Сибирский математический журнал
Сентябрь—октябрь, 2015. Том 56, № 5

УДК 517.54

О МНОЖЕСТВЕ ЗНАЧЕНИЙ ОДНОГО КОМПЛЕКСНОЗНАЧНОГО ФУНКЦИОНАЛА

В. А. Пчелинцев, Е. А. Пчелинцев

Аннотация. Решается задача о нахождении множества Ω значений одного функционала, заданного на классе пар нормированных однолистных функций. С помощью метода внутренних вариаций получена система функционально-дифференциальных уравнений для граничных функций, разрешенных в квадратурах. Установлено, что множеством значений функционала является круг с центром в начале и радиусом, зависящим от параметров функционала.

DOI 10.17377/smzh.2015.56.514

Ключевые слова: функционал, множество значений, вариационный метод, граничные функции, однолистные функции.

§ 1. Введение

Вопросы, которые рассматриваются в настоящей статье, принадлежат к геометрической теории однолистных функций комплексного переменного. Здесь большое внимание уделяется различным экстремальным задачам, в которых речь идет об экстремумах и множествах значений функционалов, характеризующих свойства конформных отображений. Экстремальные задачи получили мощный импульс благодаря исследованиям М. А. Лаврентьева [1], Г. М. Голузина [2, 3], П. П. Куфарева [4], Н. А. Лебедева [5, 6], К. Поммеренке [7], И. А. Александрова [8], В. Я. Гутлянского [9] и других авторов. К числу интересных задач относятся задачи о нахождении множеств значений функционалов, зависящих от значений пар функций и их производных в фиксированных точках единичного круга и его внешности. Например, в [6, 10] исследовались области значений функционалов на классе пар мероморфных однолистных функций без общих значений в единичном круге и его внешности, так называемые задачи о неналегающих областях. Настоящая работа посвящена дальнейшему развитию вариационного метода для исследования множества значений более общего функционала, заданного на классе, состоящем из пар нормированных однолистных функций, определенных соответственно в единичном круге и его внешности. При этом множества значений указанных функций могут пересекаться.

Пусть D и D^* — односвязные области в w-плоскости такие, что $0 \in D$, а $\infty \in D^*$. Пусть функция f принадлежит классу S, т. е. $f : U \to D$ — голоморфная однолистная функция, имеющая разложение в ряд

$$f(z) = z + c_2 z^2 + \dots + c_n z^n + \dots,$$

и функция F принадлежит классу Σ_0, т. е. $F : U^* \to D^*$ — мероморфная однолистная функция, имеющая разложение в ряд

$$F(\zeta) = \zeta + d_0 + \frac{d_{-1}}{\zeta} + \dots + \frac{d_{-n}}{\zeta^n} + \dots$$

и не принимающая в U^* нулевого значения. Здесь $U = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ и $U^* = \{\zeta \in \mathbb{C} : |\zeta| > 1\}$. Семейство пар функций $(f(z), F(\zeta))$ указанного вида назовем *классом* $\mathfrak{M}'$.

В статье решается задача о нахождении множества Ω значений функционала

$$I(f,F) = \ln\left(\frac{z_0 f'(z_0)}{f(z_0)}\frac{\zeta_0 F'(\zeta_0)}{F(\zeta_0)}\right)$$
$$= \int\limits_0^{z_0}\left(\frac{f''(z)}{f'(z)} - \frac{f'(z)}{f(z)} + \frac{1}{z}\right)dz - \int\limits_{\zeta_0}^{\infty}\left(\frac{F''(\zeta)}{F'(\zeta)} - \frac{F'(\zeta)}{F(\zeta)} + \frac{1}{\zeta}\right)d\zeta \quad (1)$$

при фиксированных z_0 и ζ_0, $|z_0| < 1$ и $|\zeta_0| > 1$ на классе $\mathfrak{M}'$.

