечивают требуемое равенство. $\square$

Следствие 33 [5, следствие 6.20]. *Пусть выполнены условия леммы* 30. *Если $f(x) = g(x)$ п. в. на $E \subset D_F$, где f — квазинепрерывная на D_F функция, а g — непрерывная на $E \cup \widetilde{E}$ функция, то $f(x) = g(x)$ для квазивсех точек $x \in \widetilde{E}$.*

Доказательство. Утверждение сразу следует из леммы 30, поскольку функция g, в частности, полунепрерывна снизу на $E \cup \widetilde{E}$. $\square$

Предложение 34. *Определения* 17 и 27 эквивалентны: каждая уточненная функция квазинепрерывна и, обратно, любая квазинепрерывная функция класса $L^1_{\nu,F}(D)$ уточненная.

Доказательство. Действительно, если f — уточненная функция, то в силу условия 2 определения 17 для любого $\varepsilon > 0$ найдется некоторое открытое множество U_ε емкости, меньшей $\varepsilon > 0$, такое, что на дополнении $D_F \setminus U_\varepsilon$ последовательность непрерывных функций $f_n \in L^1_{\nu,F}(D)$ сходится равномерно. Следовательно, f непрерывна на $D_F \setminus U_\varepsilon$.

Пусть, функция $f \in L^1_{\nu,F}(D)$ квазинепрерывна. Тогда по замечанию 18 существует уточненная функция $\tilde{f}$, совпадающая с f п. в. в D_F. По доказанному выше функция $\tilde{f}$ квазинепрерывна и, значит, по следствию 31 функции f и $\tilde{f}$ совпадают квазивсюду. Остается заметить, что функция, совпадающая квазивсюду с уточненной, сама уточненная. $\square$

3.2. Емкость в пространстве потенциалов. Пусть Ω — открытое связное множество на группе Карно $\mathbb{G}$. *Емкостью* $\operatorname{cap}\bigl(K; W^1_\nu(\Omega)\bigr)$ компакта $K \subset \Omega$ в пространстве $W^1_\nu(\Omega)$ называется величина

$$\operatorname{cap}\bigl(K; W^1_\nu(\Omega)\bigr) = \inf\bigl\|g \mid W^1_\nu(\Omega)\bigr\|^\nu,$$

где точная нижняя грань берется по всем непрерывным функциям $g \in W^1_\nu(\Omega)$ таким, что $g \geq 1$ на K. Для произвольного множества $E \subset \Omega$ его *внутренняя емкость* равна

$$\underline{\operatorname{cap}}\bigl(E; L^1_\nu(\Omega)\bigr) = \sup\bigl\{\operatorname{cap}\bigl(K; W^1_\nu(\Omega)\bigr) : K \subset E,\ K \text{ компактно}\bigr\},$$

а его *внешняя емкость* —

$$\overline{\operatorname{cap}}\bigl(E; W^1_\nu(\Omega)\bigr) = \inf\bigl\{\underline{\operatorname{cap}}\bigl(U; W^1_\nu(\Omega)\bigr) : E \subset U,\ U \text{ открыто}\bigr\}.$$

Свойства емкости в пространстве $W^1_\nu(\Omega)$ (см., например, [5]) аналогичны свойствам емкости в пространстве $L^1_{\nu,F}(D)$, установленным выше.

Пространство бесселевых потенциалов на группе Карно — это пространство $S^\alpha_p(\mathbb{G})$ функций вида

$$g(x) = f * J_\alpha(x) = \int\limits_{\mathbb{G}} J_\alpha(y^{-1}x) f(y)\, dy,$$

где $f \in L_p(\mathbb{G})$, $p \in (1, \infty)$, J_α — бесселево ядро [24] на группе $\mathbb{G}$, $\alpha \in (0, \infty)$. Определим норму в пространстве потенциалов следующим образом: $\bigl\|g \mid S^\alpha_p(\mathbb{G})\bigr\| = \|f \mid L_p(\mathbb{G})\|$. Если $\alpha = k$ — натуральное число, то пространство $S^k_p(\mathbb{G})$ совпадает с пространством Соболева $W^k_p(\mathbb{G})$ [24]. Далее нас интересует случай, когда $\alpha = 1$, так как $S^1_p(\mathbb{G})$ совпадает с пространством Соболева $W^1_p(\mathbb{G})$.

Бесселева емкость произвольного множества $E \in \mathbb{G}$ определяется следующим образом (см. подробней в [25]):

$$\operatorname{cap}\bigl(E; S^1_p(\mathbb{G})\bigr) = \inf\biggl\{\int\limits_{\mathbb{G}} f(y)^p\, dy : f * J_1(x) \geq 1 \text{ в точках } x \in E\biggr\}. \tag{12}$$

В [25] показано, что емкость в пространстве $S^1_p(\mathbb{G})$ является внешней емкостью.

Предложение 35 [25, следствие 2]. *Пусть $x \in \mathbb{G}$, $r < 1$. Для бесселевой емкости шара справедлива эквивалентность* $\operatorname{cap}\bigl(B(x,r); S^1_\nu(\mathbb{G})\bigr) \sim \bigl(\ln \frac{2}{r}\bigr)^{1-\nu}$.

Замечание 36. В силу эквивалентности норм в $S^1_\nu(\mathbb{G})$ и $W^1_\nu(\mathbb{G})$ [24] емкости $\operatorname{cap}\bigl(E; S^1_\nu(\mathbb{G})\bigr)$ и $\overline{\operatorname{cap}}\bigl(E; W^1_\nu(\mathbb{G})\bigr)$ также сравнимы, т. е. существуют постоянные m и M такие, что

$$m\overline{\operatorname{cap}}\bigl(E; W^1_\nu(\mathbb{G})\bigr) \le \operatorname{cap}\bigl(E; S^1_\nu(\mathbb{G})\bigr) \le M\,\overline{\operatorname{cap}}\bigl(E; W^1_\nu(\mathbb{G})\bigr). \tag{13}$$

Лемма 37. *Пусть $\Sigma \subset D_F$. Следующие три свойства равносильны:*

$$\overline{\operatorname{Cap}}\bigl(\Sigma; L^1_{\nu,F}(D)\bigr) = 0, \quad \overline{\operatorname{cap}}\bigl(\Sigma; W^1_\nu(\mathbb{G})\bigr) = 0, \quad \operatorname{cap}\bigl(\Sigma; S^1_\nu(\mathbb{G})\bigr) = 0.$$

Доказательство. Равносильность последних двух равенств следует из замечания 36.

Пусть $\overline{\operatorname{Cap}}\bigl(\Sigma; L^1_{\nu,F}(D)\bigr) = 0$. В силу счетной полуаддитивности емкости можно считать, что множество Σ содержится в шаре $B_\Sigma \subset D$, а множество F — в шаре $B_F \subset D$, при этом $\operatorname{dist}(B_F, B_\Sigma) > 0$, $\operatorname{dist}(\partial D, B_F) > 0$ и $\operatorname{dist}(\partial D, B_\Sigma) > 0$.

Поскольку $\overline{\operatorname{Cap}}\bigl(\Sigma; L^1_{\nu,F}(D)\bigr) = 0$, найдется последовательность открытых множеств $\{U_k\}$, упорядоченных по включению, такая, что

$$B_S \supset U_1 \supset U_2 \dots \supset \Sigma \quad \text{и} \quad \overline{\operatorname{Cap}}\bigl(U_k; L^1_{\nu,F}(D)\bigr) \le \frac{1}{2^k}.$$

В силу теоремы 25 найдется последовательность функций $h_k \in L^1_{\nu,F}(D)$ такая, что $h_k \ge 1$ квазивсюду на U_k и $\bigl\|h_k \mid L^1_{\nu,F}(D)\bigr\| \le 1/2^k$. Переходя к срезке $\min(1, h_k)$, можно считать, что $h_k = 1$ всюду на U_k.

Пусть $\Omega \subset D$ — область Джона, содержащая шары B_Σ, B_F, и $\operatorname{dist}(\partial\Omega, \partial D) > 0$ (лемма 10). Для достаточно малого $\delta > 0$ выберем (см. замечание 11) дополнительную область Джона $\Omega_\delta \supset \Omega$ так, что $\operatorname{dist}(\partial\Omega, \partial\Omega_\delta) \ge \delta$ и $\operatorname{dist}(\partial D, \partial\Omega_\delta) \ge \delta$. По неравенству Пуанкаре (лемма 12) имеем $\|h_k \mid L_\nu(\Omega_\delta)\| \le C\bigl\|h_k \mid L^1_\nu(\Omega_\delta)\bigr\|$. Поэтому, переходя к подпоследовательностям, можно считать, что $h_k \to 0$ п. в. на Ω_δ и $\nabla h_k \to 0$ п. в. на Ω_δ. Определим срезку $\eta \in C^\infty_0(\mathbb{G})$ такую, что $\eta = 1$ на Ω и $\eta = 0$ на $\mathbb{G} \setminus \Omega_\delta$. Тогда произведения $\eta h_k \in W^1_\nu(\mathbb{G})$ будут такими, что

$$\eta h_k(x) = \begin{cases} h_k(x) & \text{при } x \in \Omega, \\ 0 & \text{при } x \in \mathbb{G} \setminus \Omega_\delta. \end{cases}$$

Далее, $|\nabla(\eta h_k)| \le |(\nabla\eta)h_k| + |\eta\nabla h_k|$ и $\bigl\|\eta h_k \mid W^1_\nu(\mathbb{G})\bigr\| \to 0$ при $k \to \infty$. Следовательно, $\operatorname{cap}\bigl(U_k; W^1_\nu(\mathbb{G})\bigr) \to 0$ при $k \to \infty$, откуда

$$\overline{\operatorname{cap}}\bigl(\Sigma; W^1_\nu(\mathbb{G})\bigr) = 0 \quad \text{и} \quad \operatorname{cap}\bigl(\Sigma; S^1_\nu(\mathbb{G})\bigr) = 0. \tag{14}$$

Пусть верно (14). Тогда найдутся убывающая по включению последовательность открытых множеств $\{W_k\} \subset B_\Sigma$, содержащих Σ, для которой $\operatorname{cap}\bigl(\Sigma; W^1_\nu(\mathbb{G})\bigr) \le 1/2^{k+1}$, и последовательность функций $u_k \in W^1_\nu(\mathbb{G})$ таких, что $u_k = 1$ квазивсюду на W_k и $\bigl\|u_k \mid W^1_\nu(\mathbb{G})\bigr\|^\nu \le 1/2^k$.

Определим срезку $\eta' \in C^\infty_0(\mathbb{G})$ такую, что $\eta = 1$ на B_Σ и $\eta' = 0$ на $\mathbb{G} \setminus \lambda B_\Sigma$, где $\lambda > 1$, при которой $D \supset \lambda B_\Sigma \supset B_\Sigma$ и $\lambda B_\Sigma \cap B_F = \varnothing$. Тогда для функций $\eta' \cdot u_k = f_k \in L^1_{\nu,\varphi(F)}(D)$ верно: $f_k = 1$ на W_k и $\bigl\|f_k \mid L^1_{\nu,\varphi(F)}(D)\bigr\|^\nu \le c/2^k$, где c — постоянная, не зависящая от k. Отсюда получаем $\operatorname{Cap}\bigl(\Sigma; L^1_{\nu,F}(D)\bigr) = 0$. $\square$

Замечание 38. Метод доказательства леммы 37 применим для доказательства более общего утверждения: пусть $\{U_k\}_1^\infty \subset D_F$ — последовательность открытых множеств, содержащихся в некотором шаре $B(0,R)$, такая, что $\operatorname{dist}(U_k, \partial D_F) \geq \eta > 0$ для всех $k \in \mathbb{N}$. Тогда следующие три равенства эквивалентны

$$\lim_{k\to\infty} \overline{\operatorname{Cap}}\big(U_k; L^1_{\nu,F}(D)\big) = 0, \ \lim_{k\to\infty} \overline{\operatorname{cap}}\big(U_k; W^1_\nu(\mathbb{G})\big) = 0, \ \lim_{k\to\infty} \operatorname{cap}\big(U_k; S^1_\nu(\mathbb{G})\big) = 0.$$

В частности, из предложения 35 получаем оценку емкости шара $B(x,r) \subset D_F$:

$$\overline{\operatorname{Cap}}\big(B(x,r); L^1_{\nu,F}(D)\big) = O\left(\left(\ln\frac{2}{r}\right)^{1-\nu}\right) = o(1)$$

при $r \to 0$.

В следующей лемме описано характеристическое свойство множеств нулевой емкости.

Лемма 39. *Множество $\Sigma \subset D_F$ имеет нулевую внешнюю емкость тогда и только тогда, когда найдется полунепрерывная снизу функция $u \in L^1_{\nu,F}(D)$ такая, что $u = \infty$ на Σ. Норма функции u может быть выбрана сколь угодно малой.*

Доказательство. Необходимость. Шаг 1. Рассмотрим вначале специальное расположение множества Σ: $\Sigma \subset B_\Sigma \Subset D_F$, где B_Σ — некоторый шар. Из леммы 37 имеем

$$\operatorname{cap}\big(\Sigma; S^1_\nu(\mathbb{G})\big) = 0.$$

Тогда найдется последовательность неотрицательных функций $f_k \in L_\nu(\mathbb{G})$ таких, что $\|f_k \mid L_\nu(\mathbb{G})\| \leq 2^{-k}$ и

$$f_k * J_1(x) \geq 1 \quad \text{во всех точках } x \in \Sigma.$$

Функция

$$f = \sum_{k=1}^\infty f_k \tag{15}$$

неотрицательна, принадлежит $L_\nu(\mathbb{G})$, и $f * J_1(x) = \infty$ во всех точках $x \in \Sigma$. Так как ядро $J_1(z)$ неотрицательно на Σ и непрерывно всюду, кроме одной точки: $z = 0$, то свертка $f * J_1(x)$ полунепрерывна снизу (по лемме Фату).

Рассмотрим липшицеву функцию $\eta : D \to [0,1]$ такую, что

$$\eta(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \in F, \\ 1, & \text{если } x \in B_\Sigma. \end{cases}$$

Поскольку $W^1_\nu(\mathbb{G}) = S^1_\nu(\mathbb{G})$, ограничение произведения $\eta(x) \cdot f * J_1(x)$ на D: $u(x) = \eta(x) \cdot f * J_1(x)|_D$, очевидно, принадлежит $L^1_{\nu,F}(D)$ и удовлетворяет всем утверждениям леммы.

