Сибирский математический журнал
Июль—август, 2015. Том 56, № 4

УДК 519.46+514.763+512.81+517.911

ГЕОДЕЗИЧЕСКИЕ И КРАТЧАЙШИЕ СПЕЦИАЛЬНОЙ СУБРИМАНОВОЙ МЕТРИКИ НА ГРУППЕ ЛИ $SO(3)$

В. Н. Берестовский, И. А. Зубарева

Аннотация. Найдены геодезические, кратчайшие, диаметр, множества раздела и сопряженные множества левоинвариантной субримановой метрики на группе Ли $SO(3)$ при условии, что метрика правоинвариантна относительно подгруппы Ли $SO(2) \subset SO(3)$.

DOI 10.17377/smzh.2015.56.404

Ключевые слова: алгебра Ли, геодезическая, группа Ли, левоинвариантная субриманова метрика, кратчайшая.

Введение

В [1] найдены точные формы сфер специальных левоинвариантных субримановых метрик d на трехмерных группах Ли: группе Гейзенберга H, $SO(3)$ и $SL_2(\mathbb{R})$.

В последних двух случаях можно дать следующее естественное геометрическое описание метрики d. Группы Ли $SO(3)$ и $SL_2(\mathbb{R})/\{\pm E_2\}$ — транзитивные группы сохраняющих ориентацию изометрий единичной евклидовой сферы S^2 в трехмерном евклидовом пространстве и плоскости Лобачевского L^2 гауссовой кривизны -1, канонически диффеоморфные пространствам S^2_1 и L^2_1 единичных касательных векторов над этими поверхностями [1]. Пространства S^2_1 и L^2_1 допускают риманову метрику (скалярное произведение) Сасаки g_1 (см. [2] или метрику g_1 в [3, разд. 1K]). При этом канонические проекции $p : (S^2_1, g_1) \to S^2$ и $p : \left(L^2_1, g_1\right) \to L^2$ (или, что эквивалентно, $p : SO(3) \to SO(3)/SO(2)$ и $p : (SL_2(\mathbb{R})/\{\pm E_2\}, g_1) \to SL_2(\mathbb{R})/SO(2))$ являются *римановыми субмерсиями* [3]. Метрика d определяется (вполне неголономным) левоинвариантным распределением D на $SO(3)$ и $SL_2(\mathbb{R})/\{\pm E_2\}$, ортогональным к слоям субмерсии p, и ограничением скалярного произведения g_1 на D. При этом канонические проекции

$$p : (SO(3), d) \to S^2, \quad p : (SL_2(\mathbb{R})/\{\pm E_2\}, d) \to L^2 \tag{1}$$

являются *субметриями* [4], естественными обобщениями римановых субмерсий. Распределение D на S^2_1 и L^2_1 есть не что иное, как горизонтальное распределение

Работа первого автора выполнена при частичной финансовой поддержке гранта Правительства Российской Федерации для государственной поддержки научных исследований (договор № 14.B25.31.0029) и Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 14–01–00068–a).

связности Леви-Чивита [3] для S^2 и L^2. Поэтому при упомянутом отождествлении $SO(3)$ и $SL_2(\mathbb{R})/\{\pm E_2\}$ с S^2_1 и L^2_1 путь $c = c(t)$, $0 \leq t \leq t_1$, в $SO(3)$ и $SL_2(\mathbb{R})/\{\pm E_2\}$, касающийся распределения D, реализуется как параллельный перенос вектора $c(0) \in S^2_1$ и $c(0) \in L^2_1$ вдоль проекции $p(c(t))$, $0 \leq t \leq t_1$.

Отсюда и из теоремы Гаусса — Бонне [5] для S^2 и L^2 вытекает, что канонические проекции (на базу расслоений-субмерсий) геодезических в $(SO(3), d)$ и $(SL_2(\mathbb{R})/\{\pm E_2\}, d)$ должны быть решениями изопериметрической задачи Дидоны (*изопериметриксами*) на базе S^2 и L^2, а сами геодезические — горизонтальными подъемами изопериметриксов в S^2 и L^2. Используя этот факт, субметрию (1) и предположение, что изопериметриксы в S^2 и L^2 должны иметь постоянную геодезическую кривизну, авторы статьи [1] вывели точные формы сфер, не прибегая к поиску геодезических и кратчайших.

В этой статье с помощью упомянутой выше геометрической интерпретации геодезических, общих методов из [6] и теоремы Гаусса — Бонне для S^2 найдены геодезические, кратчайшие, диаметр, множества разреза и сопряженные множества в $(SO(3), d)$. Формулы, аналогичные (10) и (22)–(24), получены в [7], но мы применяем другие методы и подробно доказываем все результаты.

1. Предварительные сведения

Напомним, что группа Ли $Gl(n) = Gl(\mathbb{R}^n)$ состоит из всех вещественных $(n \times n)$-матриц $g = (g_{ij})$, $i, j = 1, \dots, n$, таких, что $\det g \neq 0$, а подгруппа Ли $Gl_0(n)$ (связная компонента единицы e) определяется условием $\det g > 0$. Обе подгруппы естественно рассматривать как открытые подмногообразия в $\mathbb{R}^{n^2}$ с координатами g_{ij}, $i, j = 1, \dots, n$.

Их алгебра Ли $\mathfrak{gl}(n) = Gl(n)_e := Gl_0(n)_e = \mathbb{R}^{n^2}$ есть множество всех вещественных $(n \times n)$-матриц с обычной структурой вещественного векторного пространства и скобкой Ли

$$[a, b] = ab - ba, \quad a, b \in \mathfrak{gl}(n), \tag{2}$$

$e_{ij} \in \mathfrak{gl}(n)$, $i, j = 1, \dots, n$, — матрица, у которой в i-й строке и j-м столбце стоит единица, а все остальные элементы равны нулю. Через $\mathrm{Lin}(a, b)$ обозначаем линейную оболочку векторов a, b. Как вспомогательное средство будет использоваться стандартное скалярное произведение $(\cdot, \cdot)$ на алгебре Ли $\mathfrak{gl}(n) = \mathbb{R}^{n^2}$ при $n = 3$.

