Сибирский математический журнал
Май—июнь, 2015. Том 56, № 3

УДК 512.540+510.5

УНИВЕРСАЛЬНЫЕ ФУНКЦИИ И ПОЧТИ c–ПРОСТЫЕ МОДЕЛИ

А. Н. Хисамиев

Аннотация. Введено понятие почти c-простой модели и доказано существование универсальной Σ-функции в наследственно конечной надстройке над такой моделью. Построены семейства почти c-простых деревьев и эквивалентностей.

DOI 10.17377/smzh.2015.56.316

Ключевые слова: наследственно конечное допустимое множество, универсальная Σ-функция, почти c-простая модель, дерево, эквивалентность.

В настоящее время общепризнанно, что одним из важных обобщений понятия вычислимости является Σ-определимость (обобщенная вычислимость) в допустимых множествах. Это обобщение дало возможность исследовать проблемы вычислимости над произвольными алгебраическими системами, например, над полем вещественных чисел. В [1, 2] понятие Σ-определимости позволило сформулировать новую концепцию теоретического программирования, так называемое семантическое программирование, в которой программа является одновременно своей же спецификацией, а исполнение ее сводится к проверке истинности утверждения на алгебраической системе. Наиболее важные результаты по теории вычислимости в допустимых множествах и их применение в теоретической информатике (семантическое программирование, динамическая логика, теория эффективных f-пространств и т. д.) приведены в монографии Ю. Л. Ершова [3], в которой отмечена важность следующего направления дальнейших исследований: «для лучшего понимания общей природы вычислимости (конструктивной познаваемости) следует дальше развить (понять) вычислимость в допустимых множествах вида $\mathbb{HF}(\mathfrak{A})$ — наследственно конечной надстройке над системой $\mathfrak{A}$, где $\mathfrak{A}$ является либо моделью достаточно простой теории, либо одним из классических объектов, таким, например, как поле $\mathbb{R}$ вещественных чисел» [3, с. 12].

Одним из принципиальных результатов классической теории вычислимости является существование универсальной частично вычислимой функции. Как известно (см. [3]), в любом допустимом множестве конечной сигнатуры существует универсальный Σ-предикат, но это неверно для Σ-функций. В [4] построена модель $\mathfrak{M}$ такая, что в наследственно конечном допустимом множестве $\mathbb{HF}(\mathfrak{M})$ не существует универсальной Σ-функции. Поэтому представляет интерес нахождение условия на модель $\mathfrak{M}$ для существования универсальной Σ-функции в наследственно конечной надстройке $\mathbb{HF}(\mathfrak{M})$ над $\mathfrak{M}$. Отметим,

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта АНФ_а 13–01–91001) и Совета по грантам президента РФ и государственной поддержке ведущих научных школ (код проекта НШ–860.2014.1).

что существование универсальной Σ-функции дает возможность в семантическом программировании получить универсальный язык программирования для Σ-функций на основе Σ-программ. В [3] доказано, что если $\mathfrak{M}$ — модель разрешимой и модельно полной теории, то в $\mathbb{HF}(\mathfrak{M})$ существует универсальная Σ-функция. В [5–7] для одного класса K моделей найдены необходимые и достаточные условия для существования универсальной Σ-функции в $\mathbb{HF}(\mathfrak{M})$, где $\mathfrak{M} \in K$. В [8] установлено, что наследственно конечная списочная надстройка $\mathbb{HW}(\mathbb{R}_{\exp})$ над полем вещественных чисел с экспонентой удовлетворяет свойству униформизации, и как следствие получено существование универсальной Σ-функции в такой надстройке. Справедливость свойства униформизации для наследственно конечных надстроек $\mathbb{HF}(\mathbb{R})$ и $\mathbb{HF}(\mathbb{Q}_p)$ над полями вещественных и p-адических показана в [9, 10]. В [11] построена абелева группа без кручения A такая, что в $\mathbb{HF}(A)$ не существует универсальной Σ-функции. В [12, 13] введено понятие Σ-ограниченной модели и получено необходимое и достаточное условие для существования универсальной Σ-функции в наследственно конечной надстройке над такой моделью. Доказано, что любой линейный порядок, алгебра Ершова и абелева p-группа являются Σ-ограниченными моделями и в наследственно конечных надстройках над ними существуют универсальные Σ-функции. В [14, 15] введено понятие Σ-однородной модели, дано необходимое и достаточное условие для существования универсальной функции в наследственно конечных надстройках над такими моделями и приведены примеры Σ-однородных абелевых групп и колец. В [16] построено дерево T высоты 4 такое, что в $\mathbb{HF}(T)$ не существует универсальной Σ-функции.

В [3] введено понятие простой теории, которая в [17] названа c-простой, т. е. разрешимая, модельно полная, ω-категоричная теория с разрешимым множеством полных формул называется *c-простой*.

В данной работе введено понятие почти c-простой модели и доказано существование универсальной Σ-функции в наследственно конечной надстройке над такой моделью. Построены семейства почти c-простых деревьев и эквивалентностей.

Рассматриваются модели конечных предикатных сигнатур. Заметим, что это ограничение не мешает рассматривать сигнатуры с операциями. Действительно, каждую сигнатурную операцию можно естественным способом заменить предикатом, который интерпретируется как график этой операции. Отметим, что при переходе от операциональных сигнатур к соответствующим чисто предикатным сигнатурам и обратно класс Σ-определимых отношений не изменяется.

Мы придерживаемся терминологии и обозначений по допустимым множествам из [3] и [12], по деревьям — из [18]. Напомним лишь некоторые из них.

Пусть $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$ — модели сигнатуры σ_0, основные множества которых обозначаются через M, N соответственно; $\mathfrak{M}_0 \leq \mathfrak{M}$ означает, что $\mathfrak{M}_0$ — подмодель $\mathfrak{M}$; если $A \subseteq M$, то под A будем понимать подмодель $\langle A, \sigma_0 \upharpoonright A \rangle \leq \mathfrak{M}$; $M^{<\omega}$ — множество всех конечных последовательностей элементов из M; $lh\, \vec{a}$ — длина последовательности $\vec{a}$; если $\vec{a}_0, \dots, \vec{a}_{k-1}, \vec{b}_0, \dots, \vec{b}_{k-1} \in M^{<\omega}$, то отношение «$\varphi : \langle \vec{a}_0, \dots, \vec{a}_{k-1} \rangle \to \langle \vec{b}_0, \dots, \vec{b}_{k-1} \rangle$ — изоморфизм» означает, что $\varphi : \bigcup \operatorname{sp} \vec{a}_i \to \bigcup \operatorname{sp} \vec{b}_i$ — изоморфизм относительно сигнатуры σ_0, $\varphi \vec{a}_i = \vec{b}_i$, $i < k$, где $\varphi \langle a_i^0, \dots, a_i^{k-1} \rangle = \langle \varphi a_i^0, \dots, \varphi a_i^{k-1} \rangle$.

Под *допустимым множеством* $\mathbb{A}$ будем понимать KPU-модель, у которой множество $\operatorname{Ord} \mathbb{A}$ всех ординалов вполне упорядочено. Функция в $\mathbb{A}$, график которой определяется некоторой Σ-формулой в $\mathbb{A}$, называется Σ-*функцией*.

Двухместная частичная Σ-функция $g(x,y) : A^2 \to A$ называется *универсальной* для семейства одноместных частичных Σ-функций в допустимом множестве $\mathbb{A}$, если семейство $\{\lambda y\ g(a,y) \mid a \in A\}$ состоит из всех одноместных частичных Σ-функций.

Важным классом допустимых множеств является класс наследственно конечных допустимых множеств вида $\mathbb{HF}(\mathfrak{M})$ — наследственно конечная надстройка над моделью $\mathfrak{M}$. Пусть $\mathscr{P}_\omega(X)$ — множество всех конечных подмножеств множества X.

Наследственно конечная надстройка $\mathbb{HF}(\mathfrak{M})$ *над алгебраической системой* $\mathfrak{M} = \langle M, \sigma_0\rangle$ определяется как алгебраическая система $\langle M \cup HF(M), U, \in, \varnothing, \sigma_0\rangle$ сигнатуры $\sigma_1 = \langle U, \in, \varnothing, \sigma_0\rangle$, где

$$HF(M) = \bigcup_{n\in\omega} HF_n(M), \quad HF_0(M) = \varnothing,$$

$$HF_{n+1}(M) = \mathscr{P}_\omega(M \cup HF_n(M)),$$

и предикат U выделяет множество элементов модели $\mathfrak{M}$ (*праэлементов*), а отношение $\in$ и константа $\varnothing$ имеют обычные теоретико-множественные смыслы.

Напомним, что носитель $\operatorname{sp} u$ элемента $u \in \mathbb{HF}(\mathfrak{M})$ определяется так: если $u \in M$, то $\operatorname{sp} u = \{u\}$. Пусть $u = \{x_0, \dots, x_s\}$, тогда $\operatorname{sp} u = \bigcup\limits_{i=1}^{s} \operatorname{sp} x_i$. Элементами множества ω в $\mathbb{HF}(\mathfrak{M})$ являются ординалы.

Пусть S_m — множество всех подстановок множества $\{0, \dots, m-1\}$, если $m > 0$, и S_0 — множество, состоящее из тождественной подстановки множества $\{0\}$. Пусть дана последовательность $\vec{x} = \langle x_0, \dots, x_{m-1}\rangle$, $lh\,\vec{x} = m$, и $\sigma \in S_m$. Тогда $\vec{x}_\sigma = \langle x_{\sigma(0)}, \dots, x_{\sigma(m-1)}\rangle$, $\varnothing_\sigma = \varnothing$. Если $\varkappa(0, \dots, m-1) \in HF(\omega)$, то $S_\varkappa = \{\sigma \in S_m \mid \varkappa(0, \dots, m-1) = \varkappa(\sigma(0), \dots, \sigma(m-1))\}$. Слово «вложение» означает «изоморфное вложение».

§ 1. Почти *c*-простые модели

Здесь введено понятие почти c-простой модели и доказано существование универсальной Σ-функции в наследственно конечной надстройке над такой моделью.

Пусть дана модель $\mathfrak{M}$ конечной сигнатуры σ_0 и для каждого конечного подмножества $M_0 \subseteq M$ существует однозначно определенное конечное подмножество $[M_0] \subseteq M$ такое, что $M_0 \subseteq [M_0]$ и $[[M_0]] = [M_0]$. Множество $[M_0]$ называется *замыканием множества* M_0. Если $[M_0] = M_0$, то M_0 назовем *замкнутым множеством*.

Определение 1.1. Пусть для модели $\mathfrak{M}$ конечной сигнатуры σ_0 и ее подмодели $\mathfrak{N} \leq \mathfrak{M}$ справедливы следующие условия.

1. $\mathfrak{N}$ — модель c-простой теории T, и ее носитель N является Σ-подмножеством в $\mathbb{HF}(\mathfrak{M})$.

2. В $\mathbb{HF}(\mathfrak{N})$ существуют Σ-формулы без параметров, определяющие Δ-предикат $\mathfrak{B} \subseteq \mathscr{P}_\omega(N) \times \mathscr{P}_\omega(N)$, для которого справедливо

$$\mathbb{HF}(\mathfrak{N}) \models \mathfrak{B}(x, y \cup z)\ \&\ x \subseteq y, x \subseteq z \to \mathfrak{B}(x,y)\ \&\ \mathfrak{B}(x,z).$$

3. Модель $\mathfrak{M}$ локально вложима в $\mathfrak{N}$.