Заметим еще, что норма функции $u(x)$ может быть сделана сколь угодно малой, так как свойства функции $f * J_1(x)$ не зависят от числа слагаемых в сумме (15). Поэтому, удаляя в случае необходимости конечное число слагаемых в ряде (15) и используя его абсолютную сходимость, можно сделать норму $\big\|f * J_1 \mid W^1_\nu(D)\big\| = \|f * J_1 \mid L_\nu(D)\| + \big\|f * J_1 \mid L^1_\nu(D)\big\| \leq \big\|f * J_1 \mid W^1_\nu(\mathbb{G})\big\|$ сколь угодно малой. Поскольку

$$|\nabla(\eta \cdot f * J_1)(x)| \leq |\nabla\eta(x)| \cdot |f * J_1(x)| + |\eta(x)| \cdot |\nabla(f * J_1)(x)|,$$

сколь угодно малой можно сделать также и норму $\|u_B \mid L^1_{\nu,F}(D)\|$.

Шаг 2. Пусть множество $\Sigma \subset D_F$ нулевой внешней емкости имеет произвольное расположение. Фиксируем произвольный конечнократный набор шаров $\{B_k\}$, $k \in \mathbb{N}$, такой, что $D_F = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} B_k$ и $B_k \Subset D_F$ для любого k (существование такого набора доказано, например, в [26]). Тогда пересечение $\Sigma \cap B_k$ имеет нулевую внешнюю емкость и удовлетворяет условиям первого шага доказательства. Следовательно, существует неотрицательная полунепрерывная снизу функция $u_k \in L^1_{\nu,F}(D)$ такая, что $u_k = \infty$ на $\Sigma \cap B_k$ и $\|u_k \mid L^1_{\nu,F}(D)\| \leq \frac{\varepsilon}{M2^k}$, где ε — произвольное наперед заданное число, а M — кратность покрытия $\{B_k\}$.

Функция $u(x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ полунепрерывна снизу, принадлежит классу $L^1_{\nu,F}(D)$, $u = \infty$ на Σ и $\|u \mid L^1_{\nu,F}(D)\| \leq \varepsilon$.

Достаточность. Пусть существует полунепрерывная снизу функция $u \in L^1_{\nu,F}(D)$ такая, что $u = \infty$ на некотором множестве $\Sigma \subset D_F$. Возьмем произвольное $\lambda > 0$. Тогда множество $U_\lambda = \{x \in D_F : u(x) > \lambda\}$ открыто и содержит Σ, а уточненная функция $\frac{u(x)}{\lambda}$ входит в класс $A(U_\lambda)$ допустимых функций для оценки емкости

$$\overline{\mathrm{Cap}}\big(\Sigma; L^1_{\nu,F}(D)\big) \leq \overline{\mathrm{Cap}}\big(U_\lambda; L^1_{\nu,F}(D)\big) \leq \frac{\|u \mid L^1_{\nu,F}(D)\|^\nu}{\lambda^\nu}$$

(в последнем переходе воспользовались леммой 19). Так как λ — произвольное число, $\overline{\mathrm{Cap}}\big(\Sigma; L^1_{\nu,F}(D)\big)=0$. $\square$

Теорема 40 [25, теорема 9]. *Пусть $K \subset \mathbb{G}$ — компактное множество, $h(\rho)$ — неубывающая непрерывная функция, для которой $h(0) = 0$. Предположим, что*

$$\int\limits_0^1 h(\rho)^{\frac{1}{\nu-1}} \, \frac{d\rho}{\rho} < \infty. \tag{16}$$

Тогда существует постоянная A такая, что $H^\infty_h(K) \leq A \operatorname{cap}\big(K; S^1_\nu(\mathbb{G})\big)$. Таким образом, $H^\infty_h(K) = 0$, если $\operatorname{cap}\big(K; S^1_\nu(\mathbb{G})\big) = 0$. (Здесь $H^\infty_h(K)$ — вместимость по Хаусдорфу.)

Следующее утверждение является аналогом леммы 7.19 из [5].

Лемма 41. *Пусть $\{\gamma_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ — последовательность континуумов, содержащихся в некотором замкнутом шаре $\overline{B}_\gamma \subset D_F$. Предел $\lim\limits_{m\to\infty} \overline{\mathrm{Cap}}\big(\gamma_m; L^1_{\nu,F}(D)\big)$ равен нулю тогда и только тогда, когда $\lim\limits_{m\to\infty} \operatorname{diam} \gamma_m = 0$.*

Доказательство. Пусть $\lim\limits_{m\to\infty} \overline{\mathrm{Cap}}\big(\gamma_m; L^1_{\nu,F}(D)\big) = 0$. Можно считать, что $\operatorname{dist}(B_F, B_\gamma) > 0$. Найдется последовательность непрерывных функций $f_m \in L^1_{\nu,F}(D)$ таких, что $f_m = 1$ на γ_m и $\lim\limits_{m\to\infty} \|f_m \mid L^1_{\nu,F}(D)\| = 0$.

Выберем число $\lambda > 1$ такое, что $\operatorname{dist}(B_F, \lambda B_\gamma) > 0$ и $\lambda B_\gamma \subset D_F$.

Определим срезку $\eta \in C^\infty_0(\mathbb{G})$ такую, что $\eta = 1$ на B_γ и $\eta = 0$ на $\mathbb{G} \setminus \lambda B_\gamma$. Тогда функции $\eta \cdot f_m = u_m$ принадлежат $W^1_\nu(\mathbb{G})$ и в силу неравенства Пуанкаре (лемма 12) имеем $\lim\limits_{m\to\infty} \|f_m \mid W^1_\nu(\mathbb{G})\| = 0$. Отсюда получаем

$$\lim_{m\to\infty} \operatorname{cap}\big(\gamma_m; W^1_\nu(\mathbb{G})\big) = 0 \quad \text{и} \quad \lim_{m\to\infty} \operatorname{cap}\big(\gamma_m; S^1_\nu(\mathbb{G})\big) = 0.$$

Полагая в теореме 40 $h(\rho)=\rho$, выводим $\lim\limits_{m\to\infty} H_1^\infty(\gamma_m)=0$. Остается заметить, что $H_1^\infty(E)=\operatorname{diam}(E)$.

Доказательство обратного утверждения очевидно. $\square$

3.3. Обобщенная емкость Тейхмюллера.

Определение 42. *Обобщенной емкостью Тейхмюллера* кольца $D_{r,R}=\{x\in\mathbb{G}: r<d(0,x)<R\}$ назовем величину

$$GT(r,R)=\inf_u \int\limits_{D_{r,R}} |\nabla u|^\nu\,dx,$$

где нижняя грань берется по всем квазинепрерывным функциям $u\in W_\nu^1(D_{r,R})$, удовлетворяющим условиям $\min u|_{S(0,t)}\le 0$ и $\max u|_{S(0,t)}\ge 1$ для п. в. $t\in(r,R)$.

Квазинепрерывная функция непрерывна на почти всех сферах (см. ниже предложение 56), максимум и минимум в определении 42 относятся именно к таким сферам.

Предложение 43 [25, предложение 7]. *Обобщенная емкость Тейхмюллера $GT(r,R)$ строго положительна для любых $0<r<R<\infty$.*

Следствие 44 [25, следствие 4]. *Для обобщенной емкости Тейхмюллера справедлива оценка снизу*

$$GT(r,R)\ge\gamma_1\ln\frac{R}{r}. \tag{17}$$

Предложение 45. *Пусть U — область в $\mathbb{G}$ и $\gamma_0,\gamma_1\subset U$ — два связных множества, диаметр каждого из которых положительный. Если γ_0 и γ_1 имеют в U общую предельную точку, то не существует квазинепрерывной функции $v\in L_\nu^1(U)$ такой, что $v|_{\gamma_0}=0$ и $v|_{\gamma_1}=1$.*

Доказательство. Допустим, напротив, такая функция существует. Рассмотрим кольцо $D_{r,R}\subset U$ с центром в общей предельной точке $x\in U$ такое, чтобы число R не превосходило максимального из диаметров γ_0 и γ_1. Тогда из определения обобщенной емкости Тейхмюллера (см. определение 42) и следствия 44 получаем следующие неравенства:

$$\int\limits_U |\nabla v|^\nu\,dx \ge \int\limits_{D_{r,R}} |\nabla v|^\nu\,dx \ge GT(r,R)\ge\gamma_1\ln\frac{R}{r}. \tag{18}$$

Из (18) при $r\to 0$ вытекает, что $\left\|v\mid L_\nu^1(U)\right\|^\nu=\infty$, а это противоречит принадлежности функции v пространству $L_\nu^1(U)$. $\square$

4. Свойства отображения φ

Продолжим изучение отображений $\varphi: D\to D'$ класса IL_ν^1. Всякое такое отображение обладает свойствами, сформулированными в п. 1.3.

4.1. Построение квазинепрерывного представителя отображения φ. В этом пункте построим квазинепрерывное отображение ψ, которое будет совпадать с отображением φ п. в. на D_F.

Лемма 46 [5, лемма 7.2]. *Пусть $E \subset D_F$ — множество положительной меры, отображение φ непрерывно на E и $f \in L^1_{\nu,\varphi(F)}(D')$ — полунепрерывная снизу функция. Если $g = \varphi^* f$ — уточненная функция в $L^1_{\nu,F}(D)$, то $g(x) \geq f \circ \varphi(x)$ квазивсюду на $E \cap \widetilde{E}$.*

Доказательство. Поскольку отображение φ непрерывно на E, функция $f \circ \varphi$ полунепрерывна снизу на E. В силу свойств оператора φ^* (лемма 14) $g = f \circ \varphi$ п. в. на D и, в частности, $g(x) \geq f \circ \varphi(x)$ для п. в. $x \in E$. По лемме 30 $g(x) \geq f \circ \varphi(x)$ для квазивсех $x \in E \cap \widetilde{E}$. $\square$

Из леммы 46 получаем

Следствие 47. *Пусть $E \subset D_F$ — множество положительной меры, состоящее из точек положительной плотности, и отображение φ непрерывно на E и $f \in L^1_{\nu,\varphi(F)}(D')$ — полунепрерывная снизу функция. Если $g = \varphi^* f$ — уточненная функция в $L^1_{\nu,F}(D)$, то $g(x) \geq f \circ \varphi(x)$ квазивсюду на E.*

Лемма 48 [5, лемма 7.3]. *Пусть $E \subset D_F$ — множество положительной меры, состоящее из точек положительной плотности, и отображение φ непрерывно на E. Если $\Sigma \subset D'_F$ — множество нулевой внешней емкости, то множество $\varphi^{-1}(\Sigma) \cap E$ имеет нулевую емкость.*

Доказательство. Пусть $f \in L^1_{\nu,\varphi(F)}(D')$ — полунепрерывная снизу функция, построенная в лемме 39. По следствию 47 уточненная функция $g = \varphi^* f$ не меньше функции $f \circ \varphi$ квазивсюду на E. В частности, для квазивсех точек $x \in \varphi^{-1}(\Sigma) \cap E$ имеем $g(x) = \infty$. Из леммы 19 получаем $\overline{\operatorname{Cap}}\big(\varphi^{-1}(\Sigma) \cap E; L^1_{\nu,F}(D)\big) = 0$. $\square$

Из леммы 48 следует

Лемма 49 [5, лемма 7.4]. *Пусть $f_k \in L^1_{\nu,\varphi(F)}(D')$ — последовательность уточненных функций, сходящаяся квазивсюду к функции $f \in L^1_{\nu,\varphi(F)}(D')$. Тогда последовательность $f_k \circ \varphi$ сходится к функции $f \circ \varphi \in L^1_{\nu,F}(D)$ п. в. на D и квазивсюду на $T \cap D_F$, где T — множество из предложения* 13.

Доказательство. Напомним, что $T = \bigcup\limits_k T_k$, $|D \setminus T| = 0$, где $\{T_k\}$ — возрастающая по включению последовательность ограниченных множеств положительной меры, состоящих из точек положительной плотности. На каждом T_k отображение φ непрерывно.

Пусть $S \subset D'_F$ — множество нулевой внешней емкости, на котором нет сходимости. Тогда в силу леммы 48 для каждого k множество $\varphi^{-1}(S) \cap T_k \cap D_F$ имеет нулевую емкость. Следовательно, по п. 5 леммы 16 множество $\varphi^{-1}(S) \cap T \cap D_F$ имеет нулевую емкость. Отсюда получаем сходимость последовательности $f_k \circ \varphi$ к функции $f \circ \varphi \in L^1_{\nu,F}(D)$ квазивсюду на $T \cap D_F$. Сходимость последовательности $f_k \circ \varphi$ к функции $f \circ \varphi \in L^1_{\nu,F}(D)$ п. в. на D очевидна: $|D \setminus T| = 0$. $\square$

Лемма 50 [5, лемма 7.6]. *Пусть $E \subset D_F$ — множество положительной меры, состоящее из точек положительной плотности, отображение φ непрерывно на E и $f \in L^1_{\nu,\varphi(F)}(D')$ — уточненная функция. Если $g = \varphi^* f$ — уточненная в $L^1_{\nu,F}(D)$ функция, то $g|_E$ совпадает квазивсюду с функцией $f \circ \varphi|_E$.*

Доказательство. Пусть $f_k \in L^1_{\nu,\varphi(F)}(D')$ — последовательность непрерывных функций, сходящаяся к функции f всюду, за исключением множества Σ

нулевой внешней емкости. С учетом замечания 18 можно считать, что последовательность уточненных функций $g_k = \varphi^* f_k$ сходится квазивсюду к функции $\varphi^* f$. Функции $g_k = \varphi^* f_k$ согласно следствию 33 совпадают квазивсюду на E с функциями $f_k \circ \varphi|_E$. Таким образом, функция g совпадает квазивсюду на E с функцией $f \circ \varphi$. $\square$

Следствие 51. *Пусть T — множество из предложения 13 и $f \in L^1_{\nu,\varphi(F)}(D')$ — уточненная функция. Если $g = \varphi^* f$ — уточненная в $L^1_{\nu,F}(D)$ функция, то $g|_{T\cap D_F}$ совпадает квазивсюду с функцией $f \circ \varphi|_{T\cap D_F}$.*

Доказательство. Напомним, что $T = \bigcup\limits_k T_k$, $|D \setminus T| = 0$, где $\{T_k\}$ — возрастающая по включению последовательность ограниченных множеств положительной меры, состоящих из точек положительной плотности. На каждом из T_k отображение φ непрерывно.