Группа Ли $SO(n) = O(n) \cap Gl_0(n)$ всех ортогональных матриц с определителем 1 — связная подгруппа Ли в $Gl_0(n)$. Ее алгебра Ли $(\mathfrak{so}(n), [\cdot, \cdot])$ есть подалгебра Ли алгебры Ли $(\mathfrak{gl}(n), [\cdot, \cdot])$, состоящая из всех кососимметричных матриц. По определению евклидово пространство E^n есть $\mathbb{R}^n$ со стандартным скалярным произведением $(x, x) = x^T x$, где $x \in \mathbb{R}^n$ понимается как вектор-столбец, а ^{T} здесь и далее обозначает транспонирование матриц.

Пусть G и H — группы Ли с алгебрами Ли $\mathfrak{g}$ и $\mathfrak{h}$; $\phi : G \to H$ — гомоморфизм групп Ли. Тогда

$$\phi \circ \exp_{\mathfrak{g}} = \exp_{\mathfrak{h}} \circ d\phi_e, \tag{3}$$

причем

$$d\phi_e : (\mathfrak{g}, [\cdot, \cdot]) \to (\mathfrak{h}, [\cdot, \cdot]) \tag{4}$$

— гомоморфизм алгебр Ли (см. [8, гл. II, § 1, лемма 1.12]). Если $g_0 \in G$, то $\mathrm{I}(g_0) : G \to G$, $\mathrm{I}(g_0)(g) = g_0 g g_0^{-1}$, — внутренний автоморфизм группы Ли

G. Тогда $\mathrm{Ad}(g_0) := d\,\mathrm{I}(g_0)_e \in Gl(\mathfrak{g})$ — автоморфизм алгебры Ли $\mathfrak{g}$, при этом $d\,\mathrm{Ad}_e(v) := \mathrm{ad}(v) := [v,\cdot]$ для $v \in \mathfrak{g}$ (см. [8, гл. II, § 5]) и вследствие (3)

$$\mathrm{I}(g_0) \circ \exp = \exp \circ \mathrm{Ad}(g_0), \tag{5}$$

$$\mathrm{Ad}(\exp_{\mathfrak{g}}(v)) = \exp_{\mathfrak{gl}(\mathfrak{g})}(\mathrm{ad}(v)), \quad v \in \mathfrak{g}. \tag{6}$$

В случае левоинвариантных субримановых метрик на группах Ли каждая геодезическая является левым сдвигом некоторой геодезической с началом в единице. Поэтому далее рассматриваются только геодезические с началом в единице. Из теоремы 5 в [6] следует

Теорема 1. *Пусть G — подгруппа Ли группы Ли $SO(n) \subset Gl_0(n)$ с алгеброй Ли $\mathfrak{g}$, D — вполне неголономное левоинвариантное распределение на G, скалярное произведение $\langle\cdot,\cdot\rangle$ на $D(e)$ пропорционально ограничению скалярного произведения $(\cdot,\cdot)$ (на $D(e)$). Тогда параметризованная длиной дуги нормальная геодезическая (т. е. локально кратчайшая) $\gamma = \gamma(t)$, $t \in (-a,a) \subset \mathbb{R}$, $\gamma(0) = e$, на (G,d) с левоинвариантной субримановой метрикой d, определяемой распределением D и скалярным произведением $\langle\cdot,\cdot\rangle$ на $D(e)$, удовлетворяет системе обыкновенных дифференциальных уравнений*

$$\dot\gamma(t) = \gamma(t)u(t), \quad u(t) \in D(e) \subset \mathfrak{g}, \quad \langle u(t), u(t)\rangle \equiv 1, \tag{7}$$

$$\dot u(t) + \dot v(t) = -[u(t), v(t)], \tag{8}$$

где $u = u(t)$, $v = v(t) \in \mathfrak{g}$, $(v(t), D(e)) \equiv 0$, $t \in (a,b) \subset \mathbb{R}$, — некоторые вещественно-аналитические вектор-функции.

2. Геодезические специальной левоинвариантной субримановой метрики на группе Ли $SO(3)$

Теорема 2. *Пусть задан базис*

$$a = e_{21} - e_{12}, \quad b = e_{31} - e_{13}, \quad c = e_{32} - e_{23} \tag{9}$$

алгебры Ли $\mathfrak{so}(3)$, $D(e) = \mathrm{Lin}(a,b)$ и на $D(e)$ задано скалярное произведение $\langle\cdot,\cdot\rangle$ с ортонормированным базисом a, b. Тогда левоинвариантное распределение D на группе Ли $SO(3)$ с данным $D(e)$ вполне неголономно и пара $(D(e), \langle\cdot,\cdot\rangle)$ определяет левоинвариантную субриманову метрику d на $SO(3)$. При этом каждая параметризованная длиной дуги геодезическая $\gamma = \gamma(t)$, $t \in \mathbb{R}$, в $SO(3)$ с условием $\gamma(0) = e$ есть произведение двух 1-параметрических подгрупп:

$$\gamma(t) = \exp(t(\cos\phi_0 a + \sin\phi_0 b + \beta c))\exp(-t\beta c), \tag{10}$$

где ϕ_0, β — некоторые произвольные постоянные.

Доказательство. Из формул (2) и (9) следует, что

$$[a,b] = c, \quad [b,c] = a, \quad [c,a] = b. \tag{11}$$

Отсюда вытекает первое утверждение теоремы.

Ясно, что на $D(e)$

$$\langle\cdot,\cdot\rangle = \frac{1}{2}(\cdot,\cdot). \tag{12}$$

Вследствие теоремы 3 в [6] каждая геодезическая на 3-мерной группе Ли с левоинвариантной субримановой метрикой нормальна. Тогда из теоремы 1 следует, что для поиска геодезических $\gamma = \gamma(t)$, $t \in \mathbb{R}$, в $(SO(3), d)$ можно применить ОДУ (7), (8).