Пусть $A \subseteq M$, $B \subseteq N$ и $\alpha : A \to B$ — изоморфизм. Тогда

(a) если A замкнуто, то для любого конечного $A^1 \supseteq A$ существует вложение $\psi : A^1 \to \mathfrak{N}$, продолжающее α, такое, что $\mathbb{HF}(\mathfrak{N}) \models \mathfrak{B}(B, \psi A^1)$;

(b) если вложения $\varphi^\varepsilon : A^\varepsilon \to \mathfrak{N}$, $A^\varepsilon \supseteq A$, $\varepsilon < 2$, продолжают α и $\mathbb{HF}(\mathfrak{N}) \models \mathfrak{B}(B, \varphi^\varepsilon A^\varepsilon)$, то существует вложение $\psi : (A^0 \cup A^1) \to \mathfrak{N}$, продолжающее α, для которого $\mathbb{HF}(\mathfrak{N}) \models \mathfrak{B}(B, \psi(A^0 \cup A^1))$;

(c) для любого $B^1 \supseteq B$ такого, что $\mathbb{HF}(\mathfrak{N}) \models \mathfrak{B}(B, B^1)$, существует вложение $\psi : B^1 \to \mathfrak{M}$, продолжающее α^{-1}.

Тогда $\mathfrak{M}$ назовем *почти c-простой моделью.*

Теорема 1.1. *В наследственно конечной надстройке $\mathbb{HF}(\mathfrak{M})$ над почти c-простой моделью $\mathfrak{M}$ существует универсальная Σ-функция.*

Для доказательства теоремы нам потребуются следующие леммы.

Для любой Σ-формулы $\Phi(\vec{b}, u, v) = \exists w \Phi_0^{(w)}(\vec{b}, u, v)$ введем формулу

$$\Phi^*(\vec{b}, u, v, e) = \Phi_0^{(e)}(\vec{b}, u, v) \ \&\ \mathfrak{B}(\operatorname{sp}\vec{b}, \operatorname{sp} e \cup \operatorname{sp}\vec{b} \cup \operatorname{sp} u \cup \operatorname{sp} v).$$

Лемма 1.1. *Пусть $\vec{a} \in M^{<\omega}$, $\vec{b} \in N^{<\omega}$, $\alpha : \vec{a} \to \vec{b}$ — изоморфизм и Σ-формула $\Phi(\vec{a}, x, z) = \exists d \Phi_0^{(d)}(\vec{a}, x, z)$ с параметром $\vec{a}$ определяет функцию f в $\mathbb{HF}(\mathfrak{M})$. Тогда формула $\exists e \Phi^*(\vec{b}, u, v, e)$ с параметром $\vec{b}$ определяет некоторую Σ-функцию $g_{\Phi,\alpha}$ в $\mathbb{HF}(\mathfrak{N})$.*

Доказательство. Пусть $\mathbb{HF}(\mathfrak{N}) \models \Phi^*(\vec{b}, u^\varepsilon, v^\varepsilon, e^\varepsilon)$, $\varepsilon < 2$, и $u^0 = u^1$. Тогда существуют конечные подмножества $N^\varepsilon = \operatorname{sp} e^\varepsilon \cup \operatorname{sp}\vec{b} \cup \operatorname{sp} u^\varepsilon \cup \operatorname{sp} v^\varepsilon$ такие, что

$$\mathbb{HF}(N^\varepsilon) \models \exists e^\varepsilon \Phi_0^{(e^\varepsilon)}(\vec{b}, u^\varepsilon, v^\varepsilon) \tag{1}$$

и $\mathbb{HF}(\mathfrak{N}) \models \mathfrak{B}(\operatorname{sp}\vec{b}, N^\varepsilon)$. По условию 3(b) существует вложение $\psi_1 : N^0 \cup N^1 \to \mathfrak{N}$ такое, что $\psi_1(\vec{b}) = \vec{b}$ и $\mathbb{HF}(\mathfrak{N}) \models \mathfrak{B}(\operatorname{sp}\vec{b}, \psi_1(N^0 \cup N^1))$. Пусть $N_0 = \psi_1(N^0 \cup N^1)$. По условию 3(c) существует вложение $\psi : N_0 \to \mathfrak{M}$, для которого $\psi(\vec{b}) = \vec{a}$. Пусть ψ_1^* и ψ^* — естественное продолжение вложений ψ_1 и ψ в наследственно конечную надстройку над $N^0 \cup N^1$ и N_0 соответственно. Тогда из (1) вытекает $\mathbb{HF}(\mathfrak{M}) \models \Phi(\vec{a}, \psi^*\psi_1^* u^\varepsilon, \psi^*\psi_1^* v^\varepsilon)$. Так как $\psi^*\psi_1^* u^0 = \psi^*\psi_1^* u^1$ и формула Φ определяет функцию в $\mathbb{HF}(\mathfrak{M})$, имеем $\psi^*\psi_1^* v^0 = \psi^*\psi_1^* v^1$, т. е. $v^0 = v^1$. Таким образом, формула $\exists e \Phi^*(\vec{b}, u, v, e)$ определяет некоторую функцию $g_{\Phi,\alpha}$ в $\mathbb{HF}(\mathfrak{N})$. $\square$

Следующая лемма непосредственно вытекает из определения c-простой теории.

Лемма 1.2. *Пусть T — c-простая теория. Тогда существует сильно вычислимая последовательность $\{P_n\}_{n\in\omega}$, где P_n — множество номеров не T-эквивалентных полных $\exists$-формул от переменных $\vec{x} = \langle x_0, \dots, x_{n-1}\rangle$, содержащее все с точностью до T-эквивалентности полные формулы от переменных $\vec{x}$.*

Пусть $\vec{a} = \langle a_0, \dots, a_{n-1}\rangle \in M^n$ и $D_{\vec{a}}(a_0, \dots, a_{n-1})$ — диаграмма подмодели $\langle \operatorname{sp}\vec{a}, \sigma_0\rangle$. Через $D_{\vec{a}}(\vec{x})$ обозначим формулу, полученную из $D_{\vec{a}}(\vec{a})$ заменой a_i на x_i. Пусть $\mathfrak{N}$ — счетная модель c-простой теории с основным множеством N. Для любых кортежей $\vec{b}, \vec{u} \in N^{<\omega}$ и $m = lh\,\vec{b} + lh\,\vec{u}$ введем формулу

$$\begin{aligned} I(K, \vec{b}, \vec{u}) = \forall \varphi \in K D_{\vec{b},\vec{u}}(\vec{b}, \varphi\vec{u}) \ \&\ \forall s \in P_m(\exists \vec{u}^0(D_{\vec{b},\vec{u}}(\vec{b}, \vec{u}^0) \ \&\ \Phi_s(\vec{b}, \vec{u}^0)) \\ \to \exists \varphi^0 \in K(\Phi_s(\vec{b}, \varphi^0\vec{u}) \ \&\ \forall \varphi^1 \in K(\varphi^0 \neq \varphi^1 \to \neg\Phi_s(\vec{b}, \varphi^1\vec{u})))). \end{aligned}$$

Легко проверить, что для любых $\vec{b}, \vec{u} \in N^{<\omega}$ предикат I определяет конечное множество изоморфизмов K, мощность которого равна мощности полных формул, совместных с $D_{\vec{b},\vec{u}}(\vec{x})$. Поскольку теория T модельно полна и разрешима, эффективно находится Σ-формула с параметрами $\vec{b},\vec{u}$, определяющая предикат I.

Для любых Σ-формул $\Phi(\vec{a},x,z)=\exists d\Phi_0^{(d)}(\vec{a},x,z)$, $\Psi(\vec{b},u,v)$ и изоморфизма $\alpha:\vec{a}\to\vec{b}$ введем формулу

$$\Xi_{\Psi,\Phi,\alpha}(x,z)=\exists d\big(\Phi_0^{(d)}(\vec{a},x,z)\ \&\ \exists\varkappa\,\exists\tau\,\exists\rho\,\exists\vec{x}\,\exists\vec{z}\,\exists\vec{d}\,\exists\vec{u}\,\exists\vec{v}\,\exists\vec{e}\,\exists\varphi(\varkappa,\tau,\rho\in HF(\omega)$$
$$\&\ x=\varkappa(\vec{x})\ \&\ z=\tau(\vec{z})\ \&\ d=\rho(\vec{d})\ \&\ \vec{x},\vec{z},\vec{d}\in M^{<\omega}\ \&\ \vec{u},\vec{v},\vec{e}\in N^{<\omega}$$
$$\&\ D_{\langle\vec{a},\vec{x},\vec{z},\vec{d}\rangle}(\langle\vec{b},\vec{u},\vec{v},\vec{e}\rangle)\ \&\ \ \mathbb{HF}(\mathfrak{N})\models[\Phi^*(\vec{b},\varkappa(\vec{u}),\tau(\vec{v}),\rho(\vec{e}))\ \&\ \Psi(\vec{b},\varkappa(\vec{u}),\tau(\vec{v}))$$
$$\&\ \exists K(I(K,\vec{b},\langle\vec{u},\vec{v},\vec{e}\rangle)\ \&\ \forall\varphi\in K(\mathfrak{B}(\operatorname{sp}\vec{b},\operatorname{sp}\varphi\vec{e}\cup\operatorname{sp}\vec{b}\cup\operatorname{sp}\varphi\vec{u}\cup\operatorname{sp}\varphi\vec{v})$$
$$\to\Psi(\vec{b},\varkappa(\varphi\vec{u}),\tau(\varphi\vec{v}))))]\big).$$

Лемма 1.3. *Пусть модели $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$ удовлетворяют условиям определения* 1.1. *Тогда справедливы следующие утверждения.*

1. *Пусть Σ-формула $\Psi(\vec{b},u,v)$ с параметром $\vec{b}\in N^{<\omega}$ определяет функцию g в $\mathbb{HF}(\mathfrak{N})$. Тогда для любых $\vec{a}\in M^{<\omega}$, изоморфизма $\alpha:\vec{a}\to\vec{b}$ и Σ-формулы $\Phi(\vec{a},x,z)=\exists d\Phi_0^{(d)}(\vec{a},x,z)$ формула $\Xi_{\Psi,\Phi,\alpha}(x,z)$ определяет некоторую Σ-функцию $f_{\Psi,\Phi,\alpha}$ в $\mathbb{HF}(\mathfrak{M})$.*

2. *Пусть функция f определена Σ-формулой $\Phi(\vec{a},x_1,x_2)=\exists d\Phi_0^{(d)}(\vec{a},x_1,x_2)$ в $\mathbb{HF}(\mathfrak{M})$ с параметром $\vec{a}$, $\operatorname{sp}\vec{a}$ замкнуто, $\alpha:\vec{a}\to\vec{b}$ — изоморфизм, и функция $g_{\Phi,\alpha}(u,v)$, введенная в лемме* 1.1 *по функции f, определена формулой $\Psi(\vec{b},u,v)$. Тогда функция $f_{\Psi,\Phi,\alpha}$, определенная по Ψ,Φ,α, как в п.* (1), *расширяет функцию f.*

Доказательство. Докажем утверждение 1. Пусть

$$\mathbb{HF}(\mathfrak{M})\models\Xi_{\Psi,\Phi,\alpha}(\varkappa^\varepsilon(\vec{x}^\varepsilon),\tau^\varepsilon(\vec{z}^\varepsilon)),\quad \varepsilon<2,\tag{2}$$

и

$$\varkappa^0(\vec{x}^0)=\varkappa^1(\vec{x}^1),\tag{3}$$

т. е.

$$\varkappa^0=\varkappa^1\rightleftharpoons\varkappa,\quad \vec{x}^1=\vec{x}^0_\sigma\tag{4}$$

