Сибирский математический журнал
Май—июнь, 2015. Том 56, № 3

УДК 510.67:512.56

АКСИОМАТИЗИРУЕМОСТЬ И ПОЛНОТА КЛАССА ИНЪЕКТИВНЫХ ПОЛИГОНОВ НАД КОММУТАТИВНЫМ МОНОИДОМ И НАД ГРУППОЙ

А. А. Степанова

Аннотация. Изучаются моноиды S, над которыми класс инъективных S-полигонов аксиоматизируем, полон, модельно полон. Доказано, что для коммутативного счетного моноида или счетной группы S аксиоматизируемость класса ${}_S\,\mathrm{Inj}$ инъективных полигонов над S эквивалентна конечной порожденности моноида S. Показано, что не существует нетривиального коммутативного моноида или группы, класс инъективных полигонов над которым полон, модельно полон или категоричен.

DOI 10.17377/smzh.2015.56.315

Ключевые слова: аксиоматизируемый класс алгебр, полный класс алгебр, модельно полный класс алгебр, категоричный класс алгебр, полигон, инъективный полигон.

1. Введение

Описание моноидов, над которыми некоторый класс полигонов аксиоматизируем, полон, модельно полон, категоричен и др., является одной из стандартных задач теории моделей полигонов. Для классов плоских, проективных и свободных полигонов эта задача решена в [1–3]; для класса регулярных полигонов такое описание получено в [4, 5]. В данной работе эти вопросы рассматриваются для класса инъективных полигонов. А именно, доказано, что для коммутативного счетного моноида или счетной группы S аксиоматизируемость класса ${}_S\,\mathrm{Inj}$ инъективных полигонов над S эквивалентна конечной порожденности моноида S. Показано, что не существует нетривиального коммутативно моноида или группы, класс инъективных полигонов над которым полон, модельно полон или категоричен.

2. Предварительные сведения

Пусть $\mathscr{K}$ — класс алгебраических систем сигнатуры Σ. Класс $\mathscr{K}$ называется *аксиоматизируемым*, если существует такое множество предложений Z сигнатуры Σ, что для любой алгебраической системы $\mathscr{A}$ сигнатуры Σ

$$\mathscr{A} \in K \Longleftrightarrow \mathscr{A} \models \Phi \quad \text{для всех } \Phi \in Z.$$

При изучении аксиоматизируемости классов будем использовать следующий критерий.

Факт 1 [6]. *Класс K алгебраических систем сигнатуры Σ аксиоматизируем тогда и только тогда, когда он замкнут относительно элементарной эквивалентности и ультрапроизведений.*

Непротиворечивая теория T сигнатуры Σ называется *полной*, если $\Phi \in T$ или $\neg\Phi \in T$ для любого предложения Φ сигнатуры Σ. Алгебраические системы $\mathscr{A}$ и $\mathscr{B}$ сигнатуры Σ называются *элементарно эквивалентными* (обозначаем через $\mathscr{A} \equiv \mathscr{B}$), если для любого предложения Φ сигнатуры Σ

$$\mathscr{A} \models \Phi \Leftrightarrow \mathscr{B} \models \Phi.$$

Факт 2 [6]. *Непротиворечивая теория T полна тогда и только тогда, когда $\mathscr{A} \equiv \mathscr{B}$ для любых моделей $\mathscr{A}, \mathscr{B}$ теории T.*

Подсистема $\mathscr{A}$ алгебраической системы $\mathscr{B}$ сигнатуры Σ называется *элементарной* (обозначается через $\mathscr{A} \prec B$), если для любой формулы $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ сигнатуры Σ и любых $b_1, \ldots, b_n \in B$

$$\mathscr{A} \models \varphi(b_1, \ldots, b_n) \Leftrightarrow \mathscr{B} \models \varphi(b_1, \ldots, b_n).$$

Непротиворечивая теория T сигнатуры Σ называется *модельно полной*, если

$$\mathscr{A} \subseteq B \Longrightarrow A \prec B$$

для любых моделей $\mathscr{A}, B$ теории T сигнатуры Σ.