Отметим, что множество Ω значений функционала (1) не зависит от $\arg z_0$ и $\arg\zeta_0$. Для того чтобы это показать, введем пару функций $(f_1(z), F_1(\zeta)) \in \mathfrak{M}'$, где $f_1(z) = e^{-i\varphi}f(e^{i\varphi}z)$, $F_1(\zeta) = e^{-i\psi}F(e^{i\psi}\zeta)$, $\varphi = \arg z_0$ и $\psi = \arg\zeta_0$. Тогда $f(z) = e^{i\varphi}f_1(e^{-i\varphi}z)$, $F(\zeta) = e^{i\psi}F_1(e^{-i\psi}\zeta)$, а

$$I(f,F) = \ln\left(\frac{z_0 f'(z_0)}{f(z_0)}\frac{\zeta_0 F'(\zeta_0)}{F(\zeta_0)}\right) = \ln\left(\frac{z_0 f_1'(e^{-i\varphi}z_0)}{e^{i\varphi}f_1(e^{-i\varphi}z_0)}\frac{\zeta_0 F_1'(e^{-i\psi}\zeta_0)}{e^{i\psi}F(e^{-i\psi}\zeta_0)}\right)$$
$$= \ln\left(\frac{|z_0|f_1'(|z_0|)}{f_1(|z_0|)}\frac{|\zeta_0|F_1'(|\zeta_0|)}{F(|\zeta_0|)}\right).$$

Отсюда следует независимость множества Ω от аргументов точек z_0 и ζ_0. Далее будем считать, что $|z_0| = r \in (0,1)$, $|\zeta_0| = \rho \in (1,+\infty)$.

В работах Н. А. Лебедева [5, 6] показано, что для нахождения множества значений Ω достаточно разыскать все граничные точки этого множества, т. е. найти его границу $\partial\Omega$. В свою очередь, при нахождении границы $\partial\Omega$ достаточно рассмотреть только совокупность неособых граничных точек, поскольку множество всех неособых точек границы плотно в $\partial\Omega$.

Точка $I_0 \in \partial\Omega$ называется *неособой точкой границы*, если существует такая внешняя для Ω точка I_e, что расстояние между точками I_e и I_0 равно расстоянию между I_e и множеством Ω.

Разыскание неособых точек множества значений Ω функционала (1) сводится к нахождению наименьшего значения выражения

$$|I(f,F) - I_e| = \left|\ln\frac{rf'(r)}{f(r)}\frac{\rho F'(\rho)}{F(\rho)} - I_e\right| \quad (2)$$

на классе $\mathfrak{M}'$ при всевозможных $I_e \notin \Omega$.

Таким образом, исходная задача нахождения множества Ω значений функционала (1) заменяется эквивалентной экстремальной задачей: *отыскать минимум вещественнозначного функционала* (2).

Функции, вносящие неособые граничные точки функционала, называют *граничными функциями* этого функционала, т. е. это функции, значения функционала в которых являются неособыми граничными точками.

Заметим, что класс $\mathfrak{M}'$ не линейный и методы классического вариационного исчисления оказываются недостаточными. Для решения экстремальных задач в геометрической теории однолистных функций были предложены свои методы, среди которых метод площадей, параметрический метод и вариационные методы [3, 8, 9].

В данной работе при решении экстремальной задачи, эквивалентной исходной задаче, используется вариационный метод Голузина [2]. Получены необходимые условия для граничных функций функционала (1) (лемма 1). С помощью этих условий, рассмотренных совместно с малыми вариационными формулами, доказано, что образы единичного круга и его внешности при отображении граничными функциями не имеют внешних точек (лемма 2). Основными результатами являются теорема 1, дающая систему уравнений на пару граничных функций, и теорема 2, полностью описывающая значения функционала (1).

§ 2. Необходимые условия для граничных функций

Пусть $\Delta \subset \overline{\mathbb{C}}$ — область и $\mathbf{W}$ — некоторое подмножество множества голоморфных или мероморфных в Δ функций. Говорят, что в классе $\mathbf{W}$ имеет место *вариационная формула*

$$h_\varepsilon(z) = h(z) + \varepsilon R(z) + o(z,\varepsilon),$$

если для каждой функции $h(z) \in \mathbf{W}$ и любого достаточно малого ε, $\varepsilon > 0$, функция $h_\varepsilon(z)$ принадлежит $\mathbf{W}$, причем $R(z)$ — голоморфная в Δ функция, и $o(z,\varepsilon)/\varepsilon \to 0$ при $\varepsilon \to 0$ равномерно внутри Δ.