для некоторой подстановки $\sigma\in S_\varkappa$. Докажем, что $\tau^0(\vec{z}^0)=\tau^1(\vec{z}^1)$. Из (2) следует, что существуют изоморфизмы $\varphi_\varepsilon:\langle\vec{a},\vec{x}^\varepsilon,\vec{z}^\varepsilon,\vec{d}^\varepsilon\rangle\to\langle\vec{b},\vec{u}^\varepsilon,\vec{v}^\varepsilon,\vec{e}^\varepsilon\rangle$ такие, что

$$\mathbb{HF}(\mathfrak{N})\models\Phi^*(\vec{b},\varkappa(\vec{u}^\varepsilon),\tau^\varepsilon(\vec{v}^\varepsilon),\rho^\varepsilon(e^\varepsilon))\ \&\ \Psi(\vec{b},\varkappa(\vec{u}^\varepsilon),\tau^\varepsilon(\vec{v}^\varepsilon))$$
$$\&\ \exists K^\varepsilon(I(K^\varepsilon,\vec{b},\langle\vec{u}^\varepsilon,\vec{v}^\varepsilon,\vec{e}^\varepsilon\rangle)\ \&\ \forall\varphi\in K^\varepsilon(\mathfrak{B}(\operatorname{sp}\vec{b},\operatorname{sp}\varphi\vec{e}^\varepsilon\cup\operatorname{sp}\vec{b}\cup\operatorname{sp}\varphi\vec{u}^\varepsilon\cup\operatorname{sp}\varphi\vec{v}^\varepsilon)$$
$$\to\Psi(\vec{b},\varkappa(\varphi\vec{u}^\varepsilon),\tau^\varepsilon(\varphi\vec{v}^\varepsilon)))).\tag{5}$$

Отсюда и из определения формулы Φ^* следует, что для φ_ε справедливы требования условия 3(b), а потому существует изоморфизм

$$\psi:\langle\vec{a},\vec{x}^0,\vec{x}^1,\vec{z}^0,\vec{z}^1,\vec{d}^0,\vec{d}^1\rangle\to\big\langle\vec{b},\vec{u}^0_0,\vec{u}^1_0,\vec{v}^0_0,\vec{v}^1_0,\vec{e}^0_0,\vec{e}^1_0\big\rangle\tag{6}$$

такой, что $\mathbb{HF}(\mathfrak{N})\models\mathfrak{B}\big(\operatorname{sp}\vec{b},\operatorname{sp}\vec{e}^0_0\cup\operatorname{sp}\vec{e}^1_0\cup\operatorname{sp}\vec{b}\cup\operatorname{sp}\vec{u}^0_0\cup\operatorname{sp}\vec{u}^1_0\cup\operatorname{sp}\vec{v}^0_0\cup\operatorname{sp}\vec{v}^1_0\big)$. Отсюда и из условия 2 определения 1.1 вытекает, что

$$\mathbb{HF}(\mathfrak{N})\models\mathfrak{B}\big(\operatorname{sp}\vec{b},\operatorname{sp}\vec{e}^\varepsilon_0\cup\operatorname{sp}\vec{b}\cup\operatorname{sp}\vec{u}^\varepsilon_0\cup\operatorname{sp}\vec{v}^\varepsilon_0\big).\tag{7}$$

Так как $\mathbb{HF}(\mathfrak{N}) \models D_{\vec{b},\langle\vec{u}^0,\vec{v}^0,\vec{e}^0\rangle}(\vec{b},\psi\circ\varphi_0^{-1}\langle\vec{u}^0,\vec{v}^0,\vec{e}^0\rangle)$, существуют $\varphi\in K^0$ и полная формула, истинная на элементах $\langle\vec{b},\varphi\vec{u}^0,\varphi\vec{v}^0,\varphi\vec{e}^0\rangle$ и $\langle\vec{b},\vec{u}^0_0,\vec{v}^0_0,\vec{e}^0_0\rangle$. Отсюда и из (7) получим

$$\mathbb{HF}(\mathfrak{N}) \models \mathfrak{B}(\operatorname{sp}\vec{b},\operatorname{sp}\varphi\vec{e}^0\cup\operatorname{sp}\vec{b}\cup\operatorname{sp}\varphi\vec{u}^0\cup\operatorname{sp}\varphi\vec{v}^0). \tag{8}$$

Из (8) и (5) имеем

$$\mathbb{HF}(\mathfrak{N}) \models \Psi(\vec{b},\varkappa(\varphi\vec{u}^0),\tau^0(\varphi\vec{v}^0)).$$

Стало быть,

$$\mathbb{HF}(\mathfrak{N}) \models \Psi(\vec{b},\varkappa(\vec{u}^0_0),\tau^0(\vec{v}^0_0)). \tag{9}$$

Из (4), (6) следует, что $\psi:\langle\vec{a},\vec{x}^1,\vec{z}^0,\vec{z}^1,\vec{d}^0,\vec{d}^1\rangle\to\langle\vec{b},(\vec{u}^0_0)_\sigma,\vec{v}^0_0,\vec{v}^1_0,\vec{e}^0_0,\vec{e}^1_0\rangle$ также изоморфизм. Поэтому аналогично (9)

$$\mathbb{HF}(\mathfrak{N}) \models \Psi(\vec{b},\varkappa((\vec{u}^0_0)_\sigma),\tau^1(\vec{v}^1_0)). \tag{10}$$

Так как формула Ψ определяет функцию, из (3), (4), (9), (10) получим $\tau^0(\vec{v}^0_0)=\tau^1(\vec{v}^1_0)$. Отсюда согласно (6) вытекает требуемое равенство $\tau^0(\vec{z}^0)=\tau^1(\vec{z}^1)$, т. е. утверждение (1) доказано.

Докажем утверждение 2. Пусть $f(x)=z$. Достаточно доказать, что в $\mathbb{HF}(\mathfrak{M})$ выполнена формула $\Xi_{\Psi,\Phi,\alpha}(x,z)$. Так как f определяется формулой Φ, справедливо $\mathbb{HF}(\mathfrak{M})\models\exists d\Phi_0^{(d)}(\vec{a},x,z)$. Пусть $x=\varkappa(\vec{x})$, $z=\tau(\vec{z})$, $d=\rho(\vec{d})$, $\varkappa,\tau,\rho\in HF(\omega)$, $\vec{x},\vec{z},\vec{d}\in M^{<\omega}$. Поскольку $\operatorname{sp}\vec{a}$ замкнуто, по условию 3(а) существует вложение $\psi:\operatorname{sp}\vec{a}\cup\operatorname{sp}\vec{x}\cup\operatorname{sp}\vec{z}\cup\operatorname{sp}\vec{d}\to\mathfrak{N}$, продолжающее α, для которого

$$\mathbb{HF}(\mathfrak{N}) \models \Phi^*(\vec{b},\varkappa(\psi\vec{x}),\tau(\psi\vec{z}),\rho(\psi\vec{d})). \tag{11}$$

Положим $\vec{u}=\psi\vec{x}$, $\vec{v}=\psi\vec{z}$, $\vec{e}=\psi\vec{d}$. Тогда из (11) следует $g_{\Phi,\alpha}(\varkappa(\vec{u}))=\tau(\vec{v})$, т. е. $\mathbb{HF}(\mathfrak{N})\models\Psi(\vec{b},\varkappa(\vec{u}),\tau(\vec{v}))$. Пусть множество K и изоморфизм $\varphi\in K$ такие, что $\mathbb{HF}(\mathfrak{N})\models I(K,\vec{b},\langle\vec{u},\vec{v},\vec{e}\rangle)\ \&\ \mathfrak{B}(\operatorname{sp}\vec{b},\operatorname{sp}\varphi\vec{e}\cup\operatorname{sp}\vec{b}\cup\operatorname{sp}\varphi\vec{u}\cup\operatorname{sp}\varphi\vec{v})$. Тогда $\mathbb{HF}(\mathfrak{N})\models\Phi^*(\vec{b},\varkappa(\varphi\vec{u}),\tau(\varphi\vec{v}),\rho(\varphi\vec{e}))$, поэтому $\mathbb{HF}(\mathfrak{N})\models\Psi(\vec{b},\varkappa(\varphi\vec{u}),\tau(\varphi\vec{v}))$, следовательно, в $\mathbb{HF}(\mathfrak{M})$ истинна формула $\Xi_{\Psi,\Phi,\alpha}(x,z)$. $\square$

Замечание 1.1. Пусть $\Phi_u(x_0,x_1)$ — универсальный Σ-предикат в $\mathbb{HF}(\mathfrak{M})$, определенный теоремой 2.6.2 из [3]. Из доказательства этой теоремы вытекает, что для любой Σ-формулы $\Phi(\vec{a},x)$, $\vec{a}\in M^{<\omega}$, справедлива эквивалентность $\Phi(\vec{a},x)\equiv\Phi_u(\langle n,\vec{a}\rangle,x)$ для всех значений x в $\mathbb{HF}(\mathfrak{M})$ при некотором $n\in\omega$.

Замечание 1.2. Поскольку $\mathfrak{N}$ — модель c-простой теории, а следовательно, регулярной теории, из доказательства теоремы 3.5.1 [3] и замечания 1.1 следует, что существует Σ-формула $\Psi_{\mathfrak{N}}(u_0,u_1,u_2)$ сигнатуры σ_1, определяющая универсальную функцию в $\mathbb{HF}(\mathfrak{N})$ и такая, что для любой Σ-функции, заданной Σ-формулой с параметром $\vec{b}\in N^{<\omega}$, формула $\Psi_{\mathfrak{N}}(\langle m,\vec{b}\rangle,u_1,u_2)$ также определяет эту функцию при некотором $m\in\omega$.

Доказательство теоремы. Покажем, что следующая формула определяет универсальную Σ-функцию в $\mathbb{HF}(\mathfrak{M})$:

$$\Phi_{\mathfrak{M}}(x_0,x_1,x_2)=\exists s\exists m\exists n\exists\vec{a}\exists\vec{b}\exists\alpha(x_0=\langle s,m,n,\alpha\rangle\ \&\ s,m,n\in\omega\ \&\ \vec{a}\in M^{<\omega}$$
$$\&\ \vec{b}\in N^{\omega}\ \&\ D_{\vec{a}}(\vec{b})\ \&\ \alpha(\vec{a})=\vec{b}\ \&\ \Xi_{\Psi_{\mathfrak{N}}(\langle m,\vec{b}\rangle,u_1,u_2),\Phi_s,\alpha}(x_1,x_2)\ \&\ \Phi_u(\langle n,\vec{a}\rangle,x_1)),$$

где $\Phi_s(\vec{a}, x, z)$ — Σ-формула номера s вида $\exists d\Phi_0^{(d)}(\vec{a}, x, z)$, $\Psi_{\mathfrak{N}}(u_0, u_1, u_2)$ определена в замечании 1.2, а $\Phi_u(x_0, x_1)$ — в замечании 1.1.