Через $\mathscr{K}_\infty$ обозначим класс бесконечных алгебраических систем класса $\mathscr{K}$ сигнатуры Σ. Класс $\mathscr{K}$ называется *полным* (*модельно полным*), если теория $\mathrm{Th}(\mathscr{K}_\infty)$ бесконечных алгебраических систем этого класса полна (модельно полна). Класс $\mathscr{K}$ называется *категоричным в мощности $\varkappa$*, если все алгебраические системы класса $\mathscr{K}$ мощности $\varkappa$ изоморфны.

Факт 3 [6]. *Если класс K алгебраических систем сигнатуры Σ категоричен в некоторой бесконечной мощности, то класс K полон.*

Разнозначное отображение $f : X \to B$, где X — конечное подмножество A, называется *конечным частичным изоморфизмом* $\mathscr{A}$ в $\mathscr{B}$, если для любых $a_1, \ldots, a_n \in X$, n-местного символа операции $F \in \Sigma$ и n-местного предикатного символа $P \in \Sigma$ выполняются следующие условия:

$$fF(a_1, \ldots, a_n) = F(fa_1, \ldots, fa_n);$$

$$\langle a_1, \ldots, a_n \rangle \in P \Leftrightarrow \langle fa_1, \ldots, fa_n \rangle \in P.$$

Факт 4 [6]. *Пусть $\mathscr{A}$ и $\mathscr{B}$ — алгебраические системы сигнатуры Σ. Для того чтобы алгебраические системы $\mathscr{A}$ и $\mathscr{B}$ были элементарно эквивалентными, необходимо и достаточно, чтобы для любого $n \in \omega$ и любой конечной сигнатуры $\Sigma_1 \subseteq \Sigma$ существовали непустые множества $F_1(\Sigma_1, n), \ldots, F_n(\Sigma_1, n)$ конечных частичных изоморфизмов $\mathscr{A} \mid \Sigma_1$ в $\mathscr{B} \mid \Sigma_1$ со следующим свойством:*

если $f \in F_i(\Sigma_1, n)$, $1 \le i < n$, то для любых $a \in A$, $b \in B$ существуют $g_1, g_2 \in F_{i+1}(\Sigma_1, n)$, для которых $a \in \mathrm{dom}\, g_1$, $b \in \mathrm{rang}\, g_2$, $f \subseteq g_1$ и $f \subseteq g_2$.

Пусть $\mathscr{A} = \langle A; \Sigma \rangle$ — алгебраическая система сигнатуры Σ. Кортежи элементов $\langle a_1, \ldots, a_n \rangle$ из A и переменных $\langle x_1, \ldots, x_n \rangle$ будем обозначать соответственно через $\bar{a}$ и $\bar{x}$. Вместо $\bar{a} \in A^n$ будем писать $\bar{a} \in A$, вместо a_i — $\bar{a}(i)$. Через $l(\bar{a})$ и $l(\bar{x})$ обозначим длины кортежей $\bar{a}$ и $\bar{x}$ соответственно. Будем отличать знаки теоретико-множественного включения $\subset$ и $\subseteq$.

Если $Y \subseteq A$, то наименьшая относительно включения подсистема $\mathscr{B}$ алгебраической системы $\mathscr{A}$, содержащая множество Y, называется *подсистемой* алгебраической системы $\mathscr{A}$, порожденной множеством Y. При этом множество Y называется *порождающим множеством подсистемы* $\mathscr{B}$, а если $\mathscr{A} = \mathscr{B}$, то — *порождающим множеством алгебраической системы* $\mathscr{A}$. Алгебраическую систему $\mathscr{A}$ будем называть *конечно порожденной*, если существует конечное множество, порождающее $\mathscr{A}$.