Запишем вариационные формулы для граничных функций $f(z)$ и $F(\zeta)$ на классе $\mathfrak{M}'$ в виде

$$f_\varepsilon(z) = f(z) + \varepsilon P(z) + o(z,\varepsilon), \quad F_\varepsilon(\zeta) = F(\zeta) + \varepsilon Q(\zeta) + o(\zeta,\varepsilon)$$

при положительном и достаточно малом ε. С доказательствами вариационных формул, используемых в работе, можно познакомиться в [3].

Лемма 1. *Пусть $f(z)$, $F(\zeta)$ — граничные функции. Тогда необходимое условие экстремума функционала* (2) *имеет вид*

$$\operatorname{Re}\left(e^{-i\alpha}\left[\frac{P'(r)}{f'(r)} - \frac{P(r)}{f(r)}\right]\right) \ge 0, \tag{3}$$

$$\operatorname{Re}\left(e^{-i\alpha}\left[\frac{Q'(\rho)}{F'(\rho)} - \frac{Q(\rho)}{F(\rho)}\right]\right) \ge 0, \tag{4}$$

где $\alpha = \arg(I(f,F) - I_e)$, $0 \le \alpha < 2\pi$.

Доказательство. Из определения минимума функционала (2) для граничной пары функций $(f(z), F(\zeta))$ имеем неравенства

$$|I(f_\varepsilon,F) - I_e|^2 \ge |I(f,F) - I_e|^2, \quad |I(f,F_\varepsilon) - I_e|^2 \ge |I(f,F) - I_e|^2$$

или

$$\left|I(f,F) + \ln\left(1 + \varepsilon\frac{P'(r)}{f'(r)}\right) - \ln\left(1 + \varepsilon\frac{P(r)}{f(r)}\right) + o(z,\varepsilon) - I_e\right|^2 \ge |I(f,F) - I_e|^2,$$

$$\left|I(f,F) + \ln\left(1 + \varepsilon\frac{Q'(\rho)}{F'(\rho)}\right) - \ln\left(1 + \varepsilon\frac{Q(\rho)}{F(\rho)}\right) + o(z,\varepsilon) - I_e\right|^2 \ge |I(f,F) - I_e|^2.$$

Разложив слагаемые в левых частях неравенств по формуле Тейлора по степеням ε, получим

$$\left|I(f,F) + \varepsilon\left(\frac{P'(r)}{f'(r)} - \frac{P(r)}{f(r)}\right) + o(z,\varepsilon) - I_e\right|^2 \ge |I(f,F) - I_e|^2,$$

$$\left|I(f,F)+\varepsilon\left(\frac{Q'(\rho)}{F'(\rho)}-\frac{Q(\rho)}{F(\rho)}\right)+o(z,\varepsilon)-I_e\right|^2\geq|I(f,F)-I_e|^2.$$

Воспользовавшись равенством $|a|^2=a\bar{a}$ и выполнив несложные преобразования, имеем

$$\varepsilon\operatorname{Re}\left[e^{-i\alpha}\left(\frac{P'(r)}{f'(r)}-\frac{P(r)}{f(r)}\right)\right]+o(z,\varepsilon)\geq 0,$$

$$\varepsilon\operatorname{Re}\left[e^{-i\alpha}\left(\frac{Q'(\rho)}{F'(\rho)}-\frac{Q(\rho)}{F(\rho)}\right)\right]+o(z,\varepsilon)\geq 0.$$

Разделив обе части последних соотношений на ε, а затем перейдя в каждом из них к пределу при $\varepsilon\to 0$, приходим к неравенствам (3) и (4). Лемма доказана.