Пусть дана произвольная Σ-функция f, которая в $\mathbb{HF}(\mathfrak{M})$ определяется Σ-формулой $\Phi(\vec{a}, x_1, x_2) = \exists d\Phi_0^{(d)}(\vec{a}, x_1, x_2)$ с параметром $\vec{a}$. Не умаляя общности рассуждений, можно считать, что $\mathrm{sp}\,\vec{a}$ замкнуто. По условию 3 из определение 1.1 существуют $\vec{b}$ и изоморфизм $\alpha : \vec{a} \to \vec{b}$. По лемме 1.1 формула $\exists e\Phi^*(\vec{b}, u_1, u_2, e)$ определяет Σ-функцию $g_{\Phi,\alpha}$ в $\mathbb{HF}(\mathfrak{N})$. По замечанию 1.2 функция $g_{\Phi,\alpha}$ определяется формулой $\Psi_{\mathfrak{N}}(\langle m, \vec{b}\rangle, u_1, u_2)$ в $\mathbb{HF}(\mathfrak{N})$ при некотором $m \in \omega$. Пусть формула $\Phi(\vec{a}, x_1, x_2)$ имеет номер s, а число n такое, что $x \in \delta f \Leftrightarrow \mathbb{HF}(\mathfrak{M}) \models \Phi_u(\langle n, \vec{a}\rangle, x)$. Тогда по лемме 1.3 формула $\Phi_{\mathfrak{M}}(\langle s, m, n, \alpha\rangle, x_1, x_2)$ определяет в $\mathbb{HF}(\mathfrak{M})$ функцию f.

Пусть дана произвольная последовательность $\langle s, m, n, \alpha\rangle$, где $s, m, n \in \omega$, $\alpha : \vec{a} \to \vec{b}$ — изоморфизм. Формула $\Psi_{\mathfrak{N}}(\langle m, \vec{b}\rangle, u_1, u_2)$ определяет некоторую функцию g в $\mathbb{HF}(\mathfrak{N})$. По лемме 1.3 формула $\Phi_{\mathfrak{M}}(\langle s, m, n, \alpha\rangle, x_1, x_2)$ определяет некоторую Σ-функцию в $\mathbb{HF}(\mathfrak{M})$. Теорема доказана. $\square$

Приведем пример модели $\mathfrak{M}$ теории эквивалентности такой, что в $\mathbb{HF}(\mathfrak{M})$ отсутствует универсальная Σ-функция и в то же время для $\mathfrak{M}$ справедливы все условия определения почти c-простой модели, кроме условия 3(c). В качестве такого примера возьмем модель $\mathfrak{M} = \langle M, Q_0, Q_1\rangle$, построенную в [4] (см. также [3, с. 149]). Она определена следующими условиями:

a) Q_0, Q_1 — отношения эквивалентности на M и $Q_1 \subseteq Q_0$;

b) для любого $[x]_{Q_0}$ эквивалентных $x \in M$ элементов справедлива одна из следующих альтернатив:

$[x]_{Q_0}$ есть объединение бесконечного числа Q_1-классов эквивалентных элементов, которые состоят точно из двух (трех) элементов;

c) существует бесконечно много попарно не Q_0-эквивалентных элементов $x \in M$ таких, что $[x]_{Q_0}$ содержит Q_1-классы точно с двумя элементами; существует бесконечно много попарно не Q_0-эквивалентных элементов $x \in M$ таких, что $[x]_{Q_0}$ содержит Q_1-классы точно с тремя элементами.

Пусть $\mathfrak{N}$ — подмодель $\mathfrak{M}$, которая получена объединением всех Q_0-классов таких, что они состоят из Q_1-классов, содержащих точно три элемента.

Тогда справедливо

Предложение 1.1. *Для моделей $\mathfrak{N} \leq \mathfrak{M}$ справедливы все условия определения почти c-простой модели, кроме условия* 3(c).

Доказательство состоит в проверке справедливости условий 1–3(b) определения 1.1 почти c-простой модели.

1. Легко проверить, что Σ-формула

$$N(x) = \exists y_0 \exists y_1 \exists y_2 \Big(\bigwedge_{i<3} (xQ_1 y_i) \ \& \bigwedge_{i<j<3} (y_i \neq y_j)\Big)$$

определяет N в $\mathbb{HF}(\mathfrak{M})$.

2. Для определения формулы $\mathfrak{B}$ введем предикат $\mathfrak{B}_0(X, Z)$ в модели $\mathbb{HF}(\mathfrak{N})$, положив

$$\mathfrak{B}_0(X, Z) \rightleftharpoons X \subseteq Z \subseteq N \ \& \ \forall z \in Z \exists x \in X (xQ_1 z)$$
$$\& \ \forall x \in X \exists z_0 \exists z_1 \exists z_2 \Big(\bigwedge_i (z_i \in Z \ \& \ xQ_1 z_i) \ \& \bigwedge_{i<j<3} (z_i \neq z_j)\Big).$$

Искомый предикат $\mathfrak{B}(X,Y)$ в $\mathbb{HF}(\mathfrak{N})$ определим формулой

$$\mathfrak{B}(X,Y) \rightleftharpoons Y \subseteq N \ \& \ \exists Z(\mathfrak{B}_0(X,Z) \ \& \ Y \cap Z = X),$$

т. е. Y — конечное подмножество N такое, что любой элемент $y \in Y \setminus X$ не Q_1-эквивалентен любому элементу $x \in X$.

Пусть $X \subseteq M$, $|X| < \omega$. Тогда замыкание $[X]$ определим равенством

$$[X] = \bigcup\{y \mid \exists x \in X(xQ_1y)\}.$$

Легко проверить, что при таких определениях предиката $\mathfrak{B}$ и операции замыкания справедливы условия 1, 2, 3(a), 3(b), но нарушается условие 3(c) определения 1.1 почти c-простой модели. $\square$

§ 2. Почти ограниченно ветвящиеся деревья

Здесь приведено семейство почти c-простых моделей теории деревьев, в наследственно конечных надстройках над которыми существуют универсальные Σ-функции.

Приведем некоторые часто используемые определения и обозначения, связанные с понятием дерева.

Частично упорядоченное множество T называется *деревом*, если для любого $x \in T$ множество всех элементов, меньших x (*предшественников* x в T), вполне упорядоченно и T содержит наименьший элемент r, который называется *корнем*. Для каждой вершины $x \in T$ через $\mathrm{level}_T(x)$ будет обозначаться порядковый тип множества всех предшественников x в T, называемый *уровнем* вершины x в дереве T. *Высота* дерева T определяется следующим образом:

$$ht(T) = \sup_{x\in T}(\mathrm{level}_T(x)) + 1.$$

Если $a, b \in T$ и $a < b$ $(a \neq b)$ и между ними нет элементов из T, то b называется *непосредственным последователем* a.

Пусть T — дерево и $a \in T$. Если мощность множества всех непосредственных последователей элемента a, $a \neq r$, равна α, то будем говорить, что a *α-ветвится*. Если α — конечный кардинал, то будем говорить, что *a конечно ветвится*. Пусть β — некоторый кардинал. Будем говорить, что элемент a *ветвится не более* β, если a α-ветвится и $\alpha \leq \beta$.

Пусть $a \in T \setminus \{r\}$. Поддерево

$$[a]_T = \{y \mid \exists z(z \leq a \ \& \ \mathrm{level}_T(z) = 1) \ \& \ y \geq z\} \cup \{r\} \tag{12}$$

называется *элементарным* поддеревом, содержащим a.

Пусть T — дерево высоты $h+1$.

Если любой элемент уровня $i < h_0$ элементарного дерева $E \subseteq T$ высоты h_0+1, $h_0 \leq h$, ветвится не более $N \in \omega$, то будем говорить, что E *ветвится не более* N.

Если существует число $N \in \omega$ такое, что любое элементарное дерево из T ветвится не более N, то T называется *ограниченно ветвящимся деревом*.

Пусть T_0 и T_1 — деревья с корнями r_0 и r_1 соответственно, $T_0 \cap T_1 = \varnothing$. Тогда через $T_0 \cup T_1$ обозначим дерево, полученное объединением $T_0 \setminus \{r_0\}$ и $T_1 \setminus \{r_1\}$ и соотношением $r_0 = r_1 = r$.

Если дерево T_0 изоморфно вложимо в дерево T_1 и $T_0 \not\cong T_1$, то будем говорить, что T_0 *собственно изоморфно вложимо* в T_1.

Определение 2.1. Дерево T высоты $h+1$, $h \in \omega$, назовем *почти ограниченно ветвящимся*, если

$$T = F \cup I, \tag{13}$$

где F — ограниченно ветвящееся дерево, а I — объединение конечного числа элементарных деревьев таких, что в них имеются бесконечно ветвящиеся элементы и любой последователь таких элементов не имеет последователя.

Теорема 2.1. *Пусть T — почти ограниченно ветвящееся дерево конечной высоты $h+1$. Тогда существует его конечное константное обогащение T' такое, что T' — почти c-простая модель.*

Доказательству предпошлем следующие леммы.

Лемма 2.1. *Пусть F — ограниченно ветвящееся дерево высоты $h+1$. Тогда существуют элементарные деревья E_i, $i < \alpha < \omega$, высоты не более $h+1$ такие, что*

$$F = T_1 \cup T_0, \tag{14}$$

$$T_1 = \bigcup_{i<\alpha} T_{1i}, \tag{15}$$

где T_{1i} — объединение всех элементарных деревьев в F, изоморфных E_i, E_i не вложимо в E_j при $i \neq j$, $i, j < \alpha$, и любое элементарное дерево из T_0 собственно изоморфно вложимо в некоторое E_i.

Доказательство. Так как F ограниченно ветвится, существует такое число $N \in \omega$, что любое элементарное дерево E из F ветвится не более N. Пусть E_N — элементарное дерево высоты $h+1$ такое, что любой элемент $x \neq r$ уровня $i < h$ имеет точно N последователей. Пусть мощность $|E_N|$ равна γ. Тогда любое элементарное дерево, ветвящееся не более N, изоморфно вложимо в E_N. Поэтому любое элементарное дерево E из F изоморфно вложимо в E_N. Отсюда следует, что существует конечное число элементарных деревьев $E_0, \dots, E_{\alpha-1}$ таких, что любое элементарное дерево E из F либо изоморфно некоторому E_i, либо собственно вложимо в некоторое E_j, а E_i не вложимо в E_j при $i \neq j < \alpha$. Если обозначить через T_{1i} объединение всех элементарных деревьев из F, изоморфных E_i, а $T_0 = F \setminus \{\cup T_{1i} \mid i < \alpha\} \cup \{r\}$, то получим справедливость (14), (15). $\square$

Из леммы 2.1 следует, что любое почти ограниченно ветвящееся дерево T высоты $h+1$, $h \in \omega$, можно представить в виде

$$T = T_0 \cup T_1 \cup T_2,$$

где $T_1 = T_{10} \cup \dots \cup T_{1\alpha-1}$, $\alpha \in \omega$, и существует конечное число элементарных деревьев E_i высоты не более $h+1$, $ht(E_0) = h+1$, E_i не вложимо в E_j при $i \neq j$, $i, j < \alpha$, а T_{1j} — объединение конечного или бесконечного числа копий E_i. Если T_{1i} конечно, то все элементы можно включить в сигнатуру модели T. Поэтому будем считать, что все T_{1i} бесконечны; T_0 — объединение всех элементарных деревьев из T, собственно вложимых в некоторое E_i; $T_2 = T \setminus (T_0 \cup T_1) \cup \{r\}$, т. е. T_2 — объединение конечного числа элементарных деревьев, где имеются бесконечно ветвящиеся элементы, но любой последователь такого элемента не имеет последователя.