Ясно, что

$$u(t) = \cos\phi(t)a + \sin\phi(t)b, \quad v(t) = \beta(t)c, \tag{13}$$

и тождество (8) записывается в виде

$$-[\cos\phi(t)a + \sin\phi(t)b, \beta(t)c] = \dot{\phi}(t)(-\sin\phi(t)a + \cos\phi(t)b) + \dot{\beta}(t)c.$$

Вследствие (11) выражение в левой части равенства равно

$$\beta(t)(\cos\phi(t)b - \sin\phi(t)a).$$

Получаем тождества $\dot{\beta}(t) = 0$, $\dot{\phi}(t) = \beta(t)$. Следовательно,

$$\beta = \beta(t) = \mathrm{const}, \quad \phi(t) = \beta t + \phi_0. \tag{14}$$

В силу (7), (13) и (14) должно быть

$$\dot{\gamma}(t) = \gamma(t)(\cos(\beta t + \phi_0)a + \sin(\beta t + \phi_0)b). \tag{15}$$

Докажем, что (10) является решением ОДУ (15). Из формул (11) легко вывести равенства

$$(\mathrm{ad}(c)) = a, \quad (\mathrm{ad}(b)) = -b, \quad (\mathrm{ad}(a)) = c, \tag{16}$$

где (f) обозначает матрицу линейного отображения $f : \mathfrak{so}(3) \to \mathfrak{so}(3)$ в базисе a, b, c, далее (f) отождествляется с f. На основании формул (6), (16), (14), (13)

$$\begin{aligned}
\dot{\gamma}(t) &= \exp(t(\cos\phi_0 a + \sin\phi_0 b + \beta c))(\cos\phi_0 a + \sin\phi_0 b + \beta c)\exp(-t\beta c)\\
&+ \gamma(t)(-\beta c) = \gamma(t)\exp(t\beta c)(\cos\phi_0 a + \sin\phi_0 b + \beta c)\exp(-t\beta c) + \gamma(t)(-\beta c)\\
&= \gamma(t)\exp(t\beta c)(\cos\phi_0 a + \sin\phi_0 b)\exp(-t\beta c) + \gamma(t)(\beta c) + \gamma(t)(-\beta c)\\
&= \gamma(t)\cdot[\mathrm{Ad}(\exp(t\beta c))(\cos\phi_0 a + \sin\phi_0 b)] = \gamma(t)\cdot[\exp(\mathrm{ad}(t\beta c))(\cos\phi_0 a + \sin\phi_0 b)]\\
&= \gamma(t)\cdot[\exp(t\beta(\mathrm{ad}(c)))(\cos\phi_0 a + \sin\phi_0 b)] = \gamma(t)\cdot[(\exp(t\beta a))(\cos\phi_0 a + \sin\phi_0 b)]\\
&= \gamma(t)\cdot(\cos(\beta t + \phi_0)a + \sin(\beta t + \phi_0)b) = \gamma(t)u(t). \quad \square
\end{aligned}$$

Замечание 1. При $\beta \neq 0$ обе 1-параметрические подгруппы из формулы (10) нигде не касаются распределения D, поэтому каждый их интервал имеет бесконечную длину в метрике d.

Замечание 2. В [9, § 19.2] доказано, что аналогично формуле (10) всякая нормальная траектория (геодезическая) левоинвариантной субримановой метрики, определяемой распределением коранга один, на компактной группе Ли, начинающаяся в единице, является произведением не более двух 1-параметрических подгрупп. Заметим, что всякая геодезическая левоинвариантной субримановой метрики на 3-мерной группе Ли нормальна.

Предложение 1. *Пусть $\gamma(t)$, $t \in \mathbb{R}$, — геодезическая в $(SO(3), d)$, определяемая формулой* (10). *Тогда для каждого $t_0 \in \mathbb{R}$*

$$\gamma(t_0)^{-1}\gamma(t) = \exp((t-t_0)(\cos(\beta t_0+\phi_0)a+\sin(\beta t_0+\phi_0)b+\beta c))\exp(-(t-t_0)\beta c). \tag{17}$$

Доказательство. На основании формул (5), (6), (16) имеем

$$\begin{aligned}\gamma(t_0)^{-1}\gamma(t) &= \exp(t_0\beta c)\exp(-t_0(\cos\phi_0 a+\sin\phi_0 b+\beta c))\\ &\quad\times\exp(t(\cos\phi_0 a+\sin\phi_0 b+\beta c))\exp(-t\beta c)\\ &= \exp(t_0\beta c)\exp((t-t_0)(\cos\phi_0 a+\sin\phi_0 b+\beta c))\exp(-t_0\beta c)\exp(-(t-t_0)\beta c)\\ &= [\mathrm{I}(\exp(t_0\beta c))(\exp((t-t_0)(\cos\phi_0 a+\sin\phi_0 b+\beta c)))]\cdot\exp(-(t-t_0)\beta c)\\ &= \exp[\mathrm{Ad}(\exp(t_0\beta c)((t-t_0)(\cos\phi_0 a+\sin\phi_0 b+\beta c))]\cdot\exp(-(t-t_0)\beta c)\\ &= \exp[\exp(\mathrm{ad}(t_0\beta c))((t-t_0)(\cos\phi_0 a+\sin\phi_0 b+\beta c))]\cdot\exp(-(t-t_0)\beta c)\\ &= \exp[\exp(t_0\beta a)((t-t_0)(\cos\phi_0 a+\sin\phi_0 b+\beta c))]\cdot\exp(-(t-t_0)\beta c)\\ &= \exp((t-t_0)(\cos(\beta t_0+\phi_0)a+\sin(\beta t_0+\phi_0)b+\beta c))\cdot\exp(-(t-t_0)\beta c). \quad\square\end{aligned}$$

Замечание 3. Изменение знака у β в (10) равносильно изменению знака у t и замене угла ϕ_0 углом $\phi_0\pm\pi$.

Замечание 4. Для каждой матрицы $B\in SO(2)=\{\exp(sc),\, s\in\mathbb{R}\}$ отображение $l_B\circ r_{B^{-1}}$, где l_B — умножение слева на B, $r_{B^{-1}}$ — умножение справа на B^{-1}, является одновременно изоморфизмом $\mathrm{Ad}\,B$ алгебры Ли $(\mathfrak{so}(3),[\cdot,\cdot])$, сохраняющим $\langle\cdot,\cdot\rangle$, и изоморфизмом группы Ли $SO(3)$, сохраняющим распределение D и метрику d. В частности, вследствие (6), (16)

$$\mathrm{Ad}\,B(a+\beta c)=\exp(\phi_0 a)(a+\beta c)=\cos\phi_0 a+\sin\phi_0 b+\beta c,$$

если

$$B=\exp(\phi_0 c)=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&\cos\phi_0&-\sin\phi_0\\0&\sin\phi_0&\cos\phi_0\end{pmatrix}. \tag{18}$$

