Сибирский математический журнал
Сентябрь—октябрь, 2015. Том 56, № 5

УДК 512.545

О КОНГРУЭНЦИЯХ m–ГРУПП. II

А. В. Зенков

Аннотация. Дается описание строения множества конгруэнций произвольной транзитивной m-группы.

DOI 10.17377/smzh.2015.56.506

Ключевые слова: m-группа, m-транзитивное представление, конгруэнция.

1. Введение

Работа является продолжением статьи автора [1], посвященной изучению конгруэнций m-групп.

Напомним, что *m-группой* называется алгебраическая система G сигнатуры $m = \langle \cdot, e, ^{-1}, \vee, \wedge, {}_*\rangle$, где $\langle G, \cdot, e, ^{-1}, \vee, \wedge\rangle$ является ℓ-группой, а одноместная операция ${}_*$ — автоморфизмом второго порядка группы $\langle G, \cdot, e, ^{-1}\rangle$ и антиизоморфизмом решетки $\langle G, \vee, \wedge\rangle$, т. е. для любых $x, y \in G$ верны соотношения $(xy)_* = x_* y_*, (x_*)_* = x, (x \vee y)_* = x_* \wedge y_*, (x \wedge y)_* = x_* \vee y_*$. В дальнейшем m-группу G с фиксированным автоморфизмом ${}_*$ записываем в виде пары $(G, {}_*)$. Будем говорить [2], что m-группа $(G, {}_*)$ *допускает* (*точное*) *представление порядковыми подстановками линейно упорядоченного множества* Ω, если $G \subseteq \mathrm{Aut}(\Omega)$ и $(g)_* = aga$ для любого $g \in G$, где a — реверсивный автоморфизм 2-го порядка Ω. Этот факт записываем в виде (G, Ω, a). Пусть $L = \{w \in \Omega \mid (w)a > w\}$, $R = \{(\ell)a \mid \ell \in L\}$ и o — неподвижная относительно a точка Ω. Отметим, что существуют представления, содержащие неподвижную точку и не содержащие таковой. Множество Ω представимо в виде $\Omega = L \overleftarrow{\cup} \{o\}^{\varepsilon} \overleftarrow{\cup} R$, где $\varepsilon = 1$, если неподвижная точка существует, и $\varepsilon = 0$ в противном случае. Представление (G, Ω, a) назовем *m-транзитивным*, если для всех $w, w' \in \Omega$, быть может, за исключением точки o, существует такой $x \in G_* = gr.(G, a)$, что $(w)x = w'$. Здесь и далее фраза «быть может, за исключением точки o» означает, что o исключается из рассмотрения, если она «глобально неподвижна», т. е. ее стабилизатор $\mathrm{St}_G(o)$ равен G. В работе рассматриваются только m-транзитивные представления.

Стандартно отношение эквивалентности Θ, определенное на Ω, будем называть *отношением m-эквивалентности* (*m-конгруэнтности*), если оно выпукло и $w\Theta w' \Leftrightarrow (w)x\Theta(w')x$ для любого $x \in G_*$. Основным результатом является описание строения множества конгруэнций произвольной транзитивной m-группы (теорема 2.1).

Все необходимые сведения по теории групп и решеточно упорядоченных групп можно найти в [3, 4] соответственно.

2. Основной результат

Рассмотрим (G,Ω,a), где $\Omega = L\overleftarrow{\cup}\{o\}^{\varepsilon}\overleftarrow{\cup}R$. Множество $\mathscr{K}$ всех m-эквивалентностей, определенных на Ω, очевидно, непусто, и, более того, на $\mathscr{K}$ можно ввести отношение частичного порядка $\preceq$, полагая $\Theta_1 \preceq \Theta_2 \Leftrightarrow w\Theta_1 w' \Rightarrow w\Theta_2 w'$.

Пусть $\Theta \in \mathscr{K}$ и $\triangle = \ell\Theta$ — класс эквивалентности, содержащий произвольную, но фиксированную точку $\ell \in L$. Множество $\triangle$ является m-блоком, т. е. $(\triangle)x \cap \triangle = \varnothing$ либо $(\triangle)x = \triangle$ для любого $x \in G_*$. Обратно, если $\triangle$ — m-блок, то отношение Θ, определенное на Ω по правилу $w = w'$ либо $w, w' \in (\triangle)x$ для подходящего $x \in G_*$, будет отношением m-эквивалентности.