В T выделим некоторые элементарные поддеревья: $E_0, \dots, E_{\alpha-1}$, $E_i \subseteq T_{1i}$, и введем множества

$$A = \bigcup_{i<\alpha} E_i, \quad C = \{c \in T_2 \mid c \text{ бесконечно ветвится}\},$$

$$B = \{b \in T_2 \mid b \text{ конечно ветвится } \forall c \in C(\neg c < b)\}.$$

Пусть

$$A = \{r, a_{i0}, \dots, a_{i\lambda_i-1} \mid i < \alpha\}, \quad B = \{b_0, \dots, b_{\beta-1}\}, \quad C = \{r, c_0, \dots, c_{\gamma-1}\},$$

$$\sigma_1 = \langle \leq, r, a_{00}, \dots, a_{0\lambda_0-1}, \dots, a_{\alpha-10}, \dots, a_{\alpha-1\lambda_{\alpha-1}-1} \rangle,$$

$$\sigma_2 = \langle \leq, r, b_0, \dots, b_{\beta-1}, c_0, \dots, c_{\gamma-1} \rangle,$$

$$\mathfrak{M} = \langle T, \sigma \rangle, \quad \mathfrak{N} = \langle T_1 \cup T_2, \sigma \rangle,$$

где $\sigma = \langle \leq, r, \langle a_{ij} \mid i < \alpha,\ j < \lambda_i \rangle, \langle b_i, c_j \mid i < \beta,\ j < \gamma \rangle \rangle$,

$$C_{\sigma_1} = A, \quad C_{\sigma_2} = B \cup C, \quad \lambda_i = |E_i| - 1.$$

Покажем, что модели $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ удовлетворяют условиям определения почти c-простой модели.

Введем следующие предикаты:

a) $x \in T_2 \Leftrightarrow \mathfrak{M} \models \bigvee\{x = b \mid b \in B\} \vee \bigvee\{x \geq c \mid c \in C\} \vee x = r$,

b) $x \in T_1 \Leftrightarrow \mathbb{HF}(\mathfrak{M}) \models x = r \vee (x \notin T_2 \ \&\ \exists F \exists y \in F(y > r \ \&\ \forall z \in F(z = r \vee z \geq y) \ \&\ \exists i < \alpha \exists \varphi(\varphi : E_i \to F \text{ — изоморфизм}) \ \&\ x \in F))$.

Отсюда следует, что T_1, T_2 — Σ-подмножества в $\mathbb{HF}(\mathfrak{M})$ т. е. носитель модели $\mathfrak{N}$ — Σ-подмножество в $\mathbb{HF}(\mathfrak{M})$.

Лемма 2.2. *Теория модели $T_1 = \langle T_1, \sigma_1 \rangle$ разрешима и счетно категорична.*

Доказательство. Введем следующие аксиомы, истинные в T_1.

1. Аксиомы дерева.

2. Высота любого элемента не более $h + 1$, т. е.

$$\forall x_0 \dots \forall x_h (r \leq x_0 \leq \dots \leq x_h \to \exists i \leq h \exists j \leq h(x_i = r \vee (i \neq j \ \&\ x_i = x_j))).$$

$3_{i<\alpha}$. Диаграмма элементарного дерева $E_i = \{r, \{a_{ij} \mid j < \lambda_i\}\}$, где $r < a_{i0} \leq a_{ij}$ для любого $j < \lambda_i$, и высота E_i равна $h_i + 1$, $h = h_0 \geq h_i$, $0 < i < \alpha$.

Пусть $\lambda = \max\{\lambda_i \mid i < \alpha\} + 1$.

$4_{k\leq\lambda}$. Любое подмножество $S \subseteq T_1$, имеющее наименьший элемент, отличный от r, мощности k изоморфно вложимо в некоторое E_i, т. е.

$$\forall x_0 \dots \forall x_{k-1} \Big(\bigwedge_{1\leq s<k} x_s \geq x_0 > r \\ \to \bigvee_{i<\alpha} \exists \varphi_i(\varphi_i : \{x_0, \dots, x_{k-1}\} \to E_i \text{ — изоморфное вложение}) \Big).$$

$5_{k\leq\lambda}$. Любое подмножество T_1, имеющее наименьший элемент, отличный от r, содержится в некотором подмножестве мощности не более λ, имеющем наименьший элемент, отличный от r, в которое вложимо некоторое E_i, т. е.

$$\forall x_0 \dots \forall x_{k-1} \Big(\bigwedge_{1\leq i<k} x_i \geq x_0 > r \to \Big(\bigvee_{i<\alpha} \exists y_{i0} \dots \exists y_{i\lambda_i-1} \Big(\bigwedge_{j<\lambda_i} (y_{ij} \geq y_{j0} > r) \\ \&\ x_0 \geq y_{i0} \ \&\ \forall p < k \exists j < \lambda_i (x_p = y_{ij}) \\ \&\ \exists \varphi_i(\varphi_i : E_i \to \{r, y_{i0}, \dots, y_{i\lambda_i-1}\} \text{ — изоморфизм}) \Big) \Big) \Big).$$

$6_{i<\alpha,n<\omega}$. Существует n элементарных деревьев, изоморфных E_i, с корнем r.

Докажем, что любое счетное дерево D, на котором истинны аксиомы 1–6 изоморфно T_1. Сначала покажем, что любое элементарное дерево $D_0 \subseteq D$ изоморфно некоторому E_k, $k < \alpha$. По аксиоме 2 высота D_0 не более $h + 1$. Докажем, что $|D_0| < \lambda$. Допустим противное, т. е. $|D_0| \geq \lambda$, $\lambda = \max\{\lambda_i \mid i < \alpha\} + 1$, $\lambda_i = |E_i| - 1$. Пусть $X \subseteq D_0$, $X = \{x_0, \dots, x_{\lambda-1}\}$, $x_k \geq x_0 > r$. Тогда по аксиоме 4_λ существует вложение $\varphi : X \to E_i$ для некоторого i. Так как $|E_i| = \lambda_i < \lambda$, то $|X| \leq \lambda_i < \lambda$. Таким образом, $|D_0| < \lambda$. Поэтому существует вложение

$$\varphi : D_0 \to E_k, \quad k < \alpha. \tag{16}$$

В силу максимальности элементарного дерева D_0 и аксиомы 5 существуют $s < \alpha$ и вложение

$$\psi : E_s \to D_0. \tag{17}$$

Отсюда и из (16) получим вложимость E_s в E_k. Если $s \neq k$, то это невозможно, т. е. $s = k$. Отсюда и из (16), (17) следует $D_0 \simeq E_k$, т. е. любое элементарное дерево D_0 в D изоморфно некоторому E_k.

По аксиоме 6 в D содержится счетное число копий элементарного дерева E_i для любого $i < \alpha$. Следовательно, $D \simeq T_1$, т. е. теория $\mathrm{Th}(T_1)$ счетно категорична, поэтому полна. Отсюда и из вычислимо перечислимой аксиоматизируемости теории $\mathrm{Th}(T_1)$ получим ее разрешимость. $\square$

Следствие 2.1. *Теория модели $\mathfrak{N} = \langle T_1 \cup T_2, \sigma\rangle$ разрешима и счетно категорична.*

Доказательство. Добавим к аксиомам 1–6 теории $\mathrm{Th}(T_1)$ следующие.

7. Для любого элемента $x \neq r$ найдутся либо подмножество $S \subseteq \mathfrak{N}$, имеющее наименьший элемент $x_0 > r$, и число $i < \alpha$ такие, что $x \in S$, $|S| \leq \lambda_i$ и существует изоморфное вложение $\varphi : E_i \to S$, либо $x = b_k$, либо $x \geq c_l$, $k < \beta$, $l < \gamma$.

$8_{k<\gamma,n<\omega}$. Элемент c_k имеет n непосредственных последователей.

9. $OD(C_{\sigma_2})$ — открытая диаграмма модели $\langle C_{\sigma_2}, \leq, r\rangle$.

$10_{k<\gamma}$. Если $x > c_k$, то x не имеет последователя.

Используя лемму 2.2, легко проверить, что аксиомы 1–10 определяют счетно категоричную теорию и $\mathfrak{N} = \langle T_1 \cup T_2, \sigma\rangle$ является ее счетной моделью. $\square$

Для описания полных формул теории $\mathrm{Th}(\mathfrak{N})$ приведем некоторые свойства теории $\mathrm{Th}(T_1)$. Пусть $x \in (T_1 \setminus A)$ и $\vec{x} = \langle x_0, \dots, x_{m-1}\rangle$, $\mathrm{sp}\,\vec{x} = [x]_{T_1}$.

Через $D_{\vec{x}}(\vec{x})$ обозначим диаграмму модели $X = \langle A \cup [x]_{T_1}, \sigma_1\rangle$, т. е. конъюнкцию формул либо вида $y_i \leq y_j$, либо вида $\neg(y_i \leq y_j)$, $y_i \in A \cup [x]_{T_1}$, истинных на модели X. Легко проверить, что справедлива

Лемма 2.3. *Пусть $\vec{x}^\varepsilon \in [c^\varepsilon]^{<\omega}_{T_1}$, $\vec{x}^\varepsilon = \langle x^\varepsilon_0, \dots, x^\varepsilon_{m-1}\rangle$, $\varepsilon < 2$, и*

$$T_1 \models D_{\vec{x}^0}(\vec{x}^0) \ \&\ D_{\vec{x}^0}(\vec{x}^1).$$

Тогда существует автоморфизм φ модели $\langle T_1, \sigma_1\rangle$ такой, что $\varphi(\vec{x}^0) = \vec{x}^1$, $\varphi(\vec{x}^1) = \vec{x}^0$.

Для любой последовательности $\vec{x} \in T_2^{<\omega}$ обозначим через $E_{\vec{x}}(\vec{x})$ открытую диаграмму модели $\mathrm{sp}\,\vec{x} \cup C_{\sigma_2}$ сигнатуры σ_2. Легко проверить, что справедлива

Лемма 2.4. *Пусть* $\vec{x}^\varepsilon \in \mathfrak{N}^{<\omega}$, $\vec{x}^\varepsilon = \langle x_0^\varepsilon, \dots, x_{r-1}^\varepsilon \rangle$, $\varepsilon < 2$, *и*

$$\mathfrak{N} \models E_{\vec{x}^0}(\vec{x}^0) \ \&\ E_{\vec{x}^0}(\vec{x}^1).$$

Тогда $\vec{x}^0, \vec{x}^1 \in T_2^{<\omega}$ *и любой изоморфизм* $\varphi : T_1 \to T_1$ *можно продолжить до такого изоморфизма* $\psi : \mathfrak{N} \to \mathfrak{N}$, *что справедливо*

$$\psi x = \begin{cases} x_i^1, & \text{если } x = x_i^0, \\ x_i^0, & \text{если } x = x_i^1, \\ x, & \text{если } x \in T_2 \setminus (\operatorname{sp} \vec{x}^0 \cup \operatorname{sp} \vec{x}^1), \\ \varphi x, & \text{если } x \in T_1. \end{cases}$$

Пусть дана последовательность $\vec{x} = \langle x_0, \dots, x_{n-1} \rangle \in \mathfrak{N}^{<\omega}$, для которой существуют число $e < n$ и множество последовательностей $S = \big\{ \langle k_{i,0}, \dots, k_{i,l_i-1} \rangle \mid i < e,\ l_i > 0,\ \sum l_i = n,\ \{k_{i,j} \mid i < e,\ j < l_i\} = \{0, \dots, n-1\} \big\}$ такие, что для подпоследовательностей $\vec{x}_i = \langle x_{k_{i,0}}, \dots, x_{k_{i,l_i-1}} \rangle$, $i < e$, справедливы условия

a) если $i \le j < e-1$, то $\operatorname{sp} \vec{x}_i = \operatorname{sp} \vec{x}_j = [a_i]_{T_1}$, $a_i \in T_1 \setminus \{r\}$ тогда и только тогда, когда $i = j$;

b) $\vec{x}_{e-1} \in T_2^{<\omega}$.