В лемме 50 положим $E = T_k \cap D_F$. Тогда уточненная в $L^1_{\nu,F}(D)$ функция $g = \varphi^* f$ совпадает с функцией $f \circ \varphi$ квазивсюду на $T_k \cap D_F$. Отсюда получаем утверждение следствия, так как здесь k — произвольное натуральное число. $\square$

Лемма 52 [5, лемма 7.7]. *Существуют множество $S_\varphi \subset D$ нулевой емкости и квазинепрерывное отображение $\psi : D_F \setminus S_\varphi \to \overline{D'_F}$ такие, что $\psi(x) = \varphi(x)$ п. в. на D_F.*

Доказательство. В силу следствия 31 достаточно для произвольного открытого шара $Q \Subset D_F$ построить квазинепрерывное отображение $\bar{\varphi} : Q \to \mathbb{G}$, совпадающее с отображением φ п. в. на Q.

Пусть $f \in L^1_{\nu,F}(D)$ — непрерывная функция и $f \geq 1$ на Q. Существует уточненная функция $g \in L^1_{\nu,\varphi(F)}(D')$, для которой $f = \varphi^* g$. По следствию 51 функции $f|_{T\cap Q}$ и $g \circ \varphi|_{T\cap Q}$ совпадают квазивсюду. Пусть $S_Q \subset T \cap Q$ — множество нулевой емкости, на котором значения функций $f|_{T\cap Q}$ и $g \circ \varphi|_{T\cap Q}$ не совпадают. Заметим, что для отображения $\varphi : T\cap Q \to \mathbb{G}$ выполняются условия лемм 46–50 и их следствий. Кроме того, для всех точек $y \in \varphi(T\cap Q \setminus S_Q)$ имеем $g(y) = g(\varphi(x)) = f(x) \geq 1$. Таким образом, емкость множества $\varphi(T \cap Q \setminus S_Q)$ конечная. Далее рассматриваем отображение φ лишь на множестве $T\cap Q \setminus S_Q$, считая, что на $Q \setminus (T\cap Q \setminus S_Q)$ оно не определено. Далее под образом множества $V \subset Q$ следует понимать $\varphi(V \cap (T \cap Q \setminus S_Q))$.

Положим $P_k = \varphi(Q) \cap B(0,k)$, $CP_k = \varphi(Q) \setminus P_k$, $k \in \mathbb{N}$. Покажем, что

$$\overline{\mathrm{Cap}}\big(CP_k; L^1_{\nu,\varphi(F)}(D')\big) \to 0 \quad \text{при } k \to \infty. \tag{19}$$

Действительно, фиксируем $k_0 \in \mathbb{N}$ и $0 < r < k_0 - 1$ так, что для $k > k_0$ выполнены включения $\varphi(F) \subset B(0,r)$ и $CP_k \subset \mathbb{G} \setminus B(0,k-1)$. Отсюда сразу вытекает, что

$$\overline{\mathrm{Cap}}\big(CP_k; L^1_{\nu,\varphi(F)}(D')\big) \leq \mathrm{Cap}\big(\mathbb{G} \setminus B(0,k-1); L^1_{\nu,B(0,r)}(\mathbb{G})\big).$$

Емкость справа — это ν-емкость кольца $D_{r,k-1}$: в [10, теоремы 6.6, 6.9] показано, что эта емкость эквивалентна величине $\big(\ln \frac{k-1}{r}\big)^{1-\nu}$. При $k \to \infty$ получаем (19).

Пусть $g_k \in A(CP_k)$ — последовательность функций такая, что

$$\big\|g_k \mid L^1_{\nu,\varphi(F)}(D')\big\|^\nu = \overline{\mathrm{Cap}}\big(CP_k; L^1_{\nu,\varphi(F)}(D')\big).$$

По следствию 51 уточненная функция $f_k = \varphi^* g_k$ совпадает квазивсюду на множестве $T \cap D_F$ с функцией $g_k \circ \varphi$. Таким образом, $f_k \in A(\varphi^{-1}(CP_k))$.

Обозначим через CF_k подмножество шара Q, состоящее из точек множества $\varphi^{-1}(CP_k)$ и всех точек ненулевой плотности $\varphi^{-1}(CP_k)$. По следствию 32 имеем

$$\overline{\mathrm{Cap}}\big(CF_k; L^1_{\nu,F}(D)\big) = \overline{\mathrm{Cap}}\big(\varphi^{-1}(CP_k); L^1_{\nu,F}(D)\big). \tag{20}$$

Далее,

$$\begin{aligned}\overline{\mathrm{Cap}}\big(\varphi^{-1}(CP_k); L^1_{\nu,F}(D)\big) &\le \big\|f_k \mid L^1_{\nu,F}(D)\big\|^\nu \\ &\le K^\nu \big\|g_k \mid L^1_{\nu,\varphi(F)}(D')\big)\big\|^\nu = K^\nu \overline{\mathrm{Cap}}\big(CP_k; L^1_{\nu,\varphi(F)}(D')\big),\end{aligned}$$

где K — норма оператора φ^*. Из (19) и (20) выводим

$$\lim_{k\to\infty} \overline{\mathrm{Cap}}\big(CF_k; L^1_{\nu,F}(D)\big) = 0. \tag{21}$$

Обозначим $F_k = Q \setminus CF_k$. Заметим, что $F_k \supset S_Q$ и $F_k \supset (D\setminus T)\cap Q$. Если $x \in F_k \cap T \setminus S_Q$, то $\varphi(x) \in P_k$ и для всех точек $x \in F_k$

$$\lim_{r\to 0} \frac{|F_k \cap B(x,r)|}{|B(x,r)|} = 1. \tag{22}$$

Действительно, для достаточно малых r (таких, что $B(x,r) \subset Q$) получаем $|B(x,r)| = |F_k \cap B(x,r)| + |CF_k \cap B(x,r)|$ или

$$1 = \frac{|F_k \cap B(x,r)|}{|B(x,r)|} + \frac{|CF_k \cap B(x,r)|}{|B(x,r)|}. \tag{23}$$

По построению множества CF_k для $x \notin CF_k$ $(x \in F_k)$ имеем

$$|CF_k \cap B(x,r)|/|B(x,r)| \to 0 \quad \text{при } r \to 0,$$

т. е. из (23) следует (22).

Рассмотрим срезки $\eta_k \in C_0^\infty(\mathbb{G})$ такие, что $\eta_k(x) = 1$, $x \in B(0,k)$, и $\eta_k(x) = 0$, $x \notin B(0,k+1)$, $k \in \mathbb{N}$. Пусть $\psi_{i,k}$ — уточненная функция такая, что $\psi_{i,k} = \varphi^*(y_i \cdot \eta_k)$ (здесь $y_i(\cdot)$ — координатные функции (в координатах первого рода [26])). Из следствия 51 выводим, что $\psi_{i,k}(x) = (y_i \cdot \eta_k)(\varphi(x))$ для квазивсех точек $x \in F_k \cap T$. Поэтому

$$(\varphi^*(y_i\eta_k))(x) = (y_i \cdot \eta_k)(\varphi(x)) = y_i(\varphi(x)) = \varphi_i(x)$$

для квазивсех $x \in F_k \cap T$. Таким образом, п. в. на F_k координатная функция φ_i совпадает с уточненной функцией $\psi_{i,k}$.

Положим

$$\bar\varphi_{i,k}(x) = \begin{cases} \psi_{i,k}(x), & \text{если } x \in F_k \setminus S_Q, \\ \varphi_i(x), & \text{если } x \in Q \setminus F_k. \end{cases}$$

Поскольку функция φ_i изменяется на множестве нулевой меры, для любого $k \in \mathbb{N}$ выполняется равенство $\varphi_i(x) = \bar\varphi_{i,k}(x)$ п. в. на Q.

Пусть $k < m$. По построению множеств F_k имеем $F_k \subset F_m$, поэтому на $F_k \cap T$ функции $\varphi^*(y_i\eta_k)$ и $\varphi^*(y_i\eta_m)$ совпадают квазивсюду с функцией φ_i.

Так как по построению все точки множеств F_k имеют плотность, равную единице, уточненные функции $\psi_{i,m}$ и $\psi_{i,k}$ совпадают квазивсюду на F_k (следствие 31). Это позволяет корректно определить квазивсюду на Q функцию

$$\bar\varphi_{iQ}(x) = \begin{cases} \psi_{i,k}(x), & \text{если } x \in F_k \setminus S_Q, \\ \varphi_i(x), & \text{если } x \in Q \setminus \bigcup\limits_k^\infty F_k. \end{cases}$$

Поскольку $Q \setminus \bigcup\limits_{k}^{\infty} F_k = \bigcap\limits_{k}^{\infty} CF_k$, в силу (21) функция $\bar{\varphi}_{iQ}$ определена квазивсюду на шаре Q.

Покажем, что функция $\bar{\varphi}_{iQ}$ квазинепрерывна на шаре Q. Фиксируем $\varepsilon > 0$. Тогда найдутся такие открытые множества U_1, U_2, U_3, что

1) существует номер k такой, что $CF_k \subset U_1$ и $\overline{\mathrm{Cap}}(U_1) < \varepsilon/3$ (в силу (21) и леммы 16);

2) на $D_F \setminus U_2$ функция $\psi_{i,k}$ непрерывна и $\overline{\mathrm{Cap}}(U_2) < \varepsilon/3$ (поскольку функция $\psi_{i,k}$ квазинепрерывна);

3) U_3 содержит все точки множества $Q \setminus U_1$ нулевой емкости, где значения функций $\bar{\varphi}_{iQ}$ и $\psi_{i,k}$ не совпадают, $\overline{\mathrm{Cap}}(U_3) < \varepsilon/3$ (так как $\bar{\varphi}_{iQ}$ и $\psi_{i,k}$ совпадают квазивсюду на F_k (вне CF_k)).

Множество $U = U_1 \cup U_2 \cup U_3$ имеет емкость $\overline{\mathrm{Cap}}(U) < \varepsilon$, а на дополнении $Q \setminus U$ функция $\bar{\varphi}_{iQ}$ непрерывна. В силу произвольности $\varepsilon > 0$ функция $\bar{\varphi}_{iQ}$ квазинепрерывна. Таким образом, построено квазинепрерывное отображение $\bar{\varphi}_Q : Q \setminus S_Q \to \overline{D'_F}$, где $S_Q \subset Q$ — некоторое множество нулевой емкости.

Покрывая область D_F счетным конечнократным набором открытых шаров Q_j и повторяя описанную выше процедуру на каждом из шаров Q_j, построим квазинепрерывное отображение

$$\psi(x) = \overline{\varphi}_{Q_j}(x), \quad \text{если } x \in Q_j.$$

Корректность определения отображения $\psi(x)$ обеспечивается следующим свойством: для двух шаров Q_j и Q_i с непустым пересечением имеем $\varphi_{Q_j}(x) = \varphi_{Q_i}(x)$ для всех $x \in Q_i \cap Q_j$, за исключением некоторого множества $\Sigma_{ij} \subset Q_i \cap Q_j$ нулевой емкости (см. следствие 31). Удалим из D_F множество

$$S_\varphi = \bigcup_{i \neq j} \Sigma_{ij} \cup \bigcup_{j} S_{Q_j}, \tag{24}$$

имеющее нулевую емкость. Тогда на $D_F \setminus S_\varphi$ отображение ψ определено корректно. При этом $\psi(x) = \varphi(x)$ для п. в. $x \in D_F$. $\square$

Будем считать, что образ $V \subset D_F$ — это множество $\psi(V \setminus S_\varphi)$.

Замечание 53. Для построенного отображения ψ выполняется следующее свойство: $\psi(x) = \varphi(x)$ для всех $x \in T \setminus Z$, где Z — множество нулевой емкости.

4.2. Построение отображения φ_0. В этом пункте построим отображение φ_0 такое, что $\varphi_0 = \psi$ квазивсюду и выполнены эквивалентные оценки на емкости образа и прообраза (см. ниже лемму 55).

В следующей лемме опишем свойства ψ и усилим леммы 46, 48, 50.

Лемма 54 [5, лемма 7.8]. 1. *Пусть $f \in L^1_{\nu,\varphi(F)}(D')$ — полунепрерывная снизу функция. Если $g = \varphi^* f$ — уточненная функция в $L^1_{\nu,F}(D)$, то $g(x) \geq f \circ \psi(x)$ квазивсюду на $D_F \cap \psi^{-1}(D'_F)$.*

2. *Пусть $\Sigma \subset D'_F$. Если $\overline{\mathrm{Cap}}\big(\Sigma; L^1_{\nu,\varphi(F)}(D')\big) = 0$, то*

$$\overline{\mathrm{Cap}}\big(\psi^{-1}(\Sigma) \cap D_F; L^1_{\nu,F}(D)\big) = 0.$$

3. *Если $f \in L^1_{\nu,\varphi(F)}(D') \cap C(D')$, то уточненная функция $\varphi^* f$ совпадает с функцией $f \circ \psi$ квазивсюду на $D_F \cap \psi^{-1}(D'_F)$.*

4. *Пусть квазивсюду в* D'_F *выполнено* $f(y)=\sum\limits_{k=1}^{\infty}f_k(y)$, *где* $f_k\in L^1_{\nu,\varphi(F)}(D')\cap C(D')$ *и* $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\big\|f_k\mid L^1_{\nu,\varphi(F)}(D')\big\|<\infty$. *Тогда уточненная функция* φ^*f *совпадает с суммой* $\sum\limits_{k=1}^{\infty}(f\circ\psi)(x)$ *квазивсюду на* $D_F\cap\psi^{-1}(D'_F)$.

5. *Для всякой уточненной функции* $f\in L^1_{\nu,\varphi(F)}(D')$ *уточненная функция* $g=\varphi^*f$ *совпадает с композицией* $f\circ\psi$ *квазивсюду на* $D_F\cap\psi^{-1}(D'_F)$.

6. *Для произвольных множеств* $A\subset D_F$ *и* $B\subset D'_F$ *таких, что* $\psi(A)\subset D'_F$, *имеют место оценки*

$$\overline{\mathrm{Cap}}\big(\psi^{-1}(B);L^1_{\nu,F}(D)\big)\le K^\nu\,\overline{\mathrm{Cap}}\big(B;L^1_{\nu,\varphi(F)}(D')\big),\tag{25}$$

$$\overline{\mathrm{Cap}}\big(A\cap\psi^{-1}(D'_F);L^1_{\nu,F}(D)\big)\le K^\nu\,\overline{\mathrm{Cap}}\big(\psi(A)\cap D'_F;L^1_{\nu,\varphi(F)}(D')\big),\tag{26}$$

где $K=\max(\|\varphi^*\|,\|\varphi^{*-1}\|)$.