Лемма 1. *Имеет место равенство*

$$\exp(t(a+\beta c))=\mathrm{I}(\exp(-\xi b))(\exp(t\sqrt{1+\beta^2}a)), \tag{19}$$

где

$$\cos\xi=\frac{1}{\sqrt{1+\beta^2}},\quad \sin\xi=\frac{\beta}{\sqrt{1+\beta^2}}. \tag{20}$$

Доказательство. С учетом (20), (16), (6) получаем

$$\begin{aligned}t(a+\beta c)&=(t\sqrt{1+\beta^2}(\cos\xi\cdot a+\sin\xi\cdot c))=(\exp(\xi b))(t\sqrt{1+\beta^2}a)\\ &=(\exp(\mathrm{ad}(-\xi b)))(t\sqrt{1+\beta^2}a)=\mathrm{Ad}(\exp(-\xi b))(t\sqrt{1+\beta^2}a).\end{aligned}$$

Вследствие полученных равенств и (5)

$$\exp(t(a+\beta c))=\exp(\mathrm{Ad}(-\xi b)(t\sqrt{1+\beta^2}a))=\mathrm{I}(\exp(-\xi b))(\exp(t\sqrt{1+\beta^2}a)).\quad\square$$

Теорема 3. *Пусть*

$$m=\frac{\sin(t\sqrt{1+\beta^2})}{\sqrt{1+\beta^2}},\quad n=\frac{1-\cos(t\sqrt{1+\beta^2})}{1+\beta^2}. \tag{21}$$

Тогда геодезическая левоинвариантной субримановой метрики d на группе Ли $SO(3)$ (см. теорему 2) равна $\gamma(t)=(\gamma_1(t),\gamma_2(t),\gamma_3(t))$, где столбцы $\gamma_j(t)$, $j=1,2,3$, даны формулами

$$\gamma_1(t)=\begin{pmatrix}1-n\\ m\cos\phi_0-\beta n\sin\phi_0\\ m\sin\phi_0+\beta n\cos\phi_0\end{pmatrix}, \tag{22}$$

$$\gamma_2(t) = \begin{pmatrix} -m\cos(\beta t + \phi_0) - \beta n \sin(\beta t + \phi_0) \\ (1-\beta^2 n)\cos\beta t + \beta m \sin\beta t - n\cos(\beta t + \phi_0)\cos\phi_0 \\ \beta m \cos\beta t - (1-\beta^2 n)\sin\beta t - n\cos(\beta t + \phi_0)\sin\phi_0 \end{pmatrix}, \tag{23}$$

$$\gamma_3(t) = \begin{pmatrix} -m\sin(\beta t + \phi_0) + \beta n \cos(\beta t + \phi_0) \\ (1-\beta^2 n)\sin\beta t - \beta m \cos\beta t - n\sin(\beta t + \phi_0)\cos\phi_0 \\ (1-\beta^2 n)\cos\beta t + \beta m \sin\beta t - n\sin(\beta t + \phi_0)\sin\phi_0 \end{pmatrix}. \tag{24}$$

Доказательство. Пусть $\phi_0 = 0$. Тогда (10) примет вид

$$\gamma(t)|_{\phi_0=0} = \exp(t(a+\beta c))\exp(-t\beta c).$$

Используя лемму 1 и выражения (21) и проводя вычисления, получим

$$\begin{aligned} &\exp(t(a+\beta c)) \\ &= \frac{1}{1+\beta^2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & \beta \\ 0 & \sqrt{1+\beta^2} & 0 \\ -\beta & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos t\sqrt{1+\beta^2} & -\sin t\sqrt{1+\beta^2} & 0 \\ \sin t\sqrt{1+\beta^2} & \cos t\sqrt{1+\beta^2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &\times \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\beta \\ 0 & \sqrt{1+\beta^2} & 0 \\ \beta & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-n & -m & n\beta \\ m & 1-n(1+\beta^2) & -m\beta \\ n\beta & m\beta & 1-n\beta^2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Применяя (10) и (18) при $\phi_0 = -\beta t$, имеем

$$\begin{aligned} \gamma(t)|_{\phi_0=0} &= \begin{pmatrix} 1-n & -m & n\beta \\ m & 1-n(1+\beta^2) & -m\beta \\ n\beta & m\beta & 1-n\beta^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\beta t & \sin\beta t \\ 0 & -\sin\beta t & \cos\beta t \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1-n & -m\cos\beta t - n\beta\sin\beta t & \beta n\cos\beta t - m\sin\beta t \\ m & (1-n(1+\beta^2))\cos\beta t + m\beta\sin\beta t & (1-n(1+\beta^2))\sin\beta t - m\beta\cos\beta t \\ \beta n & m\beta\cos\beta t - (1-\beta^2 n)\sin\beta t & (1-\beta^2 n)\cos\beta t + m\beta\sin\beta t \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

В силу (18) матрицы $B = \exp(\phi_0)$ и $\exp(-t\beta c)$ коммутируют. Отсюда и из замечания 4 следует, что

$$\gamma(t) = B \cdot \gamma(t)|_{\phi_0=0} \cdot B^{-1}. \tag{25}$$

Подстановка в последнее равенство формулы (18) завершает доказательство. □

3. Кратчайшие на группе Ли $(SO(3), d)$

Группа $SO(3)$ реализуется как группа всех сохраняющих ориентацию изометрий

$$v \to gv; \quad g \in SO(3)$$

единичной сферы $S^2 \subset \mathbb{R}^3$, элементы v которой понимаются как вектор-столбцы. Нетрудно проверить, что подгруппа Ли

$$SO(2) := \{\exp sc, s \in \mathbb{R}\} \subset SO(3)$$

является стабилизатором вектора $v_0 = (1,0,0)^T = e_1 \in S^2$ относительно этого действия.