Введем формулу

$$\Phi_{n,S}(\vec{x}) = \bigwedge_{i<e-1} D_{\vec{x}_i}(\vec{x}_i) \ \&\ E_{\vec{x}_{e-1}}(\vec{x}_{e-1}). \tag{18}$$

Из лемм 2.3 и 2.4 вытекает

Следствие 2.2. *Пусть для последовательностей* $\vec{x}^\varepsilon = \langle x_0^\varepsilon, \dots, x_{n-1}^\varepsilon \rangle \in \mathfrak{N}^{<\omega}$, $\varepsilon < 2$, *справедливо*

$$\mathfrak{N} \models \Phi_{n,S^0}(\vec{x}^0) \ \&\ \Phi_{n,S^0}(\vec{x}^1),$$

где формула Φ_{n,S^0} *определена по последовательности* $\vec{x}^0$ *так же, как в* (18). *Тогда существует изоморфизм* $\varphi : \mathfrak{N} \to \mathfrak{N}$ *такой, что* $\varphi(\vec{x}^0) = \vec{x}^1$.

Следствие 2.3. *Любая полная формула* $\Phi(\vec{x}_1)$, $\vec{x}_1 = \langle x_0, \dots, x_{k-1} \rangle$, *совместная с теорией* $\mathrm{Th}(\mathfrak{N})$, *эквивалентна некоторой формуле вида*

$$\exists x_k \dots \exists x_{n-1} \Phi_{n,S}(x_0, \dots, x_{n-1}) \rightleftharpoons \Phi_{n,S}^0(\vec{x}_1).$$

Доказательство. Докажем, что $\Phi_{n,S}^0(\vec{x}_1)$ — полная формула. Пусть существуют формула $\Psi(\vec{x}_1)$ сигнатуры σ и последовательности $\vec{a}_1$, $\vec{b}_1$ такие, что

$$\mathfrak{N} \models \Phi_{n,S}(\vec{a}, \vec{a}_1) \ \&\ \Psi(\vec{a}), \tag{19}$$

$$\mathfrak{N} \models \Phi_{n,S}(\vec{b}, \vec{b}_1) \ \&\ \neg\Psi(\vec{b}). \tag{20}$$

Тогда существует изоморфизм $\varphi : \mathfrak{N} \to \mathfrak{N}$ такой, что $\varphi \vec{a} = \vec{b}$, $\varphi \vec{a}_1 = \vec{b}_1$. Отсюда и из (19) имеем

$$\mathfrak{N} \models \Phi_{n,S}(\vec{b}, \vec{b}_1) \ \&\ \Psi(\vec{b}),$$

что противоречит (20). □

Пусть F_k — множество всех полных формул вида $\Phi_{n,S}^0(x_0, \dots, x_{k-1})$. Легко проверить, что из определений модели $\mathfrak{N}$ и формулы $\Phi_{n,S}^0$ вытекает, что последовательность $\langle F_k \mid n \in \omega \rangle$ сильно вычислима. Отсюда и из следствия 2.3 получаем

Следствие 2.4. *Существует сильно вычислимая последовательность* $F = \langle F_k \mid k \in \omega \rangle$ *конечных множеств всех полных формул от переменных* $x_0, \dots, x_{k-1}$, *совместных с теорией* $\mathrm{Th}(\mathfrak{N})$.

Лемма 2.5. *Теория* $\mathrm{Th}(\mathfrak{N})$ *модельно полна.*

Доказательство. Согласно критерию А. Робинсона [19] для доказательства леммы достаточно проверить справедливость следующего предложения. Если $\mathfrak{N}^0 \subseteq \mathfrak{N}^1$ — две модели теории $\mathrm{Th}(\mathfrak{N})$ и $A \subseteq \mathfrak{N}^1$ — конечное подмножество, то существует изоморфное вложение $\varphi : A \to \mathfrak{N}^0$ такое, что $\varphi \restriction A \cap \mathfrak{N}^0 = \mathrm{id}$.

Пусть $N^\varepsilon = \left\langle T_1^\varepsilon \cup T_2^\varepsilon, \sigma \right\rangle$, где $T_1^\varepsilon \subseteq T_1$, $T_2^\varepsilon \subseteq T_2$. Так как $\mathfrak{N}^0 \subseteq \mathfrak{N}^1$, то $T_1^0 \subseteq T_1^1$, $T_2^0 \subseteq T_2^1$. Пусть $B^\varepsilon = T_1^\varepsilon \cap A$. Тогда $B^0 \subseteq B^1$ и $B^1 = B^0 \cup E$ для некоторого $E \subseteq T_1^1 \setminus T_1^0$. Не умаляя общности рассуждения, можно считать, что $E = [e_0]_{T_1^1} \cup \dots \cup [e_{m-1}]_{T_1^1}$, $[e_s]_{T_1^1} \simeq E_{k_s}$ для некоторого $s < m$, $k_s < \alpha$. Так как в T_1^0 имеется счетное число копий элементарного дерева E_{k_s}, в T_1^0 существует поддерево $F = [f_0]_{T_1^0} \cup \dots \cup [f_{m-1}]_{T_1^0}$ такое, что $F \cap B^0 = \{r\}$. Отсюда легко следует, что существует изоморфизм $\varphi_0 : B^1 \to B^0 \cup F$, где $\varphi_0 \restriction B^0 = \mathrm{id}$.

Пусть теперь $G = T_2^1 \cap A$ и $G_k = \{x > c_k \mid x \in G,\ k < \gamma\}$. Тогда любой элемент $x \in G$ равен либо r, либо b_i, $i < \beta$, либо c_i, либо $x \in G_k$, $k < \gamma$. Пусть $G_k^0 = G_k \cap T_2^0$. Тогда $\left|G_k^0\right| \leq |G_k|$. Так как множества $D_k^0 = \left\{x > c_k \mid x \in T_2^0\right\}$ бесконечны, существуют изоморфные вложения $\psi_k : G_k \to D_k^0$, где $\psi_k \restriction G_k^0 = \mathrm{id}$, $k < \gamma$, которые однозначно определяют изоморфное вложение $\varphi_1 : G \to T_2^0$, $\varphi_1 \restriction G \cap T_2^0 = \mathrm{id}$.

Легко проверить, что изоморфные вложения φ_0 и φ_1 однозначно определяют требуемое вложение $\varphi : A \to \mathfrak{N}^0$, $\varphi \restriction A \cap \mathfrak{N}^0 = \mathrm{id}$. $\square$

Из следствий 2.1, 2.4 и леммы 2.5 следует, что $\mathfrak{N}$ — модель c-простой теории, т. е. справедливо условие 1 определения 1.1 почти c-простой модели.

2. Определим предикат $\mathfrak{B}(x, y)$ эквивалентностью

$$\mathbb{HF}(\mathfrak{N}) \models \mathfrak{B}(x, y) \Leftrightarrow x, y \subseteq T_1 \cup T_2 \mathbin{\&} y \supseteq C_\sigma \cup x \mathbin{\&} y \cap \left(\bigcup\{[z]_{T_1} \mid z \in x \cap T_1\}\right) \subseteq x. \tag{21}$$

Так как справедливы следующие эквивалентности:

$$F = [z]_{T_1} \Leftrightarrow \mathbb{HF}(T_1) \models \exists y(r < y \mathbin{\&} z \geq y \mathbin{\&} \forall z \in F((z = r \vee z \geq y) \mathbin{\&} \exists \varphi \exists i < \alpha(\varphi : E_i \to F \text{ — вложение}))),$$

$$x \in [z]_{T_1} \Leftrightarrow \mathbb{HF}(T_1) \models \exists F(F = [z]_{T_1} \mathbin{\&} x \in F),$$
$$x \notin [z]_{T_1} \Leftrightarrow \mathbb{HF}(T_1) \models \exists F(F = [z]_{T_1} \mathbin{\&} x \notin F),$$

отношение $x \in [z]_{T_1}$ является двуместным Δ-предикатом.

Подмножества C_σ, T_1, T_2 также являются Δ-подмножествами в $\mathbb{HF}(\mathfrak{N})$. Отсюда и из (21) следует, что отношение $\mathfrak{B}$ является Σ-предикатом.

Так как справедлива

$$\mathbb{HF}(\mathfrak{N}) \models \neg\mathfrak{B}(x, y) \Leftrightarrow \mathbb{HF}(\mathfrak{N}) \models \exists c \in C_\sigma(c \notin y) \vee x \nsubseteq y \vee \exists z \in (x \cap T_1) \setminus \{r\} \exists F \exists u(F = [z]_{T_1} \mathbin{\&} u \in y \cap F \mathbin{\&} u \notin x),$$

$\mathfrak{B}$ является Δ-предикатом в $\mathbb{HF}(\mathfrak{N})$.

Легко проверить, что для предиката $\mathfrak{B}$ справедлива формула из условия 2 определения 1.1 почти c-простой модели. Таким образом, справедливость условия 2 для модели $\mathfrak{N}$ доказана.

3. Пусть X — конечное подмножество $\mathfrak{M}$. Тогда замыкание $[X]$ определим равенством

$$[X] = C_\sigma \cup \Big(\bigcup\{[x]_T \mid x \in X \cap (T_0 \cup T_1)\}\Big) \cup (X \cap T_2).$$

Легко заметить, что $[X]$ конечно. Если $X = [X]$, то X называется *замкнутым подмножеством* в $\mathfrak{M}$.

Для любого подмножества $X \subseteq \mathfrak{M}$ обозначим

$$L_1(X) = \{z_x \mid x \in X \cap (T_0 \cup T_1),\ z_x \leq x,\ \mathrm{level}(z_x) = 1\},$$

$X^i = \{x \in X \mid x > c_i\}$, $i < \gamma$.

Для доказательства справедливости условия 3 для $\mathfrak{M}$ нам потребуются следующие леммы.

Лемма 2.6. *Пусть даны конечные подмножества $X, Y \subseteq \mathfrak{M}$. Тогда существует вложение $\varphi : [X] \to \mathfrak{N}$ такое, что $\varphi[X] \cap Y \subseteq C_\sigma$.*

Доказательство. Пусть $L_1(X) = \{x_0, \dots, x_{k-1}\}$. Так как для любого $s < \alpha$ число элементарных деревьев, изоморфных E_s, бесконечно много, существуют различные элементы $z_0, \dots, z_{k-1}$ уровня 1 в T_1, не содержащие элементов из $L_1(Y)$, такие, что существуют изоморфные вложения $\varphi_i : [x_i]_T \to [z_i]_{T_1}$.

Поскольку c_k бесконечно ветвится, существует изоморфное вложение $\psi_k : X^k \to T^k \setminus Y^k$. Тогда изоморфное вложение $\varphi : [A] \to \mathfrak{N}$, продолжающее φ_i и ψ_k, будет требуемым. □

Подмножества X^0 и X^1 модели $\mathfrak{M}$ назовем *несравнимыми*, если для любых элементов $x^0 \in X^0 \setminus C_\sigma$ и $x^1 \in X^1 \setminus C_\sigma$ верно $x^0 \not\leq x^1$ и $x^1 \not\leq x^0$.