Доказательство. 1. Имеем $g(x)\ge f\circ\psi(x)$ для п. в. $x\in D_F\cap\psi^{-1}(D'_F)$ (по крайней мере в точках $x\in T$). Для произвольного $\varepsilon>0$ выберем открытое множество $U_\varepsilon\subset D_F$ такое, что ψ непрерывно на $D_F\setminus U_\varepsilon$ и $\mathrm{Cap}\big(U_\varepsilon;L^1_{\nu,F}(D)\big)<\varepsilon$. По следствию 32 имеем также $\overline{\mathrm{Cap}}\big(\widetilde{U}_\varepsilon;L^1_{\nu,F}(D)\big)<\varepsilon$. Заметим, что все точки дополнения $D_F\setminus\widetilde{U}_\varepsilon$ являются точками положительной плотности, а вслед за ними таковыми будут и все точки множества $(D_F\cap\psi^{-1}(D'_F))\setminus\widetilde{U}_\varepsilon$, так как $|D_F\setminus\psi^{-1}(D'_F)|=0$.

Композиция $f\circ\psi(x)$ полунепрерывна снизу во всех точках множества $(D_F\cap\psi^{-1}(D'_F))\setminus U_\varepsilon$. По лемме 46 получаем $g(x)\ge f\circ\psi(x)$ квазивсюду на $(D_F\cap\psi^{-1}(D'_F))\setminus\widetilde{U}_\varepsilon$. В силу произвольности ε имеем $g(x)\ge f\circ\psi(x)$ квазивсюду на $D_F\cap\psi^{-1}(D'_F)$.

2. Пусть $f\in L^1_{\nu,\varphi(F)}(D')$ — полунепрерывная снизу функция, построенная в лемме 39. По п. 1 леммы уточненная функция $g=\varphi^*f$ не меньше функции $f\circ\varphi$ квазивсюду на $D_F\cap\psi^{-1}(D'_F)$. В частности, для квазивсех точек $x\in\varphi^{-1}(\Sigma)\cap D_F\cap\psi^{-1}(D'_F)=\varphi^{-1}(\Sigma)\cap D_F$ имеем $g(x)=\infty$. Из леммы 19 получаем $\mathrm{Cap}\big(\varphi^{-1}(\Sigma)\cap D_F;L^1_{\nu,F}(D)\big)=0$.

3. Если $g=\varphi^*f$ — уточненная функция в $L^1_{\nu,F}(D)$, то в силу утверждения 1 леммы одновременно имеем $g(x)\ge f\circ\psi(x)$ и $-g(x)\ge -f\circ\psi(x)$ квазивсюду на $D_F\cap\psi^{-1}(D'_F)$. Отсюда получаем равенство $g(x)=f\circ\psi(x)$ квазивсюду на $D_F\cap\psi^{-1}(D'_F)$.

4. Пусть $f_k\in L^1_{\nu,\varphi(F)}(D')\cap C(D')$, $f(y)=\sum\limits_{k=1}^{\infty}f_k(y)$ квазивсюду на D'_F и $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\big\|f_k\mid L^1_{\nu,\varphi(F)}(D')\big\|<\infty$. В силу утверждения 2 леммы ряд

$$f\circ\psi(x)=\sum_{k=1}^{\infty}f_k\circ\psi(x)\tag{27}$$

сходится квазивсюду на $D_F\cap\psi^{-1}(D'_F)$. Кроме того,

$$\sum_{k=1}^{\infty}\big\|f_k\circ\psi\mid L^1_{\nu,\varphi(F)}(D')\big\|\le K\sum_{k=1}^{\infty}\big\|f_k\mid L^1_{\nu,\varphi(F)}(D')\big\|<\infty.\tag{28}$$

Из (28) известным способом (см., например, [5]) выводим, что ряд (27) сходится равномерно на D_F вне некоторого открытого множества сколь угодно малой емкости. Таким образом, функция $f\circ\psi$ уточненная, и, следовательно, $\varphi^*f(x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty}(f\circ\psi)(x)$ квазивсюду на $D_F\cap\psi^{-1}(D'_F)$.

5. Пусть $f_k\in L^1_{\nu,\varphi(F)}(D')$ — последовательность непрерывных функций, сходящаяся к функции f всюду, за исключением множества Σ нулевой внешней емкости. По утверждениям 2 и 4 леммы последовательность уточненных функций $g_k=\varphi^*f_k$ сходится квазивсюду к уточненной функции $g=\varphi^*f$. Уточненные функции $g_k=\varphi^*f_k$ согласно утверждению 3 леммы совпадают с функциями $f_k\circ\varphi|_{D_F\cap\psi^{-1}(D'_F)}$ квазивсюду на $D_F\cap\psi^{-1}(D'_F)$. Таким образом, уточненная функция $g=\varphi^*f$ совпадает с функцией $f\circ\psi$ квазивсюду на $D_F\cap\psi^{-1}(D'_F)$.

6. Пусть $f_B\in L^1_{\nu,\varphi(F)}(D')$ — емкостная функция для множества B (см. теорему 25), т. е. $\overline{\operatorname{Cap}}\big(B;L^1_{\nu,\varphi(F)}(D')\big)=\big\|f_B\mid L^1_{\nu,\varphi(F)}(D')\big\|^{\nu}$. Множество $\{y\in B\mid f(y)<1\}$ имеет нулевую емкость (по утверждению 2 леммы). Поэтому для уточненной функции $g=\varphi^*f_B$ выполнено следующее свойство: $g(x)\geq 1$ квазивсюду на $\psi^{-1}(B)$. Из соотношения $\big\|g\mid L^1_{\nu,F}(D)\big\|\leq K\big\|f_B\mid L^1_{\nu,\varphi(F)}(D')\big\|$ выводим цепочку неравенств

$$\begin{aligned}\overline{\operatorname{Cap}}\big(\psi^{-1}(B);L^1_{\nu,F}(D)\big)&\leq\big\|g\mid L^1_{\nu,F}(D)\big\|^{\nu}\\ &\leq K^{\nu}\big\|f_B\mid L^1_{\nu,\varphi(F)}(D')\big\|^{\nu}=K^{\nu}\overline{\operatorname{Cap}}\big(B;L^1_{\nu,\varphi(F)}(D')\big),\end{aligned}$$

откуда следует оценка (25).

Пусть $f_{\psi(A)}\in L^1_{\nu,\varphi(F)}(D')$ — емкостная функция для множества $\psi(A)\cap D'_F$. Множество $\{y\in B\mid f_{\psi(A)}(y)<1\}$ имеет нулевую емкость (по утверждению 2 леммы). Поэтому для уточненной функции $g=\varphi^*f_{\psi(A)}$ выполнено следующее свойство: $g(x)\geq 1$ квазивсюду на $A\cap\psi^{-1}(D'_F)$. Из соотношения $\big\|g\mid L^1_{\nu,F}(D)\big\|\leq K\big\|f_{\psi(A)}\mid L^1_{\nu,\varphi(F)}(D')\big\|$ выводим

$$\begin{aligned}\overline{\operatorname{Cap}}\big(A\cap\psi^{-1}(D'_F);L^1_{\nu,F}(D)\big)&\leq\big\|g\mid L^1_{\nu,F}(D)\big\|^{\nu}\\ &\leq K^{\nu}\big\|f_{\psi(A)}\mid L^1_{\nu,\varphi(F)}(D')\big\|^{\nu}=K^{\nu}\overline{\operatorname{Cap}}\big(\psi(A)\cap D'_F;L^1_{\nu,\varphi(F)}(D')\big),\end{aligned}$$

что влечет (26). $\square$

Далее фиксируем счетную систему

$$\mathscr{B}=\{B_j\}\tag{29}$$

шаров в D_F, составляющую базу открытого множества D_F. Будем считать, что шары, входящие в систему (29), обладают следующими свойствами:

1) $B_j\Subset D_F$ для всех $j\in\mathbb{N}$;

2) вместе с каждым шаром $B_j=B_j(x_j,r_j)$ система $\mathscr{B}$ содержит также счетный набор шаров с центром в точке x_j и радиусами вида $2^{-k}\operatorname{dist}(x_j,D_F)$, $k\in\mathbb{N}$.

Лемма 55 [5, лемма 7.9]. *Существуют некоторое множество $S_\psi\subset D_F$ нулевой емкости и отображение $\varphi_0: D_F\setminus S_\psi\to\overline{D'_F}$ такие, что $\varphi_0(x)$ совпадает с $\psi(x)$ для квазивсех на $x\in D_F$ Для отображения φ_0 справедливы все утверждения леммы 54, а также оценка*

$$\overline{\operatorname{Cap}}\big(\varphi_0(B_j)\cap D'_F;L^1_{\nu,\varphi(F)}(D')\big)\leq K^{-\nu}\overline{\operatorname{Cap}}\big(B_j;L^1_{\nu,F}(D)\big)\tag{30}$$

для любого шара B_j системы (29).

Доказательство. Пусть $B\in\mathscr{B}$ — произвольный шар счетной базы окрестностей (29), а $g_B\in A(B)$ — емкостная функция шара B (см. теорему 25).

Поскольку φ^* — изоморфизм (см. лемму 14), существует уточненная функция $f_B \in L^1_{\nu,\varphi(F)}(D')$ такая, что $g_B(x) = f_B \circ \psi(x)$ для квазивсех $x \in D_F \cap \psi^{-1}(D'_F)$ по утверждению 3 леммы 54.

Рассмотрим множество $\Sigma_B = \{x \in B \cap \psi^{-1}(D'_F) : f_B(\psi(x)) < 1\}$. Тогда в силу того, что $f(\psi(x)) = g(x) \geq 1$ для квазивсех $x \in B \cap \psi^{-1}(D'_F)$, имеем $\overline{\mathrm{Cap}}\bigl(\Sigma_B; L^1_{\nu,F}(D)\bigr) = 0$.

Так как $\psi((B \cap \psi^{-1}(D'_F)) \setminus \Sigma_B) = (\psi(B) \cap D'_F) \setminus \psi(\Sigma_B) \subset D'_F$, функция f_B допустимая для множества $(\psi(B) \cap D'_F) \setminus \psi(E_B) \subset D'_F$, т. е. $f \in A((\psi(B) \cap D'_F) \setminus \psi(\Sigma_B))$. Поэтому

$$\overline{\mathrm{Cap}}\bigl(\psi((B \cap \psi^{-1}(D'_F)) \setminus \Sigma_B); L^1_{\nu,\varphi(F)}(D')\bigr) \leq \bigl\| f_B \mid L^1_{\nu,\varphi(F)}(D') \bigr\|^\nu \\ \leq K^{-\nu} \bigl\| g_B \mid L^1_{\nu,F}(D) \bigr\|^\nu = K^{-\nu} \overline{\mathrm{Cap}}\bigl(B; L^1_{\nu,F}(D)\bigr). \quad (31)$$

Полагаем отображение $\varphi_0(x)$ равным $\psi(x)$ на множестве $D_F \setminus \bigcup\limits_{B_j \in \mathscr{B}} \Sigma_{B_j}$ и не определенным на множестве $\bigcup\limits_{B_j \in \mathscr{B}} \Sigma_{B_j}$. По лемме 16 (п. 6) имеем

$$\overline{\mathrm{Cap}}\Bigl(\bigcup_{B_j \in \mathscr{B}} \Sigma_B; L^1_{\nu,F}(D)\Bigr) = 0,$$

поэтому отображения φ_0 и ψ совпадают квазивсюду в D_F.

Таким образом, отображение определено на $D_F \setminus S_\psi$, где

$$S_\psi = S_\varphi \cup \bigcup_{B_j \in \mathscr{B}} \Sigma_{B_j}, \quad (32)$$

а множество S_φ определено формулой (24). Справедливость всех утверждений леммы 54 для отображения φ_0 проверяется непосредственно. $\square$

Теперь в качестве образа $\varphi_0(V)$ произвольного множества $V \subset D_F$ понимается образ $\psi\bigl(V \setminus S_\psi\bigr)$.

4.3. Топологические свойства отображения φ_0. В этом пункте продолжим изучения свойств квазинепрерывного отображения φ_0. Отметим, что шары $B(x,r)$ и сферы $S(x,r)$ рассматриваются в метрике Карно — Каратеодори.

Предложение 56 [25, предложение 5]. 1. *Отображение φ_0 определено и непрерывно во всех точках сферы $S(x,r)$ для п. в. $r \in (0, \mathrm{dist}(x, \partial D_F))$.*

2. *Отображение φ_0 непрерывно на почти всех интегральных линиях горизонтальных векторных полей: для каждого шара $B(x,r) \subset D_F$ и почти всех интегральных линий $\gamma \subset B(x,r)$ горизонтального векторного поля X_i, $i = 1, \dots, n$, отображение φ_0 определено и непрерывно во всех точках интегральной кривой γ.*

Предложение 57. *Существует множество нулевой меры $\Sigma \subset D_F$ такое, что в сколь угодно малых окрестностях точек $x_1, x_2 \in B \setminus \Sigma$, где $B \subset D_F$ — произвольный открытый шар, найдутся точки, которые можно соединить кривой $\gamma \subset B$, на которой отображение φ_0 непрерывно.*

Доказательство. Шаг 1. По лемме 1.40 из [26] найдутся постоянные $C > 0$ и $N \in \mathbb{N}$ такие, что любые две точки $x_1, x_2 \in \mathbb{G}$ можно соединить ломаной $\sigma = \sigma_1 \cup \sigma_2 \cup \dots \cup \sigma_N$, состоящей из отрезков интегральных линий горизонтальных векторных полей. При этом длина σ_i не превосходит $Cd(x_1, x_2)$.

Шаг 2. В качестве множества нулевой меры $\Sigma \subset D_F$ возьмем совокупность всех точек в D_F, не принадлежащих объединению всех интегральных линий горизонтальных векторных полей X_i, $i = 1, \dots, n$, на каждой из которых отображение φ_0 непрерывно (см. предложение 56).

Шаг 3. Пусть $x_1, x_2 \in B \setminus \Sigma$. Рассмотрим непрерывную кривую $\Gamma \subset B$, соединяющую точки x_1 и x_2. Обозначим

$$R_\Gamma = \frac{\operatorname{dist}(\Gamma, \partial B)}{NC}.$$

Покроем кривую Γ конечным числом шаров $B_j \subset B$ с равными радиусами R_Γ и выберем точки $x_1 = y_1, y_2, \dots, y_{l+1} = x_2$ на этой кривой таким образом, чтобы две соседние точки y_j, y_{j+1} принадлежали шару $\{B_j\}$ (при этом некоторые шары могут повторяться). В силу выбора подходящего радиуса шара $\{B_j\}$ точки y_j, y_{j+1} можно соединить кривой $\gamma_j \subset B$, построенной на первом шаге доказательства. Составная кривая $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \dots \cup \gamma_l$ может и не быть искомой, поскольку некоторые точки совокупности $y_2, \dots, y_l$ могут принадлежать Σ.