При этом группа $SO(2)$ действует (просто) транзитивно вращениями на единичной окружности $S^1 := S^2 \cap e_1^{\perp} \subset S^2$. Поэтому S^2 естественно отождествляется с фактор-пространством $SO(3)/SO(2)$, а сама группа $SO(3)$ диффеоморфна пространству S^2_1 всех единичных касательных векторов к S^2. Именно, каждому элементу $g \in SO(3)$ сопоставляется ge_2', где e_2' — обычный параллельный перенос вектора e_2 в точку e_1. При этом вследствие введения

1) каждый отрезок гладкого пути $c = c(t)$ в $(SO(3), d)$, касающегося D, имеет ту же длину, что и его образ относительно канонической проекции

$$p : g \in SO(3) \to ge_1 \in S^2; \tag{26}$$

2) при указанном отождествлении $SO(3)$ с S_1^2 путь $c = c(t)$, $0 \leq t \leq t_1$, касающийся распределения D, реализуется как параллельный перенос вектора $c(0) \in S_1^2$ вдоль проекции $p(c(t))$, $0 \leq t \leq t_1$;

3) по теореме Гаусса — Бонне при параллельном переносе в S^2 ненулевого вектора вдоль контура, ограничивающего часть сферы с площадью $S < 2\pi$, вектор поворачивается в направлении обхода на угол S.

Для поиска кратчайших в $(SO(3), d)$ воспользуемся утверждениями 1–3. Вследствие предложения 1 и замечания 4 достаточно исследовать отрезки геодезических вида

$$\gamma(t) = \exp(t(a + \beta c))\exp(-t\beta c), \quad 0 \leq t \leq t_1, \tag{27}$$

и их проекции

$$x(t) := p(\gamma(t)) = \gamma(t) \cdot e_1 = \gamma(t) \cdot (1, 0, 0)^T = (1 - n, m, \beta n)^T, \quad 0 \leq t \leq t_1, \tag{28}$$

на плоскость S^2, где m, n определены формулами (21) (использованы формулы (22)–(24) при $\phi_0 = 0$).

Так как второй сомножитель в (27) лежит в $SO(2)$, орбиты (28) совпадают с отрезками орбит 1-параметрической подгруппы $y(t) = \exp(t(a + \beta c))$, $t \in \mathbb{R}$.

Нетрудно вычислить, что матрица $a + \beta c$ имеет единичные собственные векторы $\pm(1/\sqrt{1 + \beta^2})(\beta, 0, 1)^T \in S^2$ с нулевым собственным значением. Следовательно, 1-параметрическая подгруппа $y(t)$, $t \in \mathbb{R}$, сохраняет эти векторы. Скалярное произведение этих векторов с e_1 равно $\pm(\beta/\sqrt{1 + \beta^2})$. Следовательно, сферическое расстояние от точки e_1 до оси этих векторов равно

$$r = \arccos(|\beta|/\sqrt{1 + \beta^2}) \leq \pi/2. \tag{29}$$

Поэтому орбита $\{\gamma(t)e_1 = y(t)e_1\}$ — сферическая окружность радиуса $r < \pi/2$ с единственным центром $(1/\sqrt{1 + \beta^2})(\beta, 0, 1)^T$, если $\beta \neq 0$. Нетрудно видеть, что если $\beta > 0$, то вследствие теоремы 3 кривая (28) при $t_1 = 2\pi/\sqrt{1 + \beta^2}$ обходит эту окружность, ограничивающую меньшую область Ψ сферы с этим центром внутри, однократно, оставляя область Ψ слева.

Сформулируем более точно теорему Гаусса — Бонне (см. [5, гл. IX, § 5]). Пусть M — двумерное ориентированное многообразие с римановой метрикой ds^2, Φ — гомеоморфная кругу область на M, ограниченная замкнутой кусочно-регулярной кривой γ с регулярными звеньями $\gamma_1, \dots, \gamma_n$, образующими углы $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ со стороны области Φ. Направление на кривой γ задано так, чтобы при обходе кривой в этом направлении область Φ оставалась справа.

Теорема 4. *Справедливо равенство*

$$\sum_{k=1}^{n} \int_{\gamma_k} \kappa\, ds + \sum_{k=1}^{n} (\pi - \alpha_k) = 2\pi - \iint_{\Phi} K\, d\sigma, \tag{30}$$

где κ — геодезическая кривизна в точках звеньев кривой, K — гауссова (секционная) кривизна поверхности (M, ds^2), а интегрирование в правой части равенства выполняется по площади области Φ.

В частности, если γ — регулярная кривая, то

$$\int\limits_{\gamma} \kappa\, ds = 2\pi - \iint\limits_{\Phi} K\, d\sigma. \tag{31}$$

Предложение 2. *Геодезическая кривизна кривой* (28) *при* $\beta > 0$ *равна* $-|\beta|$.

Доказательство. Вследствие вышесказанного, применяя равенство (31) к окружности (28) при $\beta > 0$ и $t_1 = 2\pi/\sqrt{1+\beta^2}$, нужно взять область сферы $\Phi = S^2 \setminus \overline{\Psi}$ и $K = 1$. Тогда левая часть равна κt_1. Для правой части нужна площадь $\sigma(\Phi)$.

Известно, что в S^2

$$l(r,\alpha) = \alpha \sin r, \tag{32}$$

$$S(r,\alpha) = \int\limits_0^r \alpha \sin s ds = \alpha \operatorname{ch} s|_0^r = \alpha(1-\cos r), \tag{33}$$

где $l(r,\alpha)$ — длина дуги окружности радиуса r с центральным углом $\alpha \le 2\pi$, а $S(r,\alpha)$ — площадь соответствующего сектора. Тогда вследствие (29)

$$\sigma(\Psi) = 2\pi\left(1 - \frac{|\beta|}{\sqrt{1+\beta^2}}\right), \quad \sigma(\Phi) = 4\pi - \sigma(\Psi) = 2\pi\left(1 + \frac{|\beta|}{\sqrt{1+\beta^2}}\right),$$

$$\frac{2\pi\kappa}{\sqrt{1+\beta^2}} = 2\pi - \sigma(\Phi) = -2\pi\frac{|\beta|}{\sqrt{1+\beta^2}}, \quad \kappa = -|\beta|. \quad \square$$

Предложение 3. *Пусть проекция* (28) *геодезического отрезка* (27), *где* $\beta \neq 0$, *не имеет самопересечений, т. е.* $0 \le t_1 < 2\pi/\sqrt{1+\beta^2}$, $S(t_1) = S(t_1,\beta)$ — *площадь меньшего криволинейного двуугольника* P *в* S^2, *ограниченного отрезком* (28) *и кратчайшим отрезком* $[x(0)x(t_1)]$ *длины* $r = r(t_1)$ *в* S^2, $\psi = \psi(t_1,\beta)$ — *внутренний угол двуугольника* P. *Тогда*

$$r = \arccos((1-n)(t_1)), \quad r'(t_1) = \cos\psi = \frac{m}{\sqrt{n(2-n)}}, \quad S(t_1) = 2\psi - |\beta| t_1. \tag{34}$$

При этом $S'(t_1) > 0$, *если* $t_1 > 0$; $0 < \psi \le \pi/2$, *если* $0 < t_1 \le \pi/\sqrt{1+\beta^2}$, *и* $\pi/2 < \psi < \pi$, *если* $\pi/\sqrt{1+\beta^2} < t_1 \le 2\pi/\sqrt{1+\beta^2}$.