Конгруэнция на $\mathscr{A}$ — это отношение эквивалентности ρ на A такое, что для любой n-местной операции $F \in \Sigma$ и любых $a_1, \dots, a_n, a'_1, \dots, a'_n \in A$ из $\langle a_i, a'_i\rangle \in \rho$ для всех i, $1 \le i \le n$, следует $\langle F(a_1, \dots, a_n), F(a'_1, \dots, a'_n)\rangle \in \rho$. Класс конгруэнции ρ с представителем $a \in A$ будем обозначать через a/ρ. Множество всех конгруэнций алгебраической системы $\mathscr{A}$ обозначим через $\mathrm{Con}(\mathscr{A})$. Вместо записи $\langle a, a'\rangle \in \rho$ часто будем использовать запись $a\rho a'$. Если $X \subseteq A \times A$, то через $\rho(X)$ обозначим наименьшую конгруэнцию на $\mathscr{A}$, содержащую X. Если $\bar{a} = \langle a_1, \dots, a_n\rangle$, $\bar{b} = \langle b_1, \dots, b_n\rangle \in A$, то вместо записи $\langle a_1, b_1\rangle, \dots \langle a_n, b_n\rangle \in X$ будем использовать запись $\langle \bar{a}, \bar{b}\rangle \in X$.

Факт 5 (лемма Мальцева) [7]. *Пусть $\mathscr{A} = \langle A; \Sigma\rangle$ — алгебраическая система сигнатуры Σ, $X \subseteq A$ и $\rho = \rho(X)$. Тогда для любых $a, b \in A$ имеет место $a\rho b$ в том и только том случае, когда существуют $m \ge 1$, элементы $\bar{d}_1, \dots, \bar{d}_m, \bar{d}'_1, \dots, \bar{d}'_m, \bar{c}_1, \dots, \bar{c}_m \in A$, $l(\bar{d}_i) = l(\bar{d}'_i) = l(\bar{d})$, $l(\bar{c}_i) = l(\bar{y})$ $(1 \le i \le m)$ и термы $t_1(\bar{d}, \bar{y}), \dots, t_m(\bar{d}, \bar{y})$, $t'_1(\bar{d}, \bar{y}), \dots, t'_m(\bar{d}, \bar{y})$ сигнатуры Σ такие, что $\langle \bar{d}_i, \bar{d}'_i\rangle \in X$ или $\langle \bar{d}'_i, \bar{d}_i\rangle \in X$ для любых i, $1 \le i \le m$, и*

$$a = t_1(\bar{d}_1, \bar{c}_1),\ t_i(\bar{d}'_i, \bar{c}_i) = t_{i+1}(\bar{d}_{i+1}, \bar{c}_{i+1})\ (1 \le i < m), \quad t_m(\bar{d}'_m, \bar{c}_m) = b.$$

Пусть S — полугруппа, порожденная множеством X, т. е. каждый элемент полугруппы S может быть представлен в виде слова в алфавите X. При этом могут существовать различные слова ω_1 и ω_2, представляющие один и тот же элемент. В этом случае равенство $\omega_1 = \omega_2$ называется *соотношением в полугруппе* S. Через $\rho(S, X)$ обозначим бинарное отношение

$$\{\langle u, v\rangle \mid u = v \text{ — соотношение в полугруппе } S\}$$

на множестве S. Ясно, что отношение $\rho(S, X)$ является конгруэнцией полугруппы S. Произвольное подмножество соотношений полугруппы S, порождающее конгруэнцию $\rho(S, X)$, называется *множеством определяющих соотношений полугруппы* S. Полугруппа S называется *конечно определенной*, если существуют конечное множество X, порождающее полугруппу S, и конечное множество определяющих соотношений этой полугруппы.

Факт 6 (теорема Редеи) [8]. *Конечно порожденная коммутативная полугруппа является конечно определенной полугруппой.*

Из теоремы Редеи следует

Факт 7 [8]. *Каждая конгруэнция свободной коммутативной конечно порожденной полугруппы конечно порождена.*