Лемма 2. *Пусть $f(z)$, $F(\zeta)$ — граничные функции функционала* (1). *Тогда области D и D^* не имеют внешних точек.*

Доказательство. Допустим, что w_0 есть внешняя точка для области D. Подставляя в условие (3) в качестве функции сравнения варьированную функцию

$$f_\varepsilon(z)=f(z)+\varepsilon A_0\frac{f^2(z)}{f(z)-w_0},$$

где w_0 — внешняя точка для области D, A_0 — произвольная комплексная постоянная, перепишем его в виде

$$\operatorname{Re}\left(-e^{-i\alpha}A_0\frac{w_0f(r)}{(f(r)-w_0)^2}\right)\geq 0.$$

Так как дробь в скобках отлична от нуля при данном w_0, в силу произвольности константы A_0 может быть справедливо неравенство $|I(f_\varepsilon,F)-I_e|<|I(f,F)-I_e|$, которое противоречит экстремальности функции $f(z)$. Полученное противоречие доказывает отсутствие внешних точек для области D. Подобным образом доказывается, что область D^* не имеет внешних точек. Для этого в неравенстве (4) нужно выбрать в качестве функции сравнения варьированную функцию вида

$$F_\varepsilon(\zeta)=F(\zeta)+\varepsilon A_0\frac{w_0^*F(\zeta)}{F(\zeta)-w_0^*}+o(\zeta,\varepsilon),$$

где w_0^* — внешняя точка для области D^*, A_0 – произвольная комплексная постоянная. Лемма доказана.

§ 3. Основные результаты

Используя в совокупности условие (3) с вариационной формулой

$$\begin{aligned}f(z,\varepsilon)=f(z)+\varepsilon\Bigg(A_0\frac{f^2(z)}{f(z)-f(z_0)}-\frac{A_0}{2}\left[zf'(z)\frac{z+z_0}{z-z_0}+f(z)\right]\left[\frac{f(z_0)}{z_0f'(z_0)}\right]^2\\-\frac{\overline{A_0}}{2}\left[zf'(z)\frac{\overline{z_0}z+1}{\overline{z_0}z-1}+f(z)\right]\left[\overline{\frac{f(z_0)}{z_0f'(z_0)}}\right]^2\Bigg)+o(z,\varepsilon),\end{aligned}\quad(5)$$

а условие (4) — с вариационной формулой

$$\begin{aligned}F(\zeta,\varepsilon)=F(\zeta)+\varepsilon\Bigg(A_0\frac{F(\zeta_0)F(\zeta)}{F(\zeta)-F(\zeta_0)}+\frac{A_0}{2}\left[\zeta F'(\zeta)\frac{\zeta_0+\zeta}{\zeta_0-\zeta}+F(\zeta)\right]\left[\frac{F(\zeta_0)}{\zeta_0F'(\zeta_0)}\right]^2\\+\frac{\overline{A_0}}{2}\left[\zeta F'(\zeta)\frac{1+\overline{\zeta_0}\zeta}{1-\overline{\zeta_0}\zeta}+F(\zeta)\right]\left[\overline{\frac{F(\zeta_0)}{\zeta_0F'(\zeta_0)}}\right]^2\Bigg)+o(\zeta,\varepsilon),\end{aligned}\quad(6)$$

получим систему функционально-дифференциальных уравнений для граничных функций множества Ω, соответствующих неособым граничным точкам. В формулах (5) и (6) $z_0 \in U$, $\zeta_0 \in U^*$, A_0 — произвольная комплексная постоянная.

Введем обозначения:

$$V(z) = Az^4 + Bz^3 + (C + \overline{C})z^2 + \overline{B}z + \overline{A},$$

$$V^*(\zeta) = A^*\zeta^4 + B^*\zeta^3 + (C^* + \overline{C^*})\zeta^2 + \overline{B^*}\zeta + \overline{A^*},$$

$$A = \frac{1}{2}(e^{i\alpha}\,\overline{H(r)} - e^{-i\alpha}H(r)), \quad A^* = \frac{1}{2}(e^{-i\alpha}\,H^*(\rho) - e^{i\alpha}\overline{H^*(\rho)}),$$

$$B = e^{-i\alpha}\left(\frac{H(r)}{r} - r\right) - e^{i\alpha}\left(\overline{H(r)}r + \frac{1}{r}\right),$$

$$B^* = e^{i\alpha}\left(\overline{H^*(\rho)}\rho - \frac{1}{\rho}\right) - e^{-i\alpha}\left(\frac{H^*(\rho)}{\rho} + \rho\right),$$

$$C = \frac{e^{-i\alpha}}{2}\left(H(r)r^2 - \frac{H(r)}{r^2} + 4\right), \quad C^* = \frac{e^{-i\alpha}}{2}\left(\frac{H^*(\rho)}{\rho^2} - H^*(\rho)\rho^2 + 4\right),$$

$$H(r) = 1 + \frac{rf''(r)}{f'(r)} - \frac{rf'(r)}{f(r)}, \quad H^*(\rho) = \frac{\rho F'(\rho)}{F(\rho)} - \frac{\rho F''(\rho)}{F'(\rho)} - 1.$$