Доказательство. Первое равенство — следствие (28) и известной формулы расстояния в сферической геометрии, второе — хорошо известное утверждение римановой геометрии (о существовании сильного угла), третье — результат дифференцирования первого равенства в (34). Неравенства для угла ψ геометрически очевидны. Вследствие замечания 3 можно считать, что $\beta > 0$. Отрезок $[x(0)x(t_1)]$ имеет геодезическую кривизну 0. Тогда с учетом $\Phi = S^2 \setminus \overline{P}$ и предложения 2 уравнение (30) запишется в виде

$$-|\beta| t_1 + (2\pi - (4\pi - 2\psi)) = 2\pi - (4\pi - S(t_1)).$$

Следовательно, $S(t_1) = 2\psi - |\beta| t_1$. Отсюда и из (33) следуют соотношения

$$S'(t_1) = 2\psi'(t_1) - |\beta| = (1-\cos r)\psi'(t_1),$$

$$\psi'(t_1) = \frac{|\beta|}{1+\cos r} = \frac{|\beta|}{2-n}, \qquad (35)$$

$$S'(t_1) = |\beta|\left(\frac{2}{2-n} - 1\right)(t_1) > 0, \quad 0 < t_1 < \frac{2\pi}{\sqrt{1+\beta^2}}. \quad \square \qquad (36)$$

Лемма 2. *Если $\beta = 0$ и $t_1 = \pi$, то* (27) *— непродолжаемая кратчайшая.*

Доказательство. В этом случае $\gamma(t) = \exp(ta)$. Тогда $\gamma(2\pi) = e$ и, следовательно, $\gamma(\pi) = \gamma(-\pi)$. Поэтому отрезок геодезической $\gamma(t)$, $0 \leq t \leq t_2$, при $t_2 > t_1 = \pi$ не может быть кратчайшей. С другой стороны, каноническая проекция $p : (SO(3), d) \to S^2$ (см. (1) и (26)) является субметрией, причем

$$\gamma(\pi) = -(e_{11} + e_{22}) + e_{33}, \quad p(\gamma(\pi)) = \gamma(\pi)e_1 = -e_1,$$

т. е. путь $p(\gamma(t))$, $0 \leq t \leq \pi$, — кратчайшее соединение в S^2 диаметрально противоположных точек e_1 и $-e_1$. Тогда (27) — непродолжаемая кратчайшая. $\square$

Предложение 4. 1. *Если $\beta \neq 0$, то геодезический отрезок* (27) *— непродолжаемая кратчайшая, если его проекция* (28) (а) *является однократно проходимой окружностью C, ограничивающей круг площадью $S(t_1) \leq \pi$, или* (б) *является кривой без самопересечений, ограничивающей вместе с кратчайшим отрезком $[x(0)x(t_1)]$ в S^2 двуугольник P в S^2 площадью $S(t_1) = \pi$.*

2. *Для каждого $\beta \neq 0$ существует единственное $t_1 > 0$ такое, что выполняется одно из условий* (а) *или* (б); (а) *имеет место, только если $|\beta| \geq 1/\sqrt{3}$.*

Доказательство. 1(а). Ясно, что $\gamma(t_1) \in SO(2)$. Тогда вследствие замечания 4 для того же β и произвольного ϕ_0 отрезок геодезической (10) при $t \in [0, t_1]$ соединяет те же точки, что и (27). Следовательно, каждое продолжение отрезка (27) не будет кратчайшей.

Предположим, что есть кратчайшая $\gamma_2(t)$, $0 \leq t \leq t_2 < t_1$, в $(SO(3), d)$, соединяющая точки $\gamma(0) = e$ и $\gamma(t_1)$. Тогда проекция $x_2(t) = p(\gamma_2(t))$, $0 \leq t \leq t_2$, является однократно проходимой окружностью C_2 в S^2 длины $t_2 < t_1$ и потому ограничивающей круг площадью $S(t_2) < S(t_1) \leq \pi$. Следовательно, на основании теоремы Гаусса — Бонне (см. утверждение 3 в начале этого раздела) результаты параллельных переносов в S^2 для всех ненулевых касательных векторов вдоль C и C_2 будут разными. Вследствие геометрической интерпретации геодезических в $(SO(3), d)$ имеем $\gamma_2(t_2) \neq \gamma(t_1)$; противоречие.

1(б) Пусть P' — двуугольник, симметричный двуугольнику P относительно отрезка $x(0)x(t_1)$. Так как $S(t_1) = \pi$, в силу теоремы Гаусса — Бонне результаты параллельных переносов в S^2 касательных векторов вдоль ограничивающих P и P' замкнутых контуров при прохождении этих контуров в противоположных направлениях будут одинаковы. Поэтому на основании замечаний 3 и 4 и геометрической интерпретации геодезических в $(SO(3), d)$ из введения кривая в S^2, симметричная проекции (28) отрезка (27)относительно отрезка $x(0)x(t_1)$, представляется в виде $p(\gamma_1(t))$, $0 \leq t \leq t_1$, где γ_1 — некоторая геодезическая в $(SO(3), d)$ такая, что $\gamma_1(0) = \gamma(0)$, $\gamma_1(t_1) = \gamma(t_1)$. Следовательно, каждое продолжение отрезка (27) не будет кратчайшей.