Лемма 2.7. *Пусть даны конечные подмодели $M^0 \leq M^1 \leq \mathfrak{M}$ такие, что M^0 и $M^1 \setminus M^0$ несравнимы. Тогда для любого вложения $\varphi : M^0 \to \mathfrak{M}(\mathfrak{N})$ существует вложение $\psi : M^1 \to \mathfrak{M}(\mathfrak{N})$, продолжающее φ. Кроме того, для вложений φ, ψ в $\mathfrak{N}$ справедливо $\mathbb{HF}(\mathfrak{N}) \models \mathfrak{B}(\varphi M^0, \psi M^1)$.*

Доказательство. Из леммы 2.6 следует, что существует изоморфизм $\varphi^0 : [M^1] \to \mathfrak{M}$ такой, что $\varphi^0[M^1] \cap [\varphi M^0] = C_\sigma$. Пусть $\varphi^1 \rightleftharpoons \varphi^0 \restriction M^1 \setminus M^0$. Так как M^0 и $M^1 \setminus M^0$ несравнимы, вложение $\psi : M^1 \to \mathfrak{M}$, продолжающее φ и φ^1, будет требуемым. □

Продолжим доказательство справедливости условия 3. Для любого $X \subseteq \mathfrak{M}$ существование вложения $\alpha : X \to \mathfrak{N}$ непосредственно следует из леммы 2.6 при условии $Y = C_\sigma$. Пусть $\alpha : X \to Y$ — изоморфизм, где $X \leq \mathfrak{M}$, $Y \leq \mathfrak{N}$.

3(a). Допустим, что множество X замкнуто и $X^1 \supseteq X$. Из замкнутости X следует, что множества X и $X^1 \setminus X$ несравнимы. По лемме 2.7 существует вложение $\psi : X^1 \to \mathfrak{N}$, продолжающее α, для которого $\mathbb{HF}(\mathfrak{N}) \models \mathfrak{B}(Y, \psi X^1)$.

3(b). Пусть $\varphi^\varepsilon : X^\varepsilon \to \mathfrak{N}$ — изоморфизм, $\varepsilon < 2$, $X \leq X^\varepsilon \leq \mathfrak{M}$ и

$$\varphi^\varepsilon \restriction X = \alpha, \quad \mathbb{HF}(\mathfrak{N}) \models \mathfrak{B}(Y, \varphi^\varepsilon X^\varepsilon). \tag{22}$$

Из (22) следует, что множества X и $(X^0 \cup X^1) \setminus X$ несравнимы. Действительно, допустим противное, т. е. существуют $e \in (X^0 \cup X^1) \setminus X$ и $f \in X \setminus C_\sigma$ такие, что либо $e \leq f$, либо $f \leq e$. Пусть для определенности $e \in X^0$. Тогда $\varphi^0 e \in \cup\{[z]_{T_1} \mid z \in Y \cap T_1\}$, но $\varphi^0 e \notin Y$. Следовательно, $\mathbb{HF}(\mathfrak{N}) \models \neg\mathfrak{B}(Y, \varphi^0 X^0)$, что противоречит (22). Отсюда множества X и $(X^0 \cup X^1) \setminus X$ несравнимы. Тогда по лемме 2.7 существует вложение $\psi : X^0 \cup X^1 \to \mathfrak{N}$, продолжающее α, для которого справедливо $\mathbb{HF}(\mathfrak{N}) \models \mathfrak{B}(Y, \psi(X^0 \cup X^1))$.

3(c). Пусть $Y^1 \supseteq Y$ и $\mathbb{HF}(\mathfrak{N}) \models \mathfrak{B}(Y, Y^1)$.

Докажем, что существует вложение $\psi : Y^1 \to \mathfrak{M}$, продолжающее α^{-1}. Так же, как в доказательстве условия 3(b), можно показать, что множества $Y^1 \setminus Y$ и Y несравнимы. Тогда по лемме 2.7 существует вложение $\psi : Y^1 \to \mathfrak{M}$, продолжающее α^{-1}.

Таким образом, условие 3 справедливо для $\mathfrak{M}$, т. е. $\mathfrak{M}$ — почти c-простая модель. $\square$

Из теорем 2.1 и 1.1 вытекает

Следствие 2.5. *Пусть T — почти ограниченно ветвящееся дерево. Тогда в наследственно конечном допустимом множестве $\mathbb{HF}(T)$ существует универсальная Σ-функция.*

§ 3. Эквивалентности

В данном параграфе приведено семейство почти c-простых моделей теории эквивалентности, в наследственно конечных надстройках над которыми существуют универсальные функции.

Пусть даны модель $\mathfrak{M} = \langle M, E_0, E_1, \ldots, E_n \rangle$, где E_i — отношения эквивалентности на множестве M, и последовательность чисел $\langle \pi_1, \ldots, \pi_n \rangle$, $\pi_k > 1$, $0 < k \leq n$, такие, что справедливы следующие утверждения.

1. $x\, E_0\, y \Leftrightarrow x = y$.

2. $E_0 \subseteq E_1 \subseteq \cdots \subseteq E_n$.

3. Каждый E_k-класс состоит не более чем из π_k E_{k-1}-классов, $0 < k \leq n$.

4. Существует бесконечно много E_n-классов таких, что каждый его E_k-класс состоит точно из π_k E_{k-1}-классов для любого k, $0 < k \leq n$.

Теорема 3.1. *Модель $\mathfrak{M}$ почти c-проста.*

Доказательство. Пусть основным множеством $\mathfrak{N}$ является объединением всех E_n-классов таких, что каждый его E_k-класс состоит точно из π_k E_{k-1}-классов для любого k, $0 < k \leq n$. Докажем справедливость условий 1–3 определения 1.1 почти c-простой модели.

1. Легко проверить, что формула

$$N(x) \rightleftharpoons \exists x_0 \ldots \exists x_{\bar{\pi}-1}\Big(\bigwedge_{i \leq j < \bar{\pi}} E_n(x_i, x_j) \ \&\ \bigwedge_{i < j < \bar{\pi}} (x_i \neq x_j) \ \&\ \bigvee_{i < \bar{\pi}_k} (x = x_i)\Big),$$

где $\bar{\pi} = \pi_0 \ldots \pi_n$, определяет основное множество N модели $\mathfrak{N}$ в $\mathbb{HF}(\mathfrak{M})$.

Для доказательства c-простоты теории модели $\mathfrak{N}$ докажем следующие леммы.

Лемма 3.1. *Теория* $\mathrm{Th}(\mathfrak{N})$ *модели* $\mathfrak{N}$ *разрешима, счетно категорична и модельно полна.*

Доказательство. Аксиомами теории $\mathrm{Th}(\mathfrak{N})$ будут следующие предложения.

$1_{k \leq n}$. E_k — отношение эквивалентности.

2. $\forall x \forall y (x E_0 y \to x = y)$.

$3_{0<k\leq n}$. Любой E_k-класс состоит точно из π_k E_{k-1} классов.

$4_{k<\omega}$. $\exists x_0 \ldots \exists x_{k-1} (\&\neg x_i E_n x_j)$.

Легко проверить, что эти аксиомы определяют счетную модель $\mathfrak{N}$ с точности до изоморфизма, т. е. теория $\mathrm{Th}(\mathfrak{N})$ счетно категорична. Отсюда и из вычислимо перечислимой аксиоматизируемости теории $\mathrm{Th}(\mathfrak{N})$ следует, что она разрешима.

Докажем модельную полноту теории $\mathrm{Th}(\mathfrak{N})$. Для этого, как и в лемме 2.4, воспользуемся приведенным там критерием А. Робинсона. Пусть даны две модели $\mathfrak{N}^0 \le \mathfrak{N}^1$ теории $\mathrm{Th}(\mathfrak{N})$ и $A \subseteq N^1$. Пусть $A_\varepsilon = A \cap N^\varepsilon$, $A_1 = A_0 \cup B$, где $B = A_1 \setminus A_0$. Не умаляя общности рассуждения, можно считать, что B состоит из m E_n-классов. Так как в $\mathfrak{N}^0$ существует бесконечно много E_n-классов, в $\mathfrak{N}^0$ найдутся E_n-классы $C_0, \dots, C_{m-1}$ такие, что $C \cap A_0 = \varnothing$, где $C = C_0 \cup \dots \cup C_{m-1}$. Легко проверить, что существует изоморфное вложение $\varphi : A_1 \to \mathfrak{N}^0$ такое, что $\varphi B = C$, $\varphi \restriction A_0 = \mathrm{id}$. $\square$

Пусть даны $m \in \omega$ и последовательность $\Xi = \langle S_0, \dots, S_{n-1} \rangle$ семейств непустых подмножеств множества $\bar m = \{0, \dots, m-1\}$ таких, что для любого $k < n$ выполнены

$$S_0 = \Big\{ A_{i_0} \mid i_0 < \alpha_0,\ \bigsqcup \{ A_{i_0} \mid i_0 < \alpha_0 \} = \bar m,\ |A_{i_0}| \le \pi_n \Big\},$$

$$S_{k+1} = \Big\{ A_{i_0,\dots,i_{k+1}} \mid i_0 < \alpha_0, \dots, i_{k+1} < \alpha_{k+1},$$
$$\bigsqcup \{ A_{i_0,\dots,i_{k+1}} \mid i_{k+1} < \alpha_{k+1} \} = A_{i_0,\dots,i_k},\ |A_{i_0,\dots,i_{k+1}}| \le \pi_{n-(k+1)} \Big\},$$

где символ $\sqcup$ означает объединение попарно не пересекающихся множеств.

Пусть дана последовательность $\vec x = \langle x_0, \dots, x_{m-1} \rangle$ переменных x_i. По любому семейству Ξ определим формулу $\Phi_\Xi(\vec x)$ сигнатуры $\sigma = \langle E_0, \dots, E_n \rangle$, положив

$$\Phi_\Xi(\vec x) = \bigwedge \{ E_{n-k}(x_r, x_s) \mid r, s \in A_{i_0,\dots,i_k},\ i_0 < \alpha_0, \dots, i_k < \alpha_k,\ k < n \}$$
$$\& \ \bigwedge \big\{ \neg E_{n-k}(x_r, x_s) \mid r \in A_{i_0,\dots,i_k^r},\ s \in A_{i_0,\dots,i_k^s},$$
$$i_0 < \alpha_0, \dots, i_k^r < i_k^s < \alpha_k,\ k < n \big\}.$$

Лемма 3.2. *Пусть для последовательностей $\vec x^\varepsilon = \left\langle x_0^\varepsilon, \dots, x_{m-1}^\varepsilon \right\rangle \in \mathfrak{N}^{<\omega}$, $\varepsilon < 2$, справедливо*

$$\mathfrak{N} \models \Phi_\Xi(\vec x^0) \ \& \ \Phi_\Xi(\vec x^1). \tag{23}$$

Тогда существует изоморфизм $\psi : \mathfrak{N} \to \mathfrak{N}$ такой, что $\psi(\vec x^0) = \vec x^1$.

Доказательство. Покажем, что отображение $x_r^0 \to x_r^1$, $r < m$, есть изоморфизм $\varphi : \langle \mathrm{sp}\, \vec x^0, \sigma \rangle \to \langle \mathrm{sp}\, \vec x^1, \sigma \rangle$, где $\sigma = \langle E_0, \dots, E_n \rangle$. Пусть

$$\mathfrak{N} \models E_{n-k}\big(x_r^0, x_s^0\big), \quad k \le n.$$

Тогда в силу (23) найдутся $i_0 < \alpha_0, \dots, i_k < \alpha_k$ такие, что $r, s \in A_{i_0,\dots,i_k}$, а потому $\mathfrak{N} \models E_{n-k}\big(x_r^1, x_s^1\big)$.

Если $\mathfrak{N} \models \neg E_{n-k}\big(x_r^0, x_s^0\big)$, то снова из (23) следует $r, s \notin A_{i_0,\dots,i_k}$ для любых $i_0, \dots, i_k$, а потому $\mathfrak{N} \models \neg E_{n-k}\big(x_r^1, x_s^1\big)$. Таким образом, φ — требуемый изоморфизм.