Теорема 1. *Каждая граничная пара функций $(f(z), F(\zeta))$ функционала (1) удовлетворяет в U и U^* системе функционально-дифференциальных уравнений*

$$-e^{-i\alpha}\frac{f(r)f(z)}{(f(z) - f(r))^2}\left(\frac{zf'(z)}{f(z)}\right)^2 = \frac{V(z)}{(z-r)^2\left(z - \frac{1}{r}\right)^2}, \tag{7}$$

$$-e^{-i\alpha}\frac{F(\rho)F(\zeta)}{(F(\zeta) - F(\rho))^2}\left(\frac{\zeta F'(\zeta)}{F(\zeta)}\right)^2 = \frac{V^*(\zeta)}{(\zeta-\rho)^2\left(\zeta - \frac{1}{\rho}\right)^2}, \tag{8}$$

где $\alpha = \arg(I(f, F) - I_e)$. При этом правые части уравнений (7) и (8) на единичной окружности $|z| = |\zeta| = 1$ неотрицательны.

Доказательство. Неравенство (3) в случае выбора вариационной формулы (5) примет вид

$$\operatorname{Re}\Bigg[-e^{-i\alpha}A_0\frac{f(r)f(z_0)}{(f(r) - f(z_0))^2} - \frac{e^{-i\alpha}A_0}{2}\left(H(r)\frac{r+z_0}{r-z_0} - \frac{2rz_0}{(r-z_0)^2}\right)\left(\frac{f(z_0)}{z_0 f'(z_0)}\right)^2 - \frac{e^{-i\alpha}\overline{A_0}}{2}\left(H(r)\frac{r\overline{z_0}+1}{r\overline{z_0}-1} - \frac{2r\overline{z_0}}{(r\overline{z_0}-1)^2}\right)\left(\overline{\frac{f(z_0)}{z_0 f'(z_0)}}\right)^2\Bigg] \geq 0.$$

Заменяя последнее слагаемое под знаком вещественной части его сопряженным значением, имеем

$$\operatorname{Re} A_0\Bigg[-e^{-i\alpha}\frac{f(r)f(z_0)}{(f(r) - f(z_0))^2} - \frac{e^{-i\alpha}}{2}\left(H(r)\frac{r+z_0}{r-z_0} - \frac{2rz_0}{(r-z_0)^2}\right)\left(\frac{f(z_0)}{z_0 f'(z_0)}\right)^2 - \frac{e^{i\alpha}}{2}\left(\overline{H(r)}\frac{rz_0+1}{rz_0-1} - \frac{2rz_0}{(rz_0-1)^2}\right)\left(\frac{f(z_0)}{z_0 f'(z_0)}\right)^2\Bigg] \geq 0.$$

В этом условии выражение в скобках равно нулю, иначе при надлежащем выборе $\arg A_0$ получили бы, что левая часть последнего неравенства отрицательна. Это приводит к равенству

$$
\begin{aligned}
&- e^{-i\alpha}\left(\frac{f(r)f(z_0)}{(f(r)-f(z_0))^2}\right)\left(\frac{z_0 f'(z_0)}{f(z_0)}\right)^2 \\
&\qquad = \frac{e^{-i\alpha}}{2}\left(H(r)\frac{r+z_0}{r-z_0}-\frac{2rz_0}{(r-z_0)^2}\right)+\frac{e^{i\alpha}}{2}\left(\overline{H(r)}\frac{rz_0+1}{rz_0-1}-\frac{2rz_0}{(rz_0-1)^2}\right).
\end{aligned}
$$