Пусть $\triangle = \ell\Theta$. Тогда $\mathrm{St}_G(\triangle)$ — выпуклая ℓ-подгруппа, содержащая $\mathrm{St}_G(\ell)$. Обратно, если H — выпуклая ℓ-подгруппа, содержащая $\mathrm{St}_G(\ell)$, то выпуклое замыкание $\triangle$ в Ω орбиты $(\ell)H$ есть m-блок [1]. Таким образом, существует соответствие между $\mathscr{K}$ и множеством $\mathscr{H}$ всех выпуклых ℓ-подгрупп, содержащих $\mathrm{St}_G(\ell)$. В случае ℓ-групп это соответствие взаимно однозначно. Следующий пример наряду с примером из [1] показывает, что в случае m-групп это не так.

Пример. Рассмотрим группу

$$S_2 = \langle a_1, a_2, b \mid [a_1, a_2] = e,\ a_1^b = a_2,\ a_2^b = a_1\rangle.$$

Если $g \in S_2$, то g представим, причем единственным способом, в виде $g = a_1^m a_2^n b^k$, $k, m, n \in \mathbb{Z}$. Относительно лексикографического порядка, т. е. $g \geq e \Leftrightarrow k > 0$ или $k = 0$, $m \geq 0$, $n \geq 0$, S_2 является ℓ-группой. Определим отображение $\varphi : S_2 \to S_2$ по правилу

$$(g)\varphi = a_1^{-m} a_2^{-n} b^{-k}.$$

Тогда (S_2, φ) будет m-группой. Пусть $A_1 = \langle a_1\rangle, A_2 = \langle a_2\rangle$. Эти выпуклые ℓ-подгруппы спрямляющие, т. е. множества правых смежных классов $X = R(S_2 : A_1)$, $Y = R(S_2 : A_2)$ линейно упорядочены относительно естественно вводимого упорядочения множества правых смежных классов. Рассмотрим $\triangle_1 = \{A_1 a_2^n\}$, $\triangle_2 = \{A_2 a_1^m\}$. Тогда $X = \overleftarrow{\bigcup}\triangle_1 b^k$, $Y = \overleftarrow{\bigcup}\triangle_2 b^k$. Построим новое линейно упорядоченное множество Ω, полагая $\triangle_1 b^k < \triangle_2 b^k \triangle_1 b^{k+1}$. Очевидно, что множество Ω сохраняет линейные порядки исходных множеств. Определим отображение $a : \Omega \to \Omega$ по правилу $\left(A_1 a_2^n b^k\right)a = A_2 a_1^{-n} b^{1-k}$ и $\left(A_2 a_1^m b^k\right)a = A_1 a_2^{-m} b^{1-k}$. Из определения следует, что a — реверсивный автоморфизм 2-го порядка Ω. Правое регулярное представление (S_2, φ) порядковыми подстановками Ω является точным и m-транзитивным, но не транзитивным. Ясно, что оно не содержит неподвижной точки. Итак, можно рассмотреть представление (S_2, Ω, a). Отметим, что способы построения m-транзитивного представления произвольной m-группы описаны в [5].

Из сказанного выше следует, что $\nabla^- = \triangle_1\overleftarrow{\cup}\triangle_2$, $\triangle_2$, $\nabla^+ = \triangle_2\overleftarrow{\cup}\triangle_1 b$ — m-блоки и, более того, $\mathrm{St}_{\triangle_2}(S_2) = \mathrm{St}_{\nabla^+}(S_2) = \mathrm{St}_{\nabla^-}(S_2) = A_1 \times A_2$. Отличие этого примера от упоминавшегося выше состоит в том, что рассматриваемый стабилизатор нееdиничен и поэтому рассматриваемая группа дает пример неабелевой m-группы с тремя классами эквивалентности, определяемыми одной группой из $\mathscr{H}$.

Представление (G, Ω, a) будем называть *собственным*, если для любого $g \in G$ верно $(L)g = L$. Из результатов в [1] следует, что такие представления дают примеры, когда $H \in \mathscr{H}$ определяет две конгруэнции.

Итак, в случае m-групп возможны следующие случаи: (1) соответствие между между $\mathscr{K}$ и $\mathscr{H}$ взаимно однозначно; (2) существует $H \in \mathscr{H}$, определяющая две конгруэнции; (3) существует $H \in \mathscr{H}$, определяющая три конгруэнции. Множество $\mathscr{H}$ является линейно упорядоченным относительно теоретико-множественного включения, и все группы этого множества спрямляющие. Отметим, что ситуация (1) наблюдается в случае, когда представление транзитивно. В частности это так, если Ω содержит неподвижную точку, которая не является «глобально неподвижной».