Шаг 4. Для построения искомой кривой возьмем шар $B(y_1, \varepsilon)$ настолько малого радиуса, что трубчатая окрестность $\bigcup\limits_t B(\gamma(t), \varepsilon)$ кривой γ принадлежит B. Для любого ε в этой трубчатой окрестности найдется кривая, составленная из интегральных линий горизонтальных векторных полей, на каждой из которых отображение φ_0 непрерывно. Начальная точка такой кривой принадлежит шару $B(x_1, \varepsilon)$, а конечная — шару $B(x_2, \varepsilon)$.

Так как ε может быть взято произвольно малым, доказательство предложения завершено. $\square$

Пусть $x \in T \cap D_F$. Введем обозначение

$$\widehat{B}(x, r) = \Big\{ \bigcup_{\rho \in (0,r)} S(x, \rho) \mid \text{отображение } \varphi_0 : S(x, \rho) \to \mathbb{G} \text{ непрерывно} \Big\} \subset D_F. \tag{33}$$

Таким образом, множество $\widehat{B}(x, r)$ отличается от шара $B(x, r)$ лишь тем, что из шара $B(x, r)$ удалены все сферы $S(x, \rho)$, $\rho \in \sigma_{x,r} \subset (0, r)$, на которых отображение φ_0 разрывно, причем совокупность $\sigma_{x,r}$ таких радиусов имеет нулевую меру на интервале $(0, r)$.

Лемма 58. *Пусть дана последовательность положительных чисел $\{r_k\}$, сходящаяся к 0 при $k \to \infty$. Пусть еще $x \in D_F$ и существует последовательность $u_k \in \widehat{B}(x, r_k) \cap D_F$, для которой $\varphi_0(u_k) \to y \in D'_F$ при $k \to \infty$, где y — некоторая точка.*

Тогда образы $\varphi_0(\widehat{B}(x, r_k))$ стягиваются к точке $y \subset D'_F$ при $k \to \infty$:

$$\{y\} = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} \overline{\varphi_0(\widehat{B}(x, r_k))} \in D'_F. \tag{34}$$

Доказательство. Очевидно, равенство (34) эквивалентно следующему:

$$\sup_{z \in \widehat{B}(x, r_k) \cap D_F} d(\varphi_0(z), y) \to 0 \tag{35}$$

при $k \to \infty$. Пусть вопреки доказываемому (35) не выполняется. Тогда существуют число $\vartheta > 0$ и последовательность радиусов $\varkappa_k \in (0, r_k) \setminus \sigma_{x, r_k}$, для которых

$$\operatorname{diam}(\{y\} \cup \varphi_0(S(x, \varkappa_k))) = \sup_{z \in S(x, \varkappa_k) \cap D_F} d(\varphi_0(z), y) \geq \vartheta, \quad k \in \mathbb{N}. \tag{36}$$

Поскольку $u_k \in \widehat{B}(x, r_k)) \cap D_F$, то $u_k \in S(x, \tau_k)$, где $\tau_k \in (0, r_k) \setminus \sigma_{x,r_k}$ и $\tau_k \to 0$ при $k \to \infty$.

Понятно, что каждый шар $B(x, r_k)$ при достаточно большом k содержится в некотором шаре $B_k = B(x_{j_k}, \rho_{j_k})$ совокупности (29) таком, что $x_{j_k} \in B(x, r_k)$ и $\rho_{j_k} > 2r_k$ (последнее неравенство гарантирует включение $B(x, r_k) \subset B_k$), при этом $\rho_{j_k} \to 0$ при $k \to \infty$ (т. е. с уменьшением r_k до нуля ρ_{j_k} также уменьшается до нуля) (см. выше описание совокупности (29)).

Для каждого $k \in \mathbb{N}$ рассмотрим еще кривую $\gamma_k \subset B_k$ из предложения 57 с концевыми точками в шаре $B(x, \min(\tau_k, \varkappa_k))$ и дополнении $B_k \setminus B(x, r_k)$, в точках которой отображение φ_0 определено и непрерывно.

Обозначим символом K_k компактное множество $S(x, \tau_k) \cup S(x, \varkappa_k) \cup \gamma_k$. Имеем включение $K_k \subset B_k$. Компакт K_k связен, и отображение $\varphi_0 : K_k \to \overline{D'_F}$ непрерывно.

При вышеописанном выборе компакта K_k и шаров $B_k = B(x_{j_k}, \rho_{j_k})$ с учетом соотношения (30) имеем следующую цепочку неравенств:

$$\begin{aligned}\overline{\operatorname{Cap}}\big(\varphi_0(K_k) \cap D'_F; L^1_{\nu,\varphi(F)}(D')\big) &\le \overline{\operatorname{Cap}}\big(\varphi_0(\widehat{B}(x, r_k)) \cap D'_F; L^1_{\nu,\varphi(F)}(D')\big) \\ &\le \overline{\operatorname{Cap}}\big(\varphi_0(B_k) \cap D'_F; L^1_{\nu,\varphi(F)}(D')\big) \\ &\le K^{-\nu}\overline{\operatorname{Cap}}\big(B_k; L^1_{\nu,F}(D)\big) = O\left(\left(\ln \frac{2}{\rho_{j_k}}\right)^{1-\nu}\right) = o(1) \quad (37)\end{aligned}$$

при $k \to \infty$ (см. замечание 38). Из (37) выводим $\overline{\operatorname{Cap}}\big(\varphi_0(K_k) \cap D'_F; L^1_{\nu,\varphi(F)}(D')\big) \to 0$ при $k \to \infty$. Применяя теперь теорему 40 к компактному множеству $\varphi_0(K_k)$, получаем $\operatorname{diam} \varphi_0(K_k) \to 0$ при $k \to \infty$. С учетом условия $\varphi_0(u_k) \to y \in D'_F$ при $k \to \infty$ имеем $\operatorname{diam}(\{y\} \cap \varphi_0(K_k)) \to 0$ при $k \to \infty$. Последнее противоречит (36), поскольку $S(x, \varkappa_k) \subset K_k$. $\square$

В следующем утверждении покажем, что образы концентрических сфер, на которых отображение φ_0 непрерывно, стягиваются в точку при стремлении радиуса к нулю.

Следствие 59. *Пусть $x \in T \cap D_F$. Тогда*

$$\sup_{y \in \varphi_0(\widehat{B}(x,r)) \cap D_F} d(y, \varphi_0(x)) \to 0 \tag{38}$$

при $r \to 0$.

Доказательство. Фиксируем k, для которого $x \in T_k \cap D_F$. Пусть вопреки доказываемому (38) не выполняется. Тогда существуют число $\vartheta > 0$ и последовательность $r_l \to 0$ при $l \to \infty$ такие, что $\sup\limits_{y \in \varphi_0(\widehat{B}(x,r_l)) \cap D_F} d(y, \varphi_0(x)) \ge 2\vartheta$ для всех $l \in \mathbb{N}$. Отсюда извлекаем последовательность радиусов $\varkappa_l \in (0, r_l) \setminus \sigma_{x,r_l}$, для которой

$$\sup_{y \in \varphi_0(S(x,\varkappa_l)) \cap D_F} d(y, \varphi_0(x)) \ge \vartheta, \quad l \in \mathbb{N}. \tag{39}$$

Поскольку x — точка положительной плотности, для всех r_l найдется $\tau_l \in (0, r_l) \setminus \sigma_{x,r_l}$ такое, что $S(x, \tau_l) \cap T_k \ne \varnothing$. В силу непрерывности отображения φ_0 на $T_k \cap D_F$ (см. предложение 56) для любого выбора точек $u_l \in S(x, \tau_l) \cap T_k \ne \varnothing$ имеем

$$u_l \to x \quad \text{и} \quad \varphi_0(u_l) \to y = \varphi_0(x) \in D'_F \quad \text{при } l \to \infty. \tag{40}$$

Стало быть, для последовательности u_l выполнены все условия леммы 58, из заключения которой выводим (38). $\square$

Из предложения 56 и следствия 59 выводим следующие свойства отображения φ_0.

Следствие 60. *Пусть $x \in T \cap D_F$. Для любого достаточно малого $\rho > 0$ найдется число $\delta_{x,\rho} > 0$ такое, что*

1) *для сфер $S(x,r) \subset D_F$ радиуса $r \in (0, \delta_{x,\rho}) \setminus \sigma_{x,r}$ их образы $\varphi_0(S(x,r))$ содержатся в шаре $B(\varphi_0(x), \rho) \subset D'_F$, т. е.*

$$\varphi_0(\widehat{B}(x, \delta_{x,\rho})) \subset B(\varphi_0(x), \rho) \subset D'_F; \tag{41}$$

2) *для почти всех интегральных линий γ горизонтальных векторных полей образы $\varphi_0(\gamma \cap B(x, \delta_{x,\rho}))$ содержатся в шаре $B(\varphi_0(x), \rho) \subset D'_F$.*

Следствие 61. *Пусть $x \in T \cap D_F$. Для шаров, удовлетворяющих соотношению (41), справедливо следующее свойство: для любой точки $y \in B(x, \delta_{x,\rho})$ образы $\varphi_0(\widehat{B}(y, \tau))$ стягиваются к единственной точке $z \in \overline{B(\varphi_0(x), \rho)} \subset D'_F$ при $\tau \to 0$.*

Доказательство. Фиксируем произвольную последовательность $\tau_k \to 0$ при $k \to \infty$. Для $k \in \mathbb{N}$ можно найти точку $u_k \in B(x, \delta_{x,\rho}) \cap \widehat{B}(y, \tau)$. Имеем следующие свойства: $u_k \to x$ при $k \to \infty$, а $\varphi_0(u_k) \in \overline{B(\varphi_0(x), \rho)} \subset D'_F$. Переходя к подпоследовательности, можно считать, что $\varphi_0(u_k) \to y \in D'_F$. Стало быть, для последовательности u_k выполнены все условия леммы 58, из заключения которой выводим утверждения следствия 61. $\square$

Определение 62. Пусть $x \in T \cap D_F$. Для достаточно малого $\rho > 0$ найдем по следствию 60 число $\delta_{x,\rho} > 0$, для которого будет выполняться следующее включение:

$$\varphi_0(\widehat{B}(x, \delta_{x,\rho})) \subset B(\varphi_0(x), \rho) \subset D'_F.$$

Всякая точка $y \in B(x, \delta_{x,\rho})$ либо принадлежит пересечению $T \cap D_F$, либо ему не принадлежит. В первом случае имеем $\lim\limits_{z \to y, z \in \widehat{B}(y, \delta_1)} \varphi_0(z) = \varphi_0(y)$, где δ_1 — достаточно малое положительное число. Во втором случае значение отображения φ_0 в точке y не задано, но по следствию 61 определен предел

$$\lim_{z \to y, z \in \widehat{B}(y, \delta_2)} \varphi_0(z) \in D'_F,$$

который возьмем в качестве $\varphi_0(y)$ (здесь δ_2 — достаточно малое положительное число).

Следовательно, во всех точках шара $B(x, \delta_{x,\rho})$ определено отображение, которое обозначим тем же символом φ_0. Это отображение имеет следующее свойство:

$$\varphi_0(y) \in \overline{B(\varphi_0(x), \rho)} \subset D'_F \quad \text{для любой точки } y \in B(x, \delta_{x,\rho}), \tag{42}$$

более того, в этом случае

$$\{\varphi_0(y)\} = \bigcap_{r \to 0} \overline{\varphi_0(\widehat{B}(y, r))} \in D'_F.$$

Предложение 63. *Отображение* $\varphi_0 : B(x,\delta_{x,\rho}) \to \overline{B(\varphi_0(x),\rho)} \subset D'_F$, *где* $x \in T\cap D_F$, *непрерывно.*

Доказательство. Случай 1: пусть $y \in B(x,\delta_{x,\rho})\cap T\cap D_F$. В силу определения 62 для достаточно малого $\tau > 0$ существует число $\delta_{y,\tau} > 0$, для которого в силу (42) будут выполняться следующие включения: $\varphi_0(\widehat{B}(y,\delta_{y,\tau})) \subset B(\varphi_0(y),\tau) \subset \overline{B(\varphi_0(x),\rho)} \subset D'_F$, что и доказывает непрерывность отображения φ_0 в точке $y \in B(x,\delta_{x,\rho})\cap T\cap D_F$.

Случай 2: пусть $y \in B(x,\delta_{x,\rho})\setminus(T\cap D_F)$. В силу определения 62 для достаточно малого $\tau > 0$ существует число $\delta_{y,\tau} > 0$, для которого будут выполняться следующие включения: $\varphi_0(\widehat{B}(y,\delta_{y,\tau})) \subset B(\varphi_0(y),\tau) \subset \overline{B(\varphi_0(y),\tau)} \subset D'_F$.

Так же, как и предыдущем случае, для любой точки $z \in B(y,\delta_{y,\tau})$ имеем

$$\varphi_0(z) \in \overline{B(\varphi_0(y),\tau)} \subset D'_F.$$

Отсюда аналогично предыдущему получаем непрерывность отображения φ_0 в точке $y \in B(x,\delta_{x,\rho})\setminus(T\cap D_F)$. $\square$

Предложение 64. *Отображения*

$$\varphi_0 : B(x,\delta_{x,\rho}) \to \overline{B(\varphi_0(x),\rho)}, \quad \varphi_0 : B(y,\delta_{y,\rho}) \to \overline{B(\varphi_0(y),\rho)},$$

где $x,y \in T\cap D_F$, *совпадают на пересечении* $B(x,\delta_{x,\rho})\cap B(y,\delta_{y,\rho})$, *если оно непустое.*

Доказательство. В соответствии с определением 62 значение отображения φ_0 в точке $z \in B(x,\delta_{x,\rho})\cap B(y,\delta_{y,\rho})$ можно определить, исходя либо из отображения $\varphi_0 : B(x,\delta_{x,\rho}) \to \overline{B(\varphi_0(x),\rho)}$, либо из отображения $\varphi_0 : B(y,\delta_{y,\rho}) \to \overline{B(\varphi_0(y),\rho)}$. Найдется шар $B(z,r_z) \subset B(x,\delta_{x,\rho})\cap B(y,\delta_{y,\rho})$, на котором оба способа определения значения отображения φ_0 в точке z будут совпадать. $\square$

Определение 65. Для точек $x \in T\cap D_F$ рассмотрим семейство шаров $B(x,\delta_{x,\rho}) \subset D_F$ из определения 62. На открытом множестве

$$U = \bigcup_{x\in T\cap D_F} B(x,\delta_{x,\rho})$$

в силу предложения 64 корректно определено непрерывное отображение, которое будем обозначать символом $\widetilde{\varphi}_0$. При этом $U \subset D_F$ и $|D_F\setminus U| = 0$.