Поскольку в этом соотношении z_0 — произвольная точка круга U, заменив z_0 на z, находим дифференциальное уравнение, которому удовлетворяет граничная функция $f(z)$. Вычисления показывают, что оно имеет вид (7). Выбрав варьированную функцию

$$
f(z,\varepsilon) = f(z) + \varepsilon\left(zf'(z)\frac{z+e^{i\theta}}{z-e^{i\theta}} + f(z)\right) + o(z,\varepsilon), \quad 0 \le \theta \le 2\pi,
$$

посредством (3) приходим к неравенству

$$
\operatorname{Re}\left[e^{-i\alpha}\left(H(r)\frac{r+e^{i\theta}}{r-e^{i\theta}} - \frac{2re^{i\theta}}{(r-e^{i\theta})^2}\right)\right] \ge 0,
$$

которое указывает на неотрицательность правой части уравнения (7) на единичной окружности $|z|=1$.

Вывод уравнения (8) в идейном отношении повторяет вывод уравнения (7), для этого надо применить условие (4) совместно с вариационными формулами (6) и

$$
F(\zeta,\varepsilon) = F(\zeta) - \varepsilon\left(\zeta F'(\zeta)\frac{1+e^{i\theta}\zeta}{1-e^{i\theta}\zeta} + F(\zeta)\right) + o(\zeta,\varepsilon), \quad 0 \le \theta \le 2\pi.
$$

Теорема доказана.

На основании аналитической теории дифференциальных уравнений [11] заключаем, что граничные функции $f(z)$ и $F(\zeta)$, удовлетворяющие своим уравнениям, являются голоморфными не только в U и U^*, но и на единичной окружности, за исключением конечного числа алгебраических особых точек. В лемме 2 установлено, что области D и D^* не содержат внешних точек, следовательно, в образах будут плоскости, разрезанные по конечному числу аналитических дуг. Пусть точка $z=k$, $|k|=1$, и точка $\zeta=\varkappa$, $|\varkappa|=1$, отображаются граничными функциями $f(z)$ и $F(\zeta)$ в концы разрезов, лежащих в конечной части плоскости. Тогда при $z=k$ производная $f'(z)$ и при $\zeta=\varkappa$ производная $F'(\zeta)$ имеют простые нули и, значит, правые части уравнений (7) и (8) делятся соответственно на $(z-k)^2$ и $(\zeta-\varkappa)^2$. С учетом вышесказанного уравнения (7) и (8) можно представить в виде

$$
-e^{-i\alpha}\frac{f(r)f(z)}{(f(z)-f(r))^2}\left(\frac{zf'(z)}{f(z)}\right)^2 = \frac{(1-\bar{k}z)^2(Ak^2z^2 - Ekz + \overline{A})}{(z-r)^2\left(z-\frac{1}{r}\right)^2}, \tag{9}
$$

$$
-e^{-i\alpha}\frac{F(\rho)F(\zeta)}{(F(\zeta)-F(\rho))^2}\left(\frac{\zeta F'(\zeta)}{F(\zeta)}\right)^2 = \frac{(\zeta-\varkappa)^2(A^*\zeta^2 - E^*\bar{\varkappa}\zeta + \overline{A^*}\bar{\varkappa}^2)}{(\zeta-\rho)^2\left(\zeta-\frac{1}{\rho}\right)^2}, \tag{10}
$$

где E, E^* — вещественные константы. Найдем их. Устремляя в уравнении (9) z к нулю, а в уравнении (10) ζ к бесконечности, получаем $\overline{A} = A^* = 0$. Перепишем уравнения

$$e^{-i\alpha}\frac{f(r)f(z)}{(f(z)-f(r))^2}\left(\frac{zf'(z)}{f(z)}\right)^2 = \frac{(1-\bar{k}z)^2 Ekz}{(z-r)^2\left(z-\frac{1}{r}\right)^2}, \tag{11}$$

$$e^{-i\alpha}\frac{F(\rho)F(\zeta)}{(F(\zeta)-F(\rho))^2}\left(\frac{\zeta F'(\zeta)}{F(\zeta)}\right)^2 = \frac{(\zeta-\varkappa)^2 E^*\bar{\varkappa}\zeta}{(\zeta-\rho)^2\left(\zeta-\frac{1}{\rho}\right)^2}. \tag{12}$$