Рассмотрим ситуации (2) и (3). Значит, существует $H_\alpha \in \mathscr{H}$ такая, что $\triangle_\alpha = \mathrm{conv}_\Omega((\ell)H_\alpha)$, $\nabla_\alpha = \triangle \overleftarrow{\cup} (\triangle)at$ — m-блоки, где $t \in G$, $ata = t^{-1}$. Из существования ∇_α следует, что (1) не существует $g \in G$ такого, что $(\triangle_\alpha)g = (\triangle_\alpha)at$; (2) $\triangle_\alpha = (\ell)H_\alpha$; (3) $H_\alpha^{at} = H_\alpha$. Пусть $H_\beta \in \mathscr{H}$ и $H_\alpha \subset H_\beta$. Тогда $\triangle_\alpha \subset \triangle_\beta$, поэтому $\triangle_\beta = (\triangle_\beta)at$. Следовательно, $(\triangle_\beta)ag = \triangle_\beta t^{-1}g$. Значит, не может существовать m-блока типа $\triangle_\beta \overleftarrow{\cup} (\triangle)_\beta ag$. Стало быть, H_β определяет *единственную* конгруэнцию. Но тогда и для $H_\beta \subset H_\alpha$ ситуация аналогична. Таким образом, если существует $H_\alpha \in \mathscr{H}$, задающая более чем одну конгруэнцию, то она единственна. Покажем, что в этом случае существует наименьшая $H_{\alpha+1} \in \mathscr{H}$, строго содержащая H_α (здесь мы предполагаем, что $H_\alpha \neq G$). Положим $H_{\alpha+1} = \bigcap\limits_\beta H_\beta, H_\beta \supset H_\alpha, H_\beta \in \mathscr{H}$. Если $H_{\alpha+1} = H_\alpha$, то, с одной стороны, $\triangle_\alpha = \bigcap\limits_\beta \triangle_\beta$, а с другой — $\nabla_\alpha = \bigcap\limits_\beta \triangle_\beta$, что ведет к противоречию.

Для каждой $H_\gamma \in \mathscr{H}$ через $\Theta_\gamma, \Theta_\gamma^+, \Theta_\gamma^-$ обозначим конгруэнции, соответственно определяемые m-блоками $\triangle_\gamma = \mathrm{conv}_\Omega((\ell)H_\gamma)$, $\nabla_\gamma^+ = \triangle_\gamma \overleftarrow{\cup} (\triangle_\gamma)at$, $\nabla_\gamma^- = (\triangle_\gamma)at \overleftarrow{\cup} \triangle_\gamma$. Очевидно, что $\Theta_\gamma = \Theta_\gamma^+ \cap \Theta_\gamma^-$. Таким образом, имеет место

Теорема 2.1. *Пусть (G, Ω, a) — произвольное m-транзитивное представление и $\mathscr{K}$ — множество всех m-эквивалентностей, определенных на Ω. Тогда $\mathscr{K}$ — линейно упорядоченное множество относительно ранее введенного порядка (случаи (1), (2)) либо существует и единственная $H_\alpha \in \mathscr{H}$ такая, что $\Theta_\alpha \preceq \Theta_\alpha^+$, $\Theta_\alpha^- \preceq \Theta_{\alpha+1}$ и $\mathscr{K}$ линейно упорядочено при $H_\beta \subseteq H_\alpha$ и $H_{\alpha+1} \subseteq H_\beta$.*

ЛИТЕРАТУРА

1. *Зенков А. В.* О конгруэнциях m-групп // Сиб. мат. журн. 2013. Т. 54, № 6. С. 1280–1288.
2. *Giraudet M., Rachunek J.* Varieties of half lattice-ordered groups of monotonic permutations of chains // Czech. Math. J. 1999. V. 49, N 124. P. 743–766.
3. *Курош А. Г.* Теория групп. М.: Наука, 1967.
4. *Kopytov V. M., Medvedev N. Ya.* The theory of lattice-ordered groups. Dordrecht; Boston; London: Kluwer Acad. Publ., 1994.
5. *Вараксин С. В., Зенков А. В.* О представлениях m-групп // Сиб. мат. журн. 2013. Т. 54, № 2. С. 298–302.

Статья поступила 8 декабря 2014 г.

Зенков Алексей Владимирович
Алтайский гос. аграрный университет,
пр. Красноармейский, 98, Барнаул 656049
alexey_zenkov@yahoo.com