Очевидно, отображение $\widetilde{\varphi}_0 : U \to D'_F$ — продолжение отображения $\varphi_0 : T\cap D_F \to D'_F$ до непрерывного отображения на открытом множестве U. Так как $T\cap D_F$ всюду плотно в U, такое продолжение единственно.

Предложение 66. *Отображение* $\widetilde{\varphi}_0 : U \to D'_F$ — *гомеоморфизм.*

Доказательство. В силу предложения 13 отображение $\varphi : T\cap D_F \to D'_F$

1) инъективно,

2) имеет образ $\varphi(T\cap D_F)$, всюду плотный в D'_F, и $|D'_F\setminus\varphi(T\cap D_F)| = 0$,

3) обладает $\mathscr{N}$-свойством и $\mathscr{N}^{-1}$-свойством Лузина.

Следовательно, по лемме 14 обратное отображение $\varphi^{-1} : T' \to D_F$, где $T' = \varphi_0(T)$, порождает оператор композиции $\varphi^{*-1} : L^1_p(D)\cap C^\infty(D) \to L^1_p(D')$.

Применяя вышедоказанные результаты к отображению $\varphi^{-1} : T' \to D_F$, получаем непрерывное отображение $\widetilde{\varphi^{-1}}_0 : V \to D_F$, определенное на некотором открытом множестве $V \subset D'_F$ со значениями в D_F, при этом $|D'_F\setminus V| = 0$. Можно сделать так, что $\widetilde{\varphi}_0(U) = V$.

Поскольку $\varphi_0(T\cap D_F)$ всюду плотно в V, из вышеустановленного выводим инъективность отображения $\widetilde{\varphi}_0 : U \to V \subset D'_F$ и его гомеоморфность. $\square$

4.4. Квазиконформность отображения $\widetilde{\varphi}_0 : U \to V$. В этом пункте $U \subset D_F$ — открытое множество из определения 65, а $V = \widetilde{\varphi}_0(U)$. Основной результат настоящего пункта сформулирован в следующем утверждении.

Предложение 67. *Отображение $\widetilde{\varphi}_0 : U \to V$ квазиконформно.*

Доказательство этого утверждения можно найти в [27]. Однако мы приведем другие рассуждения, имеющие более широкую область применения.

Доказательство предложения 67, по существу, сводится к тому, чтобы установить абсолютную непрерывность отображения $\widetilde{\varphi}_0 : U \to V$ на почти всех интегральных линиях горизонтальных векторных полей (коротко $\varphi_0 \in \mathrm{ACL}(U)$) и поточечное неравенство

$$|D(x,\varphi)| \le K|J(x,\varphi)|^{\frac{1}{\nu}} \quad \text{п. в. в } U. \tag{43}$$

Поскольку $\widetilde{\varphi}_0 : U \to V$ — аппроксимативно дифференцируемый гомеоморфизм, из формулы (3) выводим, что якобиан $J(x,\varphi)$ локально интегрируем в U. Более того, в силу неравенства Гёльдера локально интегрируемой будет также и степень якобиана $J(x,\varphi)^{\frac{1}{\nu}}$.

Лемма 68 [6, лемма 19]. *Пусть $u \in \mathrm{Lip}_l(D') \cap L^1_\nu(D')$ и $\|u \mid L^1_\nu(D')\| \le 1$. Тогда*

$$|\nabla_{\mathscr{L}}(u\circ\varphi)|(x) \le KJ(x,\varphi)^{\frac{1}{\nu}} \quad \text{п. в. на } D, \tag{44}$$

где K — некоторая постоянная.

Лемма 69. *Пусть $D, D' \subset \mathbb{G}$. Если отображение $\varphi : D \to D'$ принадлежит классу IL^1_ν, то $\widetilde{\varphi}_0 \in W^1_{\nu,\mathrm{loc}}(U)$.*

Доказательство. Докажем, что $\widetilde{\varphi}_0 \in \mathrm{ACL}(U)$. Пусть $\{z_j\}$ — счетное всюду плотное множество точек в V. Зададим счетное семейство функций $d^r_{z_j} : V \to \mathbb{R}^+$, $d^r_{z_j}(y) = (r - d_{z_j}(y))^+$, где $r \in \mathbb{Q}^+ = \{x \in \mathbb{Q} \mid x > 0\}$, $(d_{z_j}(y) = d(z_j, y))$. Для каждой такой функции выполняется поточечное равенство $\varphi^* d^r_{z_j}(x) = d^r_{z_j} \circ \widetilde{\varphi}_0(x)$, $r \in \mathbb{Q}^+$, $j \in \mathbb{N}$, для всех точек $x \in U$.

Кроме того, каждая такая функция удовлетворяет условиям леммы 68. Поэтому

$$\left|\nabla_{\mathscr{L}}(d^r_{z_j}\circ\widetilde{\varphi}_0)\right|(x) \le CJ(x,\varphi)^{\frac{1}{\nu}}$$

для п. в. $x \in U$.

Рассмотрим слоение Γ_s открытого множества U, порожденное горизонтальным векторным полем X_s, и интегральную линию γ из этого слоения. Для почти всех кривых γ из слоения Γ_s выполнены следующие условия:

1) $\widetilde{\varphi}_0$ непрерывно на γ (предложение 56);

2) выполняется поточечное неравенство для измеримых функций, а именно $\left|\nabla_{\mathscr{L}}\big(\varphi^* d^r_{z_j}\big)\right|(t) \le KJ(t,\varphi)^{\frac{1}{\nu}}$, $r \in \mathbb{Q}^+$, $j \in \mathbb{N}$, п. в. на γ, и функция $J(t,\varphi)^{\frac{1}{\nu}}$ интегрируема на произвольной компактной части γ;

3) для п. в. $x_0 \in \gamma$ существует конечный предел $\frac{1}{d(x_0,x)} \int\limits_{[x_0,x]} J(t,\varphi)^{\frac{1}{\nu}}\, d\sigma$ при $x \to x_0$ по кривой γ, равный $J(x_0,\varphi)^{\frac{1}{\nu}}$ (здесь $[x_0,x] \subset \gamma$ — отрезок интегральной линии);

4) функции $\varphi^* d^r_{z_j}$ абсолютно непрерывны на γ для всех $j \in \mathbb{N}$ и $r \in \mathbb{Q}^+$.

Фиксируем кривую $\gamma \in \Gamma_s$, на которой выполняются все четыре свойства.

Пусть $x_0 \in U \cap \gamma$ — точка на кривой γ. Положим $z = \widetilde{\varphi}_0(x_0)$. Фиксируем подпоследовательность $\{z_{j_l}\}$ точек из $\{z_j\}$, сходящуюся к $z = \widetilde{\varphi}_0(x_0)$ (далее будем обозначать элементы этой подпоследовательности через z_l). Так как отображение $\widetilde{\varphi}_0$ непрерывно на γ в точке x_0, можно подобрать числа δ, r и L такие, что $\widetilde{\varphi}_0(B(x_0,\delta)\cap\gamma) \subset V$ (следствие 60) и $d^r_{z_l} \circ \widetilde{\varphi}_0(x) \neq 0$ для всех $l \geq L$ и всех точек $x \in B(x_0,\delta)\cap\gamma$.

Интегрируя функцию $KJ(x,\varphi)^{\frac{1}{\nu}}$ (где K не зависит от r, z) по части кривой γ от x_0 до x, где $x \in B(x_0,\delta)\cap\gamma$, выводим

$$\begin{aligned}
K \int\limits_{[x_0,x]} J(t,\varphi)^{\frac{1}{\nu}}\,dt &\geq \int\limits_{[x_0,x]} \bigl|\nabla_{\mathscr{L}}\bigl(\varphi^* d^r_{z_j}\bigr)\bigr|(t)\,dt \\
&\geq \bigl|d^r_{z_l}\circ\widetilde{\varphi}_0(x_0) - d^r_{z_l}\circ\widetilde{\varphi}_0(x)\bigr| = |r - d_{z_l}(\widetilde{\varphi}_0(x_0)) - r + d_{z_l}(\widetilde{\varphi}_0(x))| \\
&= |-d_{z_l}(\widetilde{\varphi}_0(x_0)) + d_{z_l}(\widetilde{\varphi}_0(x))| \to d_z(\widetilde{\varphi}_0(x)) = d(\widetilde{\varphi}_0(x_0),\widetilde{\varphi}_0(x)) \quad \text{при } l\to\infty.
\end{aligned}$$

Таким образом, получаем

$$d(\widetilde{\varphi}_0(x_0),\widetilde{\varphi}_0(x)) \leq K \int\limits_{[x_0,x]} J(t,\varphi)^{\frac{1}{\nu}}\,d\sigma \tag{45}$$

для всех $x \in B(x_0,\delta)\cap\gamma$. Из оценки (45) и абсолютной непрерывности интеграла выводим, что отображение $\widetilde{\varphi}_0$ абсолютно непрерывно на $B(x_0,\delta)\cap\gamma$.

В силу произвола в выборе горизонтального поля X_j, интегральной кривой $\gamma \in \Gamma_j$ и точки $z_0 \in \gamma$ отображение φ абсолютно непрерывно вдоль почти всех горизонтальных кривых.

Из (45) имеем

$$\frac{d(\widetilde{\varphi}_0(x_0),\widetilde{\varphi}_0(x))}{d(x_0,x)} \leq \frac{K}{d(x_0,x)} \int\limits_{[x_0,x]} J(t,\varphi)^{\frac{1}{\nu}}\,d\sigma. \tag{46}$$

Переходя к пределу при $x \to x_0$, получаем оценку

$$|X_s\widetilde{\varphi}_0(x_0)| \leq KJ(x_0,\varphi)^{\frac{1}{\nu}} \quad \text{п. в.} \tag{47}$$

Следовательно, $|X_s\varphi| \in L_{\nu,\mathrm{loc}}(D_F)$ для всех s, и поэтому $\widetilde{\varphi}_0 \in W^1_{\nu,\mathrm{loc}}(U)$. $\square$

Другие свойства отображений классов Соболева на группе Карно, в частности, формулу замены переменной, можно найти в [28].

Доказательство предложения 67. Принадлежность гомеоморфизма $\widetilde{\varphi}_0 : U \to V$ классу Соболева $W^1_{\nu,\mathrm{loc}}(U)$ доказана в лемме 69. Поточечное неравенство (43) вытекает из (47).

4.5. Локальная связность U и V. Обозначим $S = D_F \setminus U$. Пусть $x \in S$, тогда возможны два случая:

1) найдется $r_0 > 0$ такое, что $\overline{\widetilde{\varphi}_0(\widehat{B}(x,r))} \subset D'_F$ для всех $r < r_0$,

2) $\widetilde{\varphi}_0(S(x,r_k)) \cap \partial D'_F \neq \varnothing$ для некоторой последовательности $r_k \to 0$.

При выполнении случая 1 отображению $\widetilde{\varphi}_0$ можно приписать значение в точке x: полагаем

$$\widetilde{\varphi}_0(x) = \bigcap_{r\to 0} \overline{\widetilde{\varphi}_0(\widehat{B}(x,r))} \in D_F.$$

При таком задании значения $\widetilde{\varphi}_0(x)$ приходим к ситуации, аналогичной той, которая была рассмотрена в определении 62. Следовательно, отображение $\widetilde{\varphi}_0(x)$ можно задать не только в точке x, но и в точках некоторого шара $B(x,\delta_{x,\rho})$ способом, указанным в определении 62. Так же, как и в предложении 63, доказывается, что отображение $\widetilde{\varphi}_0 : B(x,\delta_{x,\rho}) \to D'_F$ непрерывно во всех точках шара $B(x,\delta_{x,\rho})$. Следовательно, области U и V можно расширить, а множество S сузить.

Далее считаем, что для всех точек $x \in S$ выполнено свойство 2.

Пусть $x \in S$. Тогда найдется последовательность $\{x_k \in U\}$, сходящаяся к x, такая, что $\widetilde{\varphi}_0(x_k) \to \partial D'$ при $k \to \infty$. В этом случае справедлива

Лемма 70. *Для любого шара $B(x,r) \subset D_F$ с центром $x \in S$ множество $B(x,r) \cap U$ связно.*

Доказательство. Предположим, что это не так и $B(x,r) \cap U$ состоит из нескольких компонент связности. Тогда образ $\widetilde{\varphi}_0(B(x,r))$ разделяется границей $\partial D'_F$ на несколько компонент связности: $\widetilde{\varphi}_0(B(x,r)) = V_1 \cup V_2 \cup \dots$ или $D'_F \setminus \widetilde{\varphi}_0(S(x,r)) = V_0 \cup V_1 \cup V_2 \cup \dots$.

Рассмотрим в области D_F гладкую срезку

$$\eta = \begin{cases} 1 & \text{на } B(x,r/2), \\ 0 & \text{вне } B(x,r). \end{cases}$$

Можно считать, что $\left|\widetilde{\varphi}_0^{-1}(V_1) \cap B(x,r/2)\right| > 0$. Построим функцию $g : D'_F \to \mathbb{R}$ такую, что

$$g(y) = \begin{cases} \eta \circ \widetilde{\varphi}_0^{-1}(y) & \text{на } V_1, \\ 0 & \text{на } V_0 \cup V_2 \cup V_3 \cup \dots. \end{cases} \tag{48}$$

Очевидно, g — непрерывная функция на V. Покажем, что $g \in L^1_{\nu,\varphi(F)}(D')$. Так как отображение $\varphi_0 : B(x,r) \cap U \to \varphi_0(B(x,r)) \cap V$ квазиконформно, функция g принадлежит $L^1_\nu(\varphi_0(B(x,r)) \cap V)$. Следовательно, g локально интегрируема и имеет суммируемые в степени ν обобщенные производные в $\varphi_0(B(x,r)) \cap V$. В частности, функция g абсолютно непрерывна на почти всех интегральных линиях горизонтальных векторных полей, и существуют производные $v_j = X_j g$ п. в. в $\varphi_0(B(x,r)) \cap V$, $j = 1, 2, \dots, n$. Остается показать, что v_j — обобщенная производная функции g в D'_F, т. е. выполнено равенство

$$\int\limits_{D'_F} g(y) \cdot X_j \psi(y)\, dy = -\int\limits_{D'_F} v_j \cdot \psi\, dy \tag{49}$$

для любой тестовой функции $\psi \in C_0^\infty(D'_F)$. По теореме Фубини имеем

$$\int\limits_{D'_F} g(y) \cdot X_j \psi(y)\, dy = \int\limits_{\mathrm{Pr}_j D'_F} dy_1 \dots \widehat{dy_j} \dots dy_N \int\limits_{\Gamma_j(y) \cap D'_F} g(y) \cdot X_j \psi(y)\, dy_j,$$

где $\mathrm{Pr}_j D'_F$ — проекция D'_F на гиперповерхность, трансверсальную векторному полю X_j, $\Gamma_j(y)$ — интегральная линия X_j, проходящая через точку $y \in \mathrm{Pr}_j D'_F$. Поскольку $g = 0$ на $V_0 \cup V_2 \cup V_3 \cup \dots$, получаем

$$\int\limits_{\Gamma_j(y) \cap D'_F} g(y) \cdot X_j \psi(y)\, dy_j = \int\limits_{\Gamma_j(y) \cap V_0 \cup V_1 \cap V_2 \cup \dots} g(y) \cdot X_j \psi(y)\, dy_j = \int\limits_{\Gamma_j(y) \cap V_1} g(y) \cdot X_j \psi(y)\, dy_j.$$

Пересечение $\Gamma_j(y)\cap V_1$ можно представить в виде счетного объединения кривых: $\Gamma_j(y)\cap V_1=\bigcup\limits_l \gamma_l$. Тогда

$$\int\limits_{\Gamma_j(y)\cap V_1} g(y)\cdot X_j\psi(y)\,dy_j=\sum_l\int\limits_{\gamma_l} g(y)\cdot X_j\psi(y)\,dy_j.$$

Применяя формулу интегрирования по частям, выводим

$$\int\limits_{\gamma_l} g(y)\cdot X_j\psi(y)\,dy_j=g(y)\psi(y)|_{\gamma_l(t_0^l)}^{\gamma_l(t_1^l)}-\int\limits_{\gamma_l} X_jg(y)\cdot\psi(y)\,dy_j.$$

Заметим, что $\gamma_l(t_0^l)\in\partial V_1$ и возможны два случая:

1) $\gamma_l\bigl(t_0^l\bigr)\in D'_F$, тогда $g\bigl(\gamma_l\bigl(t_0^l\bigr)\bigr)=0$,

2) $\gamma_l\bigl(t_0^l\bigr)\in\partial D'_F$, тогда $\psi\bigl(\gamma_l\bigl(t_0^l\bigr)\bigr)=0$.