Умножая обе части равенства (11) на $(z-r)^2$, а обе части равенства (12) на $(\zeta-\rho)^2$ и устремляя соответственно z к r, а ζ к ρ, в пределах имеем равенства

$$Eke^{i\alpha} = \frac{(1-r^2)^2}{r(1-\bar{k}r)^2}, \quad E^*\bar{\varkappa}e^{i\alpha} = \frac{(\rho^2-1)^2}{\rho(\rho-\varkappa)^2}.$$

Поскольку $\mathrm{Im}(E)=0$ и $\mathrm{Im}(E^*)=0$, то

$$e^{-i\alpha}k = \pm\frac{1-\bar{k}r}{1-kr}, \quad E = \pm\frac{(1-r^2)^2}{r(1-kr)(1-\bar{k}r)},$$

$$e^{-i\alpha}\varkappa = \pm\frac{\rho-\varkappa}{\rho-\bar{\varkappa}}, \quad E^* = \pm\frac{(\rho^2-1)^2}{\rho(\rho-\varkappa)(\rho-\bar{\varkappa})}.$$

В этих формулах нужно взять знак минус, так как правые части уравнений (9) и (10) на единичной окружности неотрицательны. Отсюда с учетом того, что

$$\bar{k} = \frac{e^{-i\alpha}r-1}{e^{-i\alpha}-r}, \quad \varkappa = \frac{e^{-i\alpha}-\rho}{e^{-i\alpha}\rho-1},$$

уравнения (11) и (12) принимают вид

$$\frac{f(r)f(z)}{(f(z)-f(r))^2}\left(\frac{zf'(z)}{f(z)}\right)^2 = \frac{(1-r^2)^2}{r(1-\bar{k}r)^2}\frac{(1-\bar{k}z)^2 z}{(z-r)^2\left(z-\frac{1}{r}\right)^2}, \tag{13}$$

$$\frac{F(\rho)F(\zeta)}{(F(\zeta)-F(\rho))^2}\left(\frac{\zeta F'(\zeta)}{F(\zeta)}\right)^2 = \frac{(\rho^2-1)^2}{\rho(\rho-\varkappa)^2}\frac{(\zeta-\varkappa)^2\zeta}{(\zeta-\rho)^2\left(\zeta-\frac{1}{\rho}\right)^2}. \tag{14}$$

Перейдем к интегрированию уравнений (13) и (14). Извлекая квадратные корни из обеих частей каждого из равенств, имеем

$$\frac{du}{\sqrt{u}(u-1)} = \left(\frac{\sqrt{r}}{\sqrt{z}(z-r)} - \frac{e^{i\alpha}\sqrt{r}}{\sqrt{z}\,(rz-1)}\right)dz, \quad u = \frac{f(z)}{f(r)},$$

$$\frac{dv}{\sqrt{v}(v-1)} = \left(\frac{\sqrt{\rho}}{\sqrt{\zeta}(\rho\zeta-1)} - \frac{e^{i\alpha}\sqrt{\rho}}{\sqrt{\zeta}(\zeta-\rho)}\right)d\zeta, \quad v = \frac{F(\zeta)}{F(\rho)}.$$

Интегрируя полученные уравнения, получим равенства

$$\ln\frac{\sqrt{f(r)}-\sqrt{f(z)}}{\sqrt{f(r)}+\sqrt{f(z)}}=\ln\frac{\sqrt{r}-\sqrt{z}}{\sqrt{r}+\sqrt{z}}+e^{i\alpha}\ln\frac{1+\sqrt{rz}}{1-\sqrt{rz}},\tag{15}$$

$$\ln\frac{\sqrt{F(\zeta)}-\sqrt{F(\rho)}}{\sqrt{F(\zeta)}+\sqrt{F(\rho)}}=\ln\frac{\sqrt{\zeta}-\sqrt{\rho}}{\sqrt{\zeta}+\sqrt{\rho}}+e^{i\alpha}\ln\frac{\sqrt{\rho\zeta}+1}{\sqrt{\rho\zeta}-1}.\tag{16}$$