Пусть $\left[x_r^\varepsilon\right]_{E_k}$ обозначает E_k-класс, содержащий x_r^ε, $r < m$, $k \le n$, и $X_k^\varepsilon \rightleftharpoons \bigcup\limits_{r<m} \left[x_r^\varepsilon\right]_{E_k} = \left[x_{r_0}^\varepsilon\right]_{E_k} \sqcup \dots \sqcup \left[x_{r_k}^\varepsilon\right]_{E_k}$.

Индукцией по k докажем, что φ можно продолжить до изоморфизма $\varphi_k : X_k^0 \to X_k^1$. Если $k = 0$, то $\varphi_0 = \varphi$. Пусть изоморфизм φ_k определен. Класс $\left[x_{r_s}^\varepsilon\right]_{E_{k+1}}$, $s < k$, является дизъюнктным объединением классов $\left[y_i^\varepsilon\right]_{E_k}$, $i <$

π_{k+1}. Тогда существует изоморфизм $\varphi_{k+1,s} : \left[x^0_{r_s}\right]_{E_{k+1}} \to \left[x^1_{r_s}\right]_{E_{k+1}}$ такой, что $\varphi_{k+1,s}\left(y^0_i\right) = y^1_i$ и $\varphi_{k+1,s}$ продолжает φ_k. Множество изоморфизмов $\varphi_{k+1,s}$, $s < r_k$, однозначно определяет изоморфизм $\varphi_{k+1} : X^0_{k+1} \to X^1_{k+1}$. Из определения модели $\mathfrak{N}$ легко следует, что φ_n можно продолжить до требуемого изоморфизма $\psi : \mathfrak{N} \to \mathfrak{N}$. $\square$

Из этой леммы аналогично следствиям 2.3 и 2.4 выводятся

Следствие 3.1. *Любая полная формула* $\Phi(\vec{x})$, $\vec{x} = \langle x_0, \dots, x_{n-1}\rangle$, *совместная с теорией* $\mathrm{Th}(\mathfrak{N})$, *эквивалентна некоторой формуле вида* $\Phi_\Xi(\vec{x})$ *из леммы* 3.2.

Следствие 3.2. *Существует сильно вычислимая последовательность* $F = \langle F_n \mid n \in \omega\rangle$ *конечных множеств всех полных формул от переменных* $x_0, \dots, x_{n-1}$, *совместных с теорией* $\mathrm{Th}(\mathfrak{N})$.

Из леммы 3.1 и следствия 3.2 следует, что $\mathfrak{N}$ — модель c-простой теории, т. е. условие 1 определения 1.1 почти c-простой модели справедливо.

2. Определим предикат $\mathfrak{B}(x, y)$ эквивалентностью

$$\mathbb{HF}(\mathfrak{N}) \models \mathfrak{B}(x, y) \Leftrightarrow x, y \subseteq N \ \&\ y \cap (\cup\{[z]_{E_n} \mid z \in x\}) \subseteq x.$$

Так как $x \in [y]_{E_n}$ — Δ-отношение в $\mathbb{HF}(\mathfrak{N})$, то $\mathfrak{B}$ — Δ-предикат. Легко проверить, что для предиката $\mathfrak{B}$ справедлива формула из условия 2 определения 1.1 почти c-простой модели.

Пусть A — конечное подмножество M. Тогда замыкание $[A]$ определим равенством $[A] = \bigcup\{[a]_{E_n} \mid a \in A\}$.

Для любого конечного подмножества $X \subseteq M$ введем множество $X^* = \{x_0, \dots, x_{l-1}\}$ такое, что $x_i \in X$, $\neg x_i E_n x_j$, $i < j < n$, $[X] = \bigcup\limits_{i<l}[x_i]_{E_n}$.

Пусть $A^* = \{a_0, \dots, a_{l-1}\}$ и $C_0, \dots, C_{l-1}$ — различные E_n-классы в $\mathfrak{N}$. Легко заметить, что существует вложение $\alpha : [A] \to \bigcup\limits_{i<l} C_i$.

В дальнейшем нам потребуется

Лемма 3.3. *Пусть даны конечные подмодели* $A^0 \leq A^1 \leq \mathfrak{M}$ *такие, что* $[A^0] \cap (A^1 \setminus A^0) = \varnothing$. *Тогда для любого вложения* $\varphi : A^0 \to \mathfrak{M}(\mathfrak{N})$ *существует вложение* $\psi : A^1 \to \mathfrak{M}(\mathfrak{N})$, *продолжающее* φ. *Кроме того, для вложений* φ, ψ *в* $\mathfrak{N}$ *справедливо* $\mathbb{HF}(\mathfrak{N}) \models \mathfrak{B}(\varphi A^0, \psi A^1)$.

Действительно, пусть $(A^1 \setminus A^0)^* = \{a_0, \dots, a_{l-1}\}$ и $C_0, \dots, C_{l-1}$ — различные E_n-классы из $\mathfrak{N}$ такие, что $B \cap \bigcup\limits_{i<l} C_i = \varnothing$, где $\varphi A^0 = B$.

Легко заметить, что существует вложение $\psi : A^1 \to B \cup \bigcup\limits_{i<l} C_i$, продолжающее φ, для которого справедливо $\mathbb{HF}(\mathfrak{N}) \models \mathfrak{B}(\varphi A^0, \psi A^1)$. $\square$

Пусть $\alpha : A \to B$ — изоморфизм, где $A \leq \mathfrak{M}$, $B \leq \mathfrak{N}$.

3(a). Допустим, что множество A замкнуто и $A^1 \supseteq A$. Из замкнутости A следует, что $[A^0] \cap (A^1 \setminus A^0) = \varnothing$. По лемме 3.3 существует вложение $\psi : A^1 \to \mathfrak{N}$, продолжающее α, для которого $\mathbb{HF}(\mathfrak{N}) \models \mathfrak{B}(B, \psi A^1)$.

3(b). Пусть даны $\varphi^\varepsilon : A^\varepsilon \to \mathfrak{N}$, $\varepsilon < 2$, — изоморфизм, $A \leq A^\varepsilon \leq \mathfrak{M}$ и

$$\varphi^\varepsilon \restriction A = \alpha, \quad \mathbb{HF}(\mathfrak{N}) \models \mathfrak{B}(B, \varphi^\varepsilon A^\varepsilon). \tag{24}$$

Из (24) следует, что $[A] \cap ((A^0 \cup A^1) \setminus A) = \varnothing$. Действительно, допустим противное, т. е. существует $e \in [A] \cap ((A^0 \cup A^1) \setminus A)$. Пусть для определенности $e \in A^0$. Тогда $\varphi^0 e \in \bigcup\{[z]_{E_n} \mid z \in B\}$, но $\varphi^0 e \notin B$. Следовательно, $\mathbb{HF}(\mathfrak{N}) \models$

$\neg\mathfrak{B}(B, \varphi^0 A^0)$; противоречие. Тогда по лемме 3.3 существует вложение $\psi : A^0 \cup A^1 \to \mathfrak{N}$, продолжающее α, для которого $\mathbb{HF}(\mathfrak{N}) \models \mathfrak{B}(B, \psi(A^0 \cup A^1))$.

3(c). Пусть $B^1 \supseteq B$ и $\mathbb{HF}(\mathfrak{N}) \models \mathfrak{B}(B, B^1)$.

Докажем, что существует вложение $\psi : B^1 \to \mathfrak{M}$, продолжающее α^{-1}. Так же, как в доказательстве условия 3(b), можно показать, что $[B] \cap (B^1 \setminus B) = \varnothing$. Тогда по лемме 3.3 существует вложение $\psi : B^1 \to \mathfrak{M}$, продолжающее α^{-1}.

Таким образом, $\mathfrak{M}$ — почти c-простая модель. Теорема доказана. $\square$

Из теорем 3.1 и 1.1 вытекает

Следствие 3.3. *В наследственно конечном допустимом множестве* $\mathbb{HF}(\mathfrak{M})$ *существует универсальная* Σ*-функция.*

В заключение автор выражает сердечную благодарность С. С. Гончарову за постановку задачи и полезные советы, а также рецензенту за замечания, которые помогли улучшить изложение работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гончаров С. С., Свириденко Д. И.* Математические основы семантического программирования // Докл. АН СССР. 1986. Т. 289, № 6. С. 1324–1328.
2. *Ershov Yu. L., Goncharov S. S., Sviridenko D. I.* Semantic programming. Information processing // Proc. IFIP 10th World comput. congress, Dublin. Dublin: Elsevier Sci., 1986. P. 1093–1100.
3. *Ершов Ю. Л.* Определимость и вычислимость. Изд. 2-е. Новосибирск: Науч. книга; М.: Экономика. (Сибирская школа алгебры и логики), 2000.
4. *Руднев В. А.* Об универсальной рекурсивной функции на допустимых множествах // Алгебра и логика. 1986. Т. 25, № 4. С. 425–436.
5. *Морозов А. С., Пузаренко В. Г.* О Σ-подмножествах натуральных чисел // Алгебра и логика. 2004. Т. 43, № 3. С. 291–320.
6. *Калимулин И. Ш., Пузаренко В. Г.* О вычислимости на структурах // Мат. тр. 2004. Т. 7, № 2. С. 35–72.
7. *Пузаренко В. Г.* К вычислимости на специальных моделях // Сиб. мат. журн. 2005. Т. 46, № 1. С. 185–208.
8. *Александрова С. А.* Проблема униформизации для Σ-предикатов в наследственно конечной списочной надстройке над полем действительных чисел с экспонентой // Алгебра и логика. 2014. Т. 53, № 1. С. 3–14.
9. *Коровина М. В.* Об универсальной рекурсивной функции и абстрактных машинах на вещественных числах со списочной надстройкой. Структурные алгоритмические свойства вычислимости // Вычисл. системы. Новосибирск, 1996. С. 24–43.
10. *Стукачев А. И.* Теорема об униформизации в наследственно конечных надстройках, Обобщенная вычислимость и определимость // Вычисл. системы. Новосибирск, 1998. С. 3–14.
11. *Хисамиев А. Н.* О Σ-подмножествах натуральных чисел над абелевыми группами // Сиб. мат. журн. 2006. Т. 47, № 3. С. 695–706.
12. *Хисамиев А. Н.* Σ-ограниченные алгебраические системы и универсальные функции. I // Сиб. мат. журн. 2010. Т. 51, № 1. С. 217–235.
13. *Хисамиев А. Н.* Σ-ограниченные алгебраические системы и универсальные функции. II // Сиб. мат. журн. 2010. Т. 51, № 3. С. 676–693.
14. *Хисамиев А. Н.* Σ-однородные алгебраические системы и Σ-функции. I // Алгебра и логика. 2011. Т. 50, № 5. С. 659–684.
15. *Хисамиев А. Н.* Σ-однородные алгебраические системы и Σ-функции. II // Алгебра и логика. 2012. Т. 51, № 1. С. 129–147.
16. *Хисамиев А. Н.* Об универсальной Σ-функции над деревом // Сиб. мат. журн. 2012. Т. 53, № 3. С. 687–690.
17. *Ershov Yu. L., Puzarenko V. G., Stukachev A. I.* $\mathbb{HF}$-computability // Computability in context. Computation and logic in the real world (ed. S. B. Cooper and A. Sorbi). London: World Sci., 2011. P. 169–242.

18. *Когабаев Н. Т., Кудинов О. В., Миллер Р.* Вычислимая размерность I-деревьев бесконечной высоты // Алгебра и логика. 2004. Т. 43, № 6. С. 702–729.
19. *Кейслер Г., Чэн Ч. Ч.* Теория моделей. М.: Мир, 1977.

Статья поступила 27 мая 2013 г., окончательный вариант — 18 сентября 2014 г.

Хисамиев Асылхан Назифович
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090
hisamiev@math.nsc.ru