Аналогично для точки $\gamma_l\bigl(t_1^l\bigr)$. Таким образом,

$$g(y)\psi(y)|_{\gamma_l(t_0^l)}^{\gamma_l(t_1^l)}=0,$$

и равенство (49) доказано. Тем самым $g\in L^1_{\nu,\varphi(F)}(D')$.

Далее, φ^*g принадлежит $L^1_{\nu,F}(D)$ и п. в. на $B(x,r/2)$ принимает только два значения (0 и 1). Следовательно, $\nabla\varphi^*g=0$ п. в. на $B(x,r/2)$, и, значит, $\varphi^*g=g\circ\widetilde{\varphi}_0$ — постоянная функция на $B(x,r/2)$. Полученное противоречие приводит к выводу: пересечение $B(x,r)\cap U$ связно. □

Аналогичное свойство выполняется и в образе.

Лемма 71. *Для любого шара $B(y,r)\subset D'_F$ с центром $y\in\varphi_0(S)$ пересечение $B(y,r)\cap V$ связное.*

4.6. Продолжение отображения $\widetilde{\varphi}_0$ на S и его свойства. В этом разделе нам понадобится следующая

Лемма 72. *Пусть даны кривые $\gamma_1,\gamma_2:[0,1)\to V$ и расстояние между ними положительное. Тогда никакая точка из D_F не может быть предельной точкой для каждого из прообразов $\beta_1=\widetilde{\varphi}_0{}^{-1}(\gamma_1)$ и $\beta_2=\widetilde{\varphi}_0{}^{-1}(\gamma_2)$.*

Доказательство. Пусть, напротив, найдется точка $y\in D_F$, предельная для прообразов $\widetilde{\varphi}_0{}^{-1}(\gamma_1)$ и $\widetilde{\varphi}_0{}^{-1}(\gamma_2)$: существует последовательность $t_k\in[0,1)$, $t_k\to1$ ($\tau_k\in[0,1)$, $\tau_k\to1$) при $k\to\infty$ такая, что $\beta_1(t_k)\to y$ ($\beta_2(\tau_k)\to y$) при $k\to\infty$. Рассмотрим непрерывную функцию $g\in L^1_\nu(D')$ такую, что $g=0$ на γ_1 и $g=1$ на γ_2. Тогда композиция $f=g\circ\widetilde{\varphi}_0:U\to\mathbb{R}$ — непрерывная функция, принимающая значение 0 на β_1 и 1 на β_2. Более того, $\varphi^*(g)\in L^1_\nu(D)$. Существование такой функции противоречит предложению 45. □

Покажем, что отображение можно продолжить на часть множества S (исключая те точки, образы которых могут переходить в бесконечно удаленную точку). Пусть $x\in S$. Возможны два случая.

1. Для некоторой последовательности $\{x_n\in U\}$, сходящейся к x, последовательность образов $\widetilde{\varphi}_0(x_n)$ сходится к некоторой точке $z\in\partial D'_F$.

2. Для любой $\{x_n\in U\}$, сходящейся к x, имеем $d(\widetilde{\varphi}_0(x_n),0)\to\infty$ (этот случай будет рассмотрен ниже отдельно).

Ниже докажем, что в первом случае отображение $\widetilde{\varphi}_0$ продолжается по непрерывности в точку $x\in S$.

Предложение 73. *Отображение $\widetilde{\varphi}_0 : U \to V$ продолжается по непрерывности во все точки $x \in S$, для каждой из которых существует последовательность $\{x_n \in U\}$, сходящаяся к x, такая, что последовательность образов $\widetilde{\varphi}_0(x_n)$ сходится к некоторой точке $z \in \partial D'_F$.*

Продолженное отображение инъективно.

Доказательство. Покажем, что предел z не зависит от выбора последовательности $\{x_n\}$. Пусть $U \ni x'_n \to x$ — другая последовательность и $\widetilde{\varphi}_0(x'_n) \to z' \in \partial D'_F$, причем $z \neq z'$. В силу локальной связности V можно построить две кривые $\gamma, \gamma' \subset V$, находящиеся на положительном расстоянии $\operatorname{dist}(\gamma, \gamma') \geq \delta > 0$ и проходящие через образы $\widetilde{\varphi}_0(x_n)$, $\widetilde{\varphi}_0(x'_n)$ соответственно (начиная с некоторого $n > n_0$). Тогда прообразы ${\widetilde{\varphi}_0}^{-1}(\gamma)$ и ${\widetilde{\varphi}_0}^{-1}(\gamma')$ будут иметь общую предельную точку $x \in D_F$. По лемме 72 получаем противоречие.

Доопределим отображение $\widetilde{\varphi}_0$ в точке x: $\widetilde{\varphi}_0(x) = z$. Таким образом, построили непрерывное продолжение отображения $\widetilde{\varphi}_0$ на множество S, за исключением тех точек, которые отображаются в бесконечно удаленную точку. Будем обозначать продолжение тем же символом.

Проверим инъективность отображения $\widetilde{\varphi}_0$. Допустим, что нашлась точка $z \in \overline{D'_F}$ такая, что $z = \widetilde{\varphi}_0(x_1) = \widetilde{\varphi}_0(x_2)$, где $x_1 \neq x_2$, $x_1, x_2 \in S$. Рассмотрим кривые γ_1, γ_2, проходящие через точки x_1, x_2 соответственно и находящиеся на положительном расстоянии ($\delta = \operatorname{dist}(\gamma_1, \gamma_2)$). Рассмотрим произвольные последовательности $\{x_n^1 \in U\}$, $\{x_n^2 \in U\}$ такие, что $x_n^i \to x_i$ при $n \to \infty$ и $x_n^i \in \gamma_i$. Построим последовательность кривых σ_n, соединяющих точки $\widetilde{\varphi}_0(x_n^1)$ и $\widetilde{\varphi}_0(x_n^2)$, так, что $\operatorname{diam} \sigma_n \to 0$. Тогда $\operatorname{Cap}\big(\widetilde{\varphi}_0^{-1}(\sigma_n); L^1_\nu(U)\big) \to 0$ и $\operatorname{diam} \widetilde{\varphi}_0^{-1}(\sigma_n) \to 0$. Приходим к противоречию, поскольку $\operatorname{diam} \widetilde{\varphi}_0^{-1}(\sigma_n) \geq \delta$. $\square$

Таким образом, от множества S остаются лишь точки, удовлетворяющие второму из описанных перед предложением 73 случаев. В следующем утверждении докажем, если множество S непусто, то оно состоит только из одной точки.

Лемма 74. *Может существовать самое большее одна точка $x_{\mathrm{inv}} \in S$ такая, что для любой последовательности $\{x_n\} \subset U$, сходящейся к x_{inv}, имеет место $d(\widetilde{\varphi}_0(x_n)) \to \infty$ при $n \to \infty$ (случай инверсии).*

Доказательство. Сначала покажем, что множество S имеет нулевую емкость. Выберем два шара $B(0, r_0)$, $B(0, R_k)$ такие, что $\varphi(F) \subset B(0, r_0)$, r_0 фиксировано, $R_k > r$ и $\lim\limits_{k\to\infty} R_k = \infty$. Заметим, что $S \subset \bigcap\limits_k \overline{\widetilde{\varphi}_0^{-1}(\mathbb{G} \setminus B(0, R_k))}$.

Имеем следующие неравенства:

$$\overline{\operatorname{Cap}}\big(S; L^1_{\nu,F}(D)\big) \leq \overline{\operatorname{Cap}}\big(\widetilde{\varphi}_0^{-1}(\mathbb{G} \setminus B(0, R_k)) \cap D_F; L^1_{\nu,F}(D)\big)$$
$$\leq K^\nu \overline{\operatorname{Cap}}\big((\mathbb{G} \setminus B(0, R_k) \cap D'_F; L^1_{\nu,\varphi(F)}(D')\big) \leq K^\nu \operatorname{Cap}\big(\mathbb{G} \setminus B(0, R_k); L^1_{\nu,B(0,r)}(\mathbb{G})\big).$$

Из [10, теоремы 6.6, 6.9] получаем, что емкость $\operatorname{Cap}\big(\mathbb{G} \setminus B(0, R); L^1_{\nu,B(0,r)}(\mathbb{G})\big)$ эквивалентна величине $\big(\ln \frac{R}{r_0}\big)^{1-\nu}$, следовательно,

$$\lim_{k\to\infty} \overline{\operatorname{Cap}}\big(\widetilde{\varphi}_0^{-1}(\mathbb{G} \setminus B(0, R_k)) \cap D_F; L^1_{\nu,F}(D)\big) = 0 \quad \text{и} \quad \overline{\operatorname{Cap}}\big(S; L^1_{\nu,F}(D)\big).$$

Таким образом, множество S имеет нулевую емкость. Покажем, что S не может состоять более чем из одной точки.

Пусть, напротив, нашлись две различные точки $x_1, x_2 \in S$, удовлетворяющие указанному свойству. Рассмотрим последовательности $\{x_n^1\}, \{x_n^2\} \subset U$, такие, что $\lim_{n\to\infty} x_n^1 = x_1$ и $\lim_{n\to\infty} x_n^2 = x_2$. Выберем сферы $S(x_1, r_1), S(x_2, r_2) \subset U$, на которых отображение $\widetilde{\varphi}_0$ непрерывно (см. предложение 56), таким образом, что $\overline{B}(x_1, r_1) \cap \overline{B}(x_2, r_2) = \varnothing$.

Поскольку $\widetilde{\varphi}_0$ — непрерывное и инъективное отображение, образ $\widetilde{\varphi}_0(S(x_1, r_1))$ разбивает $\mathbb{G}$ на две компоненты связности (ограниченную и неограниченную), при этом $\widetilde{\varphi}_0(B(x_1, r_1) \setminus S)$ принадлежит неограниченной компоненте, а $\widetilde{\varphi}_0(U \setminus B(x_1, r_1))$ — ограниченной компоненте.

С другой стороны, $B(x_2, r_2) \setminus S \subset U \setminus B(x_1, r_1)$, следовательно, $\widetilde{\varphi}_0(B(x_2, r_2) \setminus S)$ принадлежит ограниченной компоненте $\mathbb{G} \setminus \widetilde{\varphi}_0(S(x_1, r_1))$, что противоречит предположению $d\big(\widetilde{\varphi}_0\big(x_n^2\big)\big) \to \infty$ при $n \to \infty$. $\square$

В итоге получили непрерывное инъективное отображение $\widetilde{\varphi}_0 : D_F \setminus \{x_{\mathrm{inv}}\} \to \overline{D'_F}$.

Предложение 75. *Отображение $\widetilde{\varphi}_0 : D_F \setminus \{x_{\mathrm{inv}}\} \to \mathbb{G}$ гомеоморфно.*

Для доказательства достаточно проверить, что отображение $\widetilde{\varphi}_0 : D_F \setminus \{x_{\mathrm{inv}}\} \to \mathbb{G}$ открыто. Действительно, для любого шара $B(x, r) \subset D_F$ степень $\mu(\widetilde{\varphi}_0, B(x, r), \varphi_0(x))$ ненулевая. Отсюда выводим, что $\widetilde{\varphi}_0(x)$ — внутренняя точка образа.

Теперь можно доказать, что отображение $\widetilde{\varphi}_0$ принадлежит классу Соболева $W^1_{\nu,\mathrm{loc}}(D_F \setminus \{x_{\mathrm{inv}}\})$ (расширение леммы 69).

Лемма 76. *Пусть $D, D' \subset \mathbb{G}$. Если отображение $\varphi : D \to D'$ принадлежит классу IL^1_ν, то $\widetilde{\varphi}_0 \in W^1_{\nu,\mathrm{loc}}(D_F \setminus \{x_{\mathrm{inv}}\})$.*

Доказательство. Эта лемма — прямое следствие леммы 69, в условии которой в качестве U следует взять $D_F \setminus \{x_{\mathrm{inv}}\}$. $\square$

Из вышесказанного выводим

Предложение 77. *Отображение $\widetilde{\varphi}_0 : D_F \setminus \{x_{\mathrm{inv}}\} \to \mathbb{G}$ квазиконформно.*

Доказательство. Из последних утверждений вытекает, что гомеоморфизм $\widetilde{\varphi}_0$ принадлежит классу $W^1_\nu(D_F \setminus \{x_{\mathrm{inv}}\})$ и п. в. в $D_F \setminus \{x_{\mathrm{inv}}\}$ выполняется поточечное неравенство $|D(x, \widetilde{\varphi}_0)| \leq K|J(x, \varphi)|^{\frac{1}{\nu}}$, поскольку $|S| = 0$ (заметим, что $J(x, \varphi) = J(x, \widetilde{\varphi}_0)$ п. в.). Следовательно, отображение $\widetilde{\varphi}_0 : D_F \setminus \{x_{\mathrm{inv}}\} \to \mathbb{G}$ квазиконформно. $\square$

Предложение 78. *Отображение $\widetilde{\varphi}_0 : D \setminus \{x_{\mathrm{inv}}\} \to \mathbb{G}$ квазиконформно.*

Доказательство. Выберем другое замкнутое множество положительной меры $F_1 \subset T_{k_0}$ без изолированных точек, находящееся на положительном расстоянии от F и такое, что $x_{\{\mathrm{inv}\}} \notin F_1$. Повторяя вышеописанную процедуру, докажем квазиконформность отображения $\widetilde{\varphi}_0$ на открытом множестве $D \setminus \{x_{\mathrm{inv}}\}$. $\square$

4.7. Доказательство теоремы 2. Приведем доказательство основного результата данной работы.