Здесь под $\sqrt{f(z)}$ и $\sqrt{z}$ понимаются те ветви, которые при $z\to r$ обращаются соответственно в $\sqrt{f(r)}$ и $\sqrt{r}$. Под $\sqrt{F(\zeta)}$ и $\sqrt{\zeta}$ понимаются те ветви, которые при $\zeta\to\rho$ обращаются соответственно в $\sqrt{F(\rho)}$ и $\sqrt{\rho}$. Постоянные интегрирования найдены из условий, что при $z=0$ все логарифмы в (15) равны нулю и при $\zeta\to\infty$ все логарифмы в (16) стремятся к нулю.

Уравнения (15) и (16) неявно определяют граничные функции $f(z)$ и $F(\zeta)$. Устремляя в (15) z к r и в (16) ζ к ρ, в пределах получим

$$\ln\frac{rf'(r)}{f(r)}=e^{i\alpha}\ln\frac{1+r}{1-r},\quad \ln\frac{\rho F'(\rho)}{F(\rho)}=e^{i\alpha}\ln\frac{\rho+1}{\rho-1}.$$

Почленно складывая последние равенства, находим уравнение границы множества Ω значений функционала (1):

$$\ln\left(\frac{rf'(r)}{f(r)}\frac{\rho F'(\rho)}{F(\rho)}\right)=e^{i\alpha}\ln\left(\frac{1+r}{1-r}\cdot\frac{\rho+1}{\rho-1}\right).$$

Таким образом, доказана

Теорема 2. *Пусть $(f(z),F(\zeta))\in\mathfrak{M}'$ и $r\in(0,1)$, $\rho\in(1,+\infty)$ — фиксированные точки. Тогда множество Ω значений функционала (1) на классе $\mathfrak{M}'$ есть круг:*

$$\left|\ln\frac{rf'(r)}{f(r)}\frac{\rho F'(\rho)}{F(\rho)}\right|\le\ln\left(\frac{1+r}{1-r}\cdot\frac{\rho+1}{\rho-1}\right).$$

Авторы выражают благодарность профессору Игорю Александровичу Александрову за полезные обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Лаврентьев М. А., Шабат Б. В.* Методы теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1966.
2. *Голузин Г. М.* Метод вариаций в конформном отображении // Мат. сб. 1946. Т. 19, № 2. С. 203–236.
3. *Голузин Г. М.* Геометрическая теория функций комплексного переменного. М.: Наука, 1966.
4. *Труды П. П. Куфарева* (К 100-летию со дня рождения) / под общ. ред. И. А. Александрова. Томск: Изд-во НТЛ, 2009.
5. *Лебедев Н. А.* Мажорантная область для выражения $I=\ln\{z^{\lambda}[f'(z)]^{1-\lambda}/[f(z)]^{\lambda}\}$ в классе S // Вестн. Ленингр. ун-та. 1955. Т. 3, № 8. С. 29–41.
6. *Лебедев Н. А.* Об области значений одного функционала в задаче о неналегающих областях // Докл. АН СССР. 1957. Т. 115, № 6. С. 1070–1073.
7. *Pommerenke Ch.* Univalent Functions. Göttingen: Vandenhoeck & Ruprecht, 1975.
8. *Александров И. А.* Методы геометрической теории аналитических функций. Томск: Том. гос. ун-т, 2001.
9. *Гутлянский В. Я., Рязанов В. И.* Геометрическая и топологическая теория функций и отображений. Киев: Наук. думка, 2011.
10. *Пчелинцев В. А.* К задаче о неналегающих областях // Сиб. мат. журн. 2012. Т. 53, № 6. С. 1391–1400.

11. *Голубев В. В.* Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений. М.; Л.: Гостехиздат, 1950.

Статья поступила 4 января 2015 г.

Пчелинцев Валерий Анатольевич
Томский политехнический университет,
физико-технический институт,
пр. Ленина, 30, Томск 634050
VPchelintsev@vtomske.ru

Пчелинцев Евгений Анатольевич,
Томский гос. университет,
механико-математический факультет,
пр. Ленина, 36, Томск 634050
evgen-pch@yandex.ru