Предположим, что есть кратчайшая $\gamma_2(t)$, $0 \leq t \leq t_2 < t_1$, в $(SO(3), d)$, соединяющая точки $\gamma(0) = e$ и $\gamma(t_1)$. Тогда вследствие замечаний 3 и 4 можно считать, что кривые (28) и $x_2(t) = p(\gamma_2(t))$, $0 \leq t \leq t_2$, лежат по одну сторону от кратчайшей $x(0)x(t_1)$ и соединяют концы этой кратчайшей. Следовательно, двуугольник P и меньший двуугольник P_2, ограниченный кратчайшей $x(0)x(t_1)$

и кривой $x_2(t)$, $0 \le t \le t_2$, выпуклые, причем пересечение их границ — кратчайшая $x(0)x(t_1)$, так как $t_2 < t_1$. Поэтому вследствие последнего неравенства кривая $x_2(t)$, $0 < t < t_2$, лежит внутри P и $S(t_2) < S(t_1) = \pi$, где $S(t_2)$ — площадь двуугольника P_2. Следовательно, на основании теоремы Гаусса — Бонне результаты параллельных переносов в S^2 для всех ненулевых касательных векторов вдоль границ P и P_2 будут разными. Вследствие геометрической интерпретации геодезических в $(SO(3), d)$ из введения имеем $\gamma_2(t_2) \neq \gamma(t_1)$; противоречие.

2. На основании последнего равенства в (34) условие (а) выполняется, только если $t_1 = 2\pi/\sqrt{1+\beta^2}$, $\psi(t_1) = \pi$ и

$$S\left(\frac{2\pi}{\sqrt{1+\beta^2}}\right) = 2\pi - |\beta|\frac{2\pi}{\sqrt{1+\beta^2}} \le \pi \Leftrightarrow |\beta| \ge \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Если $0 < |\beta| < \frac{1}{\sqrt{3}}$, то в силу предложения 4 существует единственное $t_1 > 0$, для которого выполняется условие (б). $\square$

Далее для каждого числа $\beta \neq 0$ найдем число $t_1 = t_1(\beta)$, удовлетворяющее условиям предложения 4.

I. Если $|\beta| \ge \frac{1}{\sqrt{3}}$, то $t_1 = 2\pi/\sqrt{1+\beta^2}$.

II. Пусть $0 < |\beta| < \frac{1}{\sqrt{3}}$. Тогда

$$S(2\pi/\sqrt{1+\beta^2}) < 2\pi \Rightarrow S(\pi/\sqrt{1+\beta^2}) < \pi,$$

$$S(t_1) = \pi \Rightarrow \pi/\sqrt{1+\beta^2} < t_1 < 2\pi/\sqrt{1+\beta^2}. \tag{37}$$

Поэтому ввиду предложения 3 $\pi/2 < \psi(t_1) < \pi$ и

$$S(t_1) = \pi \Leftrightarrow 2\psi - |\beta|t_1 = \pi \Leftrightarrow \frac{|\beta|t_1}{2} = \psi - \pi/2. \tag{38}$$

Вследствие (34) и (21)

$$\cos\psi = \frac{m}{\sqrt{n(2-n)}} = \frac{\sqrt{1+\beta^2}\sin(t_1\sqrt{1+\beta^2})}{\sqrt{(1-\cos(t_1\sqrt{1+\beta^2}))(1+\cos(t_1\sqrt{1+\beta^2})+2\beta^2)}}$$
$$= \frac{\sqrt{1+\beta^2}\cos(t_1\sqrt{1+\beta^2}/2)}{\sqrt{\cos^2(t_1\sqrt{1+\beta^2}/2)+\beta^2}}.$$

Отсюда и из (38) на основании неравенств для t_1 и ψ получаем

$$\sin\psi = \sqrt{1-\cos^2\psi} = \frac{|\beta|\sin(t_1\sqrt{1+\beta^2}/2)}{\sqrt{\cos^2(t_1\sqrt{1+\beta^2}/2)+\beta^2}},$$

$$\sin\left(\frac{|\beta|t_1}{2}\right) = \sin\left(\psi - \frac{\pi}{2}\right) = -\cos\psi = \frac{-\sqrt{1+\beta^2}\cos(t_1\sqrt{1+\beta^2}/2)}{\sqrt{\cos^2(t_1\sqrt{1+\beta^2}/2)+\beta^2}}, \tag{39}$$

$$\cos\left(\frac{|\beta|t_1}{2}\right) = \cos\left(\psi - \frac{\pi}{2}\right) = \sin\psi = \frac{|\beta|\sin(t_1\sqrt{1+\beta^2}/2)}{\sqrt{\cos^2(t_1\sqrt{1+\beta^2}/2)+\beta^2}}, \tag{40}$$

$$0 < |\beta|t_1 < \pi. \tag{41}$$

Из (39), (40) следует, что

$$\sin(|\beta|t_1) = 2\sin\left(\frac{|\beta|t_1}{2}\right)\cos\left(\frac{|\beta|t_1}{2}\right) = \frac{-2|\beta|\sqrt{1+\beta^2}\sin(t_1\sqrt{1+\beta^2})}{1+2\beta^2+\cos(t_1\sqrt{1+\beta^2})}, \tag{42}$$

$$\cos(|\beta|t_1) = \cos^2\left(\frac{|\beta|t_1}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{|\beta|t_1}{2}\right) = -\frac{1+(1+2\beta^2)\cos(t_1\sqrt{1+\beta^2})}{1+2\beta^2+\cos(t_1\sqrt{1+\beta^2})}. \tag{43}$$

Теорема 5. *Условия* (а), (б) *предложения* 4 *задают непрерывную функцию* $t_1 = t_1(|\beta|)$, *возрастающую при* $0 \le |\beta| \le 1/\sqrt{3}$ *и убывающую при* $1/\sqrt{3} \le |\beta| < +\infty$.

Доказательство. Второе утверждение очевидно. Первое утверждение верно, так как $dt_1/d|\beta| > 0$ при $0 < |\beta| < 1/\sqrt{3}$ вследствие (38), (35), (21), (37):

$$t_1 + |\beta|\frac{dt_1}{d|\beta|} = 2\psi'(t_1)\cdot\frac{dt_1}{d|\beta|} = \frac{2|\beta|}{2-n}\cdot\frac{dt_1}{d|\beta|},$$

$$t_1 = \frac{|\beta|n}{2-n}\cdot\frac{dt_1}{d|\beta|} = \frac{|\beta|\sin^2(t_1\sqrt{1+\beta^2}/2)}{\beta^2+\cos^2(t_1\sqrt{1+\beta^2}/2)}\cdot\frac{dt_1}{d|\beta|}. \quad \square$$

Теорема 6. $\operatorname{diam}(SO(3), d) = \pi\sqrt{3}$.