Доказательство. Достаточность. Можно считать, что отображение $\varphi : D \to D'$ квазиконформное. По определению 3 этой работы квазиконформное отображение φ локально принадлежит классу Соболева ($\varphi \in W^1_{\nu,\mathrm{loc}}$). Кроме того, отображение φ $\mathscr{P}$-дифференцируемо и обладает $\mathscr{N}$-свойством и $\mathscr{N}^{-1}$-свойством Лузина [28].

Для произвольной функции $f \in L^1_\nu(D') \cap C^\infty(D')$ композиция $f \circ \varphi$ абсолютно непрерывна на почти всех интегральных линиях горизонтальных векторных полей в силу того, что отображение f является таковым. Более того, $\nabla_{\mathscr{L}}(f \circ \varphi) = D_h\varphi^T(x)\nabla_{\mathscr{L}} f(\varphi(x))$ [14, с. 263], где $D_h\varphi(x) = \{X_i\varphi_j(x)\}$, $i, j = 1, \ldots, n_1$, — горизонтальная часть $\mathscr{P}$-дифференциала. Отсюда имеем

$$\int\limits_D |\nabla_{\mathscr{L}}(f \circ \varphi)|^\nu \, dx = \int\limits_D |D_h\varphi^T(x)\nabla_{\mathscr{L}} f(\varphi(x))|^\nu \, dx$$
$$\leq \int\limits_D |D_h\varphi^T(x)|^\nu \cdot |\nabla_{\mathscr{L}} f(\varphi(x))|^\nu \, dx = \int\limits_D |\nabla_{\mathscr{L}} f|^\nu(\varphi(x)) \cdot |D_h\varphi(x)|^\nu \, dx$$
$$\leq K \int\limits_D |\nabla_{\mathscr{L}} f|^\nu(\varphi(x)) \cdot |J(x, \varphi)| \, dx = \int\limits_{D'} |\nabla_{\mathscr{L}} f|^\nu(y) \, dy.$$

Здесь мы воспользовались поточечным неравенством $|D_h\varphi(x)|^\nu \leq K|J(x, \varphi)|$ для п. в. $x \in D$ и формулой замены переменной (3).

В силу леммы 14 полученное неравенство выполняется для всех функций $f \in L^1_\nu(D')$, т. е.

$$\|\varphi^*(f) \mid L^1_\nu(D)\| \leq K^{\frac{1}{\nu}} \|f \mid L^1_\nu(D')\|. \tag{50}$$

Отображение φ^{-1} также квазиконформно. Тогда для $g \in L^1_\nu(D)$ имеем

$$\|\varphi^{-1*}(g) \mid L^1_\nu(D')\| \leq K_1^{\frac{1}{\nu}} \|g \mid L^1_\nu(D)\|, \tag{51}$$

где K_1 — коэффициент квазиконформности обратного отображения. Заметим, что для $f \in L^1_\nu(D') \cap C^\infty(D')$ верно $\varphi^{-1*}(f \circ \varphi) = f$. Следовательно, неравенство (51) принимает вид $K_1^{-\frac{1}{\nu}} \|f \mid L^1_\nu(D')\| \leq \|\varphi^*(f) \mid L^1_\nu(D)\|$. Таким образом,

$$K_1^{-\frac{1}{\nu}} \|f \mid L^1_\nu(D')\| \leq \|\varphi^*(f) \mid L^1_\nu(D)\| \leq K^{\frac{1}{\nu}} \|f \mid L^1_\nu(D')\|,$$

где постоянные K и K_1 зависят только от свойств отображения φ.

Покажем, что образ $\varphi^*\big(L^1_\nu(D') \cap C^\infty(D')\big)$ всюду плотен в $L^1_\nu(D)$. Пусть $g \in L^1_\nu(D)$. Найдется последовательность $g_n \in L^1_\nu(D) \cap C^\infty(D)$ такая, что $\|g - g_n \mid L^1_\nu(D)\| \to 0$. С другой стороны, в силу двусторонней оценки $g_n \circ \varphi^{-1} \in L^1_\nu(D')$. Следовательно, найдется последовательность $f_{nk} \in L^1_\nu(D') \cap C^\infty(D')$ такая, что $\|g_n \circ \varphi^{-1} - f_{nk} \mid L^1_\nu(D')\| \to 0$ при $k \to \infty$. Тогда для некоторой последовательности натуральных чисел l_n имеем $\varphi^* f_{nl_n} \in \varphi^*\big(L^1_\nu(D') \cap C^\infty(D')\big)$ и $\|g - \varphi^* f_{nl_n} \mid L^1_\nu(D)\| \to 0$ при $n \to \infty$.

Необходимость. Существование квазиконформного отображения Φ доказано в предложении 77: $\Phi = \widetilde{\varphi}_0 : D \setminus \{x_{\mathrm{inv}}\} \to G$. На основании доказанного выше оператор композиции $\Phi^* : L^1_\nu(\Phi(D \setminus \{x_{\mathrm{inv}}\})) \to L^1_\nu(D \setminus \{x_{\mathrm{inv}}\})$ — изоморфизм. Так как, очевидно, $L^1_\nu(D \setminus \{x_{\mathrm{inv}}\}) = L^1_p(D)$, отсюда имеем изоморфизм $\varphi^{*-1} \circ \Phi^* : L^1_\nu(\Phi(D \setminus \{x_{\mathrm{inv}}\})) \to L^1_\nu(D')$ такой, что $\varphi^{*-1} \circ \Phi^*(f)(x) = f(x)$ для всех точек $x \in \Phi(D \setminus \{x_{\mathrm{inv}}\}) \cap D'$, где $f \in L^1_\nu(\Phi(D \setminus \{x_{\mathrm{inv}}\}))$ — произвольная функция.

Следовательно, пространство $L^1_\nu(\Phi(D \setminus \{x_{\mathrm{inv}}\}) \cup D')$ изоморфно через оператор ограничения как пространству $L^1_\nu(\Phi(D \setminus \{x_{\mathrm{inv}}\}))$, так и $L^1_\nu(D')$. Таким образом, $\Phi(D \setminus \{x_{\mathrm{inv}}\})$ и D' — $(1, \nu)$-эквивалентные области.

Аналогично доказанному в [9, теорема 3.1; 10, предложение 6.10] можно получить следующие свойства:

1) $|\Phi(D)\Delta D'| = 0$;

2) для любого шара $B \subset D'$ множество $B \setminus \Phi(D)\Delta D'$ связное. $\square$

4.8. Следствие: устранимые множества для квазиконформных отображений. Напомним, что замкнутое множество $E \subset D$ называется *устранимым* для квазиконформных отображений, если всякое квазиконформное отображение $\varphi : D \setminus E \to \mathbb{G}$ продолжается до квазиконформного отображения области D.

Следствие 79. *Пусть U и D $(1, \nu)$-эквивалентны, $U \subset D$. Тогда множество $D \setminus U$ устранимо для квазиконформных отображений.*

Доказательство. Пусть $\varphi_1 : U \to \mathbb{G}$ — квазиконформное отображение. Для доказательства следствия требуется построить квазиконформное продолжение отображения φ_1 на область D.

По теореме 2 оператор композиции $\varphi_1^* : L^1_\nu(\varphi_1(U)) \to L^1_\nu(U)$ является изоморфизмом. Поскольку множества U и D — $(1, \nu)$-эквивалентны, оператор ограничения $r^* : L^1_\nu(D) \to L^1_\nu(U)$ также изоморфизм.

Рассмотрим измеримое отображение $\varphi : D \to \varphi_1(U)$ такое, что $\varphi(x) = \varphi_1(x)$ для $x \in U$. Оператор композиции $\varphi^* : L^1_\nu(\varphi_1(U)) \cap C^\infty(\varphi_1(U)) \to L^1_\nu(D)$, определенный правилом $\varphi^* f = f \circ \varphi$, продолжается до изоморфизма пространств $L^1_\nu(\varphi_1(U))$ и $L^1_\nu(D)$, поскольку $\varphi^* f = r^{*-1} \circ \varphi_1^* f$ для $f \in L^1_\nu(\varphi_1(U)) \cap C^\infty(\varphi_1(U))$. В силу теоремы 2 найдется квазиконформное отображение $\Phi : D \to \mathbb{G}$, совпадающее с φ п. в. При этом $\Phi(x) = \varphi(x)$, если $x \in U$. Таким образом, Φ — искомое продолжение. $\square$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Водопьянов С. К., Гольдштейн В. М.* Структурные изоморфизмы пространств W^1_n и квазиконформные отображения // Сиб. мат. журн. 1975. Т. 16, № 2. С. 224–246.
2. *Водопьянов С. К., Гольдштейн В. М.* Квазиконформные отображения и пространства функций с первыми обобщенными производными // Сиб. мат. журн. 1976. Т. 17, № 3. С. 515–531.
3. *Водопьянов С. К., Гольдштейн В. М.* Новый функциональный инвариант для квазиконформных отображений // Некоторые вопросы современной теории функций: Мат. конф. Новосибирск: Изд-во СО АН СССР, 1976. С. 18–20.
4. *Водопьянов С. К.* Отображения однородных групп и вложения функциональных пространств // Сиб. мат. журн. 1989. Т. 30, № 5. С. 25–41.
5. *Водопьянов С. К.* L_p-теория потенциала и квазиконформные отображения на однородных группах // Современные проблемы геометрии и анализа. Новосибирск: Наука, 1989. С. 45–89.
6. *Водопьянов С. К., Евсеев Н. А.* Изоморфизмы соболевских пространств на группах Карно и квазиизометрические отображения // Сиб. мат. журн. 2014. Т. 55, № 5. С. 1001–1039.
7. *Водопьянов С. К., Евсеев Н. А.* Изоморфизмы соболевских пространств на группах Карно и метрические свойства отображений // Докл. АН. 2015. Т. 464, № 2. С. 131–135.
8. *Vodopyanov S. K.* $\mathscr{P}$-differentiability on Carnot groups in different topologies and related topics // Труды по анализу и геометрии. Новосибирск: Изд-во Ин-та математики, 2000. С. 603–670.
9. *Водопьянов С. К., Гольдштейн В. М.* Критерий устранимости множеств для пространств L^1_p квазиконформных и квазиизометрических отображений // Сиб. мат. журн. 1977. Т. 18, № 1. С. 48–68.
10. *Водопьянов С. К., Черников В. М.* Пространства Соболева и гипоэллиптические уравнения // Тр. Ин-та математики СО РАН. Новосибирск: Изд-во Ин-та математики, 1995. Т. 29. С. 3–64.
11. *Решетняк Ю. Г.* Соболевские классы функций со значениями в метрическом пространстве // Сиб. мат. журн. 1997. Т. 38, № 3. С. 657–675.

12. *Pansu P.* Métriques de Carnot–Carathéodory et quasiisométries des espaces symétriques de rang un // Ann. Math. 1989. V. 129, N 1. P. 1–60.
13. *Водопьянов С. К.* Дифференцируемость кривых в категории многообразий Карно // Докл. АН. 2006. Т. 410, № 4. С. 439–444.
14. *Vodopyanov S.* Geometry of Carnot–Carathéodory spaces and differentiability of mappings // The interaction of analysis and geometry. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 2007. P. 247–301. (Contemporary mathematics; V. 424).
15. *Hajłasz P.* Change-of-variables formula under the minimal assumptions // Colloq. Math. 1993. V. 64, N 1. P. 93–101.
16. *Isangulova D. V., Vodopyanov S. K.* Coercive estimates and integral representation formulas on Carnot groups // Eurasian Math. J. 2010. V. 1, N 3. P. 58–96.
17. *Jerison D.* The Poincaré inequality for vector fields satisfying Hörmander's condition // Duke Math. 1986. V. 53. P. 503–523.
18. *Lu G.* The sharp Poincaré inequality for free vector fields: an endpoint result // Rev. Mat. Iberoam. 1994. V. 10, N 2. P. 453–466.
19. *Hajłasz P., Koskela P.* Sobolev met Poincaré. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 2000. (Mem. Amer. Math. Soc.; 688).
20. *Franchi B., Lu G., Wheeden R. L.* Representation formulas and weighted Poincaré inequalities for Hörmander vector fields // Ann. Inst. Fourier, Grenoble. 1992. V. 45, N 2. P. 577–604.
21. *John F.* Rotation and strain // Comm. Pure Appl. Math. 1961. V. 14. P. 391–413.
22. *Романов А. С.* О замене переменной в пространствах потенциалов Бесселя и Рисса // Функциональный анализ и математическая физика. 1985. С. 117–133.
23. *Choquet G.* Theory of capacities // Ann. Inst. Fourier (Grenoble). 1959. V. 9. P. 83–89.
24. *Folland G. B.* Subelliptic estimates and function spaces on nilpotent Lie groups // Ark. Math. 1975. V. 13, N 2. P. 161–207.
25. *Водопьянов С. К., Кудрявцева Н. А.* Нелинейная теория потенциала для пространств Соболева на группах Карно // Сиб. мат. журн. 2009. Т. 50, № 5. С. 1016–1036.
26. *Folland G. B., Stein E. M.* Hardy spaces on homogeneous groups. Princeton: Princeton Univ. Press, 1982.
27. *Водопьянов С. К.* Монотонные функции и квазиконформные отображения на группах Карно // Сиб. мат. журн. 1996. Т. 37, № 6. С. 1269–1295.
28. *Водопьянов С. К.* О дифференцируемости отображений классов Соболева на группе Карно // Мат. сб. 2003. Т. 194, № 6. С. 67-86.

Статья поступила 16 февраля 2015 г.

Водопьянов Сергей Константинович, Евсеев Никита Александрович
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090;
Новосибирский гос. университет,
ул. Пирогова, 2, Новосибирск 630090
vodopis@math.nsc.ru, nikita@phys.nsu.ru