Доказательство. Из теоремы 5 следует, что максимальная длина кратчайшей достигается при $\beta^2 = 1/3$ и равна $\pi\sqrt{3}$. Отсюда получаем нужное утверждение. $\square$

Замечание 5. Утверждение теоремы 6 — частный случай первого утверждения теоремы 2 из [1].

4. Множества раздела и сопряженные множества в $(SO(3), d)$

Для субриманова многообразия (M, d) без анормальных геодезических (как в случае $(SO(3), d)$) в отличие от римановых многообразий экспоненциальное отображение Exp_x, $x \in M$, определено не на T_xM, а на $D(x) \times \operatorname{Ann}(D(x))$, где D — распределение на M, участвующее в определении метрики d, а

$$\operatorname{Ann}(D(x)) = \{\psi \in T_x^*M : \langle\psi, D(x)\rangle = 0\}$$

(см. [10]). В остальном множества раздела и сопряженные множества для субриманова многообразия определяются так же, как для риманова [11].

Определение 1. *Множество раздела* $C(x)$ (соответственно (первое) сопряженное множество $S(x)$ ($S_1(x)$)) для точки x субриманова многообразия M (без анормальных геодезических) есть множество всех концов $y \in M$ не продолжаемых за y кратчайших, соединяющих точку x с точкой y (соответственно образ множества (первых) критических значений (вдоль геодезических с началом в x) отображения Exp_x относительно Exp_x).

Теорема 7. *Для любого элемента* $g \in (SO(3), d)$ *имеют место равенства* $C(g) = gC(e)$ *и* $S(g) = gS(e)$. *Кроме того,* $S_1(g) \subset C(g)$,

$$C(e) = \{\gamma_\beta(t_1(\beta)) : \beta \in \mathbb{R}\}, \tag{44}$$

$$S_1(e) = \{\gamma_\beta(t_1(\beta)) : \beta^2 \ge 1/3\} = SO(2) \setminus \{e\}, \tag{45}$$

$S_1(e)$ *диффеоморфно* $\mathbb{R}$;

$$\overline{S_1(e)} = S_1(e) \cup \{e\} = SO(2), \tag{46}$$

$\overline{S_1(e)}$ *диффеоморфно окружности* S^1;

$$\overline{C(e) \setminus S_1(e)} = (C(e) \setminus S_1(e)) \cup \{\gamma_\beta(t_1(\beta)) = \gamma_{-\beta}(t_1(-\beta)) : \beta = 1/\sqrt{3}\}, \tag{47}$$

$\overline{C(e) \setminus S_1(e)}$ *диффеоморфно вещественной проективной плоскости* RP^2; $C(e)$ *гомеоморфно* $RP^2 \cup \mathbb{R}$, *где* $RP^2 \cap \mathbb{R}$ *одноточечно;* $\overline{C(e)}$ *гомеоморфно* $RP^2 \cup S^1$, *где* $RP^2 \cap S^1$ *одноточечно.*

Доказательство. Первое утверждение — следствие левой инвариантности метрики d на $SO(3)$. Включение $S_1(g) \subset C(g)$, формулы (44), (45), равенство в фигурной скобке из (47) и диффеоморфность $S_1(e) \cong \mathbb{R}$ — следствия доказательства предложения 4 и замечания 4. Формула (46) и диффеоморфность $\overline{S_1(e)} \cong S^1$ вытекают из формулы (45). Равенство (47) следует из формул (44), (45), а $\overline{C(e) \setminus S_1(e)} \cong RP^2$ — из равенств

$$\gamma_{(\beta,\phi_0)}(t_1(\beta)) = \gamma_{(-\beta,-\beta t_1+\phi_0+\pi)}(t_1(-\beta))$$

при $\beta^2 \leq 1/3$. Из уже доказанных утверждений легко получить остальные. $\square$

Замечание 6. Из (46) и равенств $C(g) = gC(e)$, $S(g) = gS(e)$ следует, что $g \in gSO(2) = \overline{S(g)} \subset \overline{C(g)}$ для всех $g \in SO(3)$, в то время как $x \notin \overline{C(x)}$ и $x \notin \overline{S(x)}$ для любой точки x произвольного гладкого риманова многообразия. В этом состоит коренное различие римановых и субримановых многообразий.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Берестовский В. Н., Зубарева И. А.* Формы сфер специальных неголономных левоинвариантных метрик на некоторых группах Ли // Сиб. мат. журн. 2001. Т. 42, № 4. С. 731–748.
2. *Sasaki S.* On the differential geometry of tangent bundles of Riemannian manifolds // Tohoku Math. J. 1958. V. 10, N 3. P. 338–354; II: 1962. V. 14, N 2. P. 146–155.
3. *Бессе А. Л.* Многообразия с замкнутыми геодезическими. М.: Мир, 1981.
4. *Berestovskii V. N., Guijarro L.* A metric characterization of Riemannian submersions // Ann. Global Anal. Geom. 2000. V. 18, N 6. P. 577–588.
5. *Погорелов А. В.* Дифференциальная геометрия. М.: Наука, 1969.
6. *Берестовский В. Н.* Универсальные методы поиска нормальных геодезических на группах Ли с левоинвариантной субримановой метрикой // Сиб. мат. журн. 2014. Т. 55, № 5. С. 959–970.
7. *Boscain U., Rossi F.* Invariant Carnot–Carathéodory metrics on S^3, $SO(3)$, $SL(2)$, and lens spaces // SIAM J. Control Optim. 2008. V. 47, N 4. P. 1851–1878.
8. *Хелгасон С.* Дифференциальная геометрия и симметрические пространства. М.: Мир, 1964.
9. *Аграчев А. А., Сачков Ю. Л.* Геометрическая теория управления. М.: Физматлит, 2005.
10. *Вершик А. М., Гершкович В. Я.* Неголономные динамические системы. Геометрия распределений и вариационные задачи // Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. М.: ВИНИТИ АН СССР, 1987. Т. 16. С. 5–85. (Итоги науки и техники).

11. *Громол Д., Клингенберг В., Мейер В.* Риманова геометрия в целом. М.: Мир, 1971.

Статья поступила 11 июня 2014 г.

Берестовский Валерий Николаевич
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090
vberestov@inbox.ru

Зубарева Ирина Александровна
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Омский филиал,
ул. Певцова, 13, Омск 644099
i_gribanova@mail.ru