Всюду ниже S будет обозначать моноид, 1 — единица S. Алгебраическая система $\langle A; s\rangle_{s\in S}$ сигнатуры $L_S = \{s \mid s \in S\}$ называется (*левым*) S-*полигоном* (или *полигоном над* S, или *полигоном*), если $s_1(s_2a) = (s_1s_2)a$ и $1a = a$ для любых $s_1, s_2 \in S$, $a \in A$. Полигон $\langle A; s\rangle_{s\in S}$ будем обозначать через ${}_SA$. Все рассматриваемые в работе полигоны, если не оговаривается противное, являются левыми S-полигонами. Через $S - \mathscr{A}ct$ обозначается класс всех полигонов над S. Подсистема ${}_SB$ полигона ${}_SA$ называется *подполигоном* полигона ${}_SA$. Заметим, что полигон ${}_SA$ конечно порожден, если существуют $a_1, \ldots, a_n \in A$ такие, что ${}_SA = \bigcup\limits_{i=1}^{n} {}_SSa_i$. Полигон ${}_SA$ называется *циклическим*, если ${}_SA$ — однопорожденный полигон, т. е. ${}_SA = {}_SSa$ для некоторого $a \in A$. Элементы $a, b \in A$ называются *связанными* в полигоне ${}_SA$, если существуют $n \in \omega$, $c_i \in A$ $(0 \leqslant i \leqslant n)$ и $s_j, t_j \in S$ $(1 \leqslant j \leqslant n)$ такие, что $a = c_0$, $b = c_n$ и $s_i c_{i-1} = t_i c_i$ для любого i, $1 \leqslant i \leqslant n$. Полигон ${}_SA$ называется *связным*, если любые два элемента в нем связаны. Наибольший по включению связный подполигон полигона ${}_SA$ называется *компонентой связности* полигона ${}_SA$.

Для полигонов факт 5 переформулируется следующим образом.

Факт 8. *Пусть ${}_SA$ — левый полигон, $X \subseteq A \times A$ и $\rho = \rho(X)$. Тогда для любых $a, b \in A$ имеет место $a \,\rho\, b$ в том и только том случае, когда существуют $n \geq 1$, $p_1, \ldots, p_n, q_1, \ldots, q_n \in A$, $s_1, \ldots, s_n \in S$ такие, что $\langle p_i, q_i \rangle \in X$ или $\langle q_i, p_i \rangle \in X$ для любых i, $1 \leq i \leq n$, и*

$$a = s_1 p_1,\ s_1 q_1 = s_2 p_2,\ \ldots,\ s_n q_n = b.$$

Инъективным полигоном называется полигон ${}_SQ$ такой, что для любого мономорфизма $\imath : {}_SA \to {}_SB$ и любого гомоморфизма $\varphi : {}_SA \to {}_SQ$ существует гомоморфизм $\psi : {}_SB \to {}_SQ$ такой, что $\varphi = \psi \cdot \imath$, т. е. диаграмма

$$\begin{tikzcd} {}_SA \arrow[r, "\imath"] \arrow[d, "\varphi"'] & {}_SB \arrow[dl, "\psi"] \\ {}_SQ & \end{tikzcd}$$

коммутативна. Класс всех инъективных полигонов обозначим через ${}_S\mathrm{Inj}$. *Нулем полигона* ${}_SA$ называется элемент $\theta \in A$ такой, что $t\theta = \theta$ для любого $t \in S$.

Факт 9 [9]. *Всякий инъективный полигон содержит нуль.*

Факт 10 [9]. *Пусть полигон ${}_SQ$ содержит нуль. Тогда ${}_SQ$ инъективен в том и только том случае, когда для любого циклического полигона ${}_SSa$, любого подполигона ${}_SA$ полигона ${}_SSa$, любого гомоморфизма $\varphi : {}_SA \to {}_SQ$ существует гомоморфизм $\psi : {}_SSa \to {}_SQ$ такой, что $\psi \mid A = \varphi$, т. е. диаграмма*

$$\begin{tikzcd} {}_SA \arrow[r, phantom, "\subseteq"] \arrow[d, "\varphi"'] & {}_SSa \arrow[dl, "\psi"] \\ {}_SQ & \end{tikzcd}$$

коммутативна.

Факт 11 [9]. *Пусть S — группа. Тогда полигон ${}_SA$ инъективен в том и только том случае, когда в ${}_SA$ существует нуль.*

Минимальное инъективное расширение полигона ${}_SA$ называется *инъективной оболочкой* ${}_SA$.

Факт 12 [9]. *Всякий полигон имеет инъективную оболочку.*

3. Аксиоматизируемость класса инъективных полигонов над коммутативным моноидом

Теорема 1. *Пусть S — счетный коммутативный моноид. Тогда класс ${}_S\,\mathrm{Inj}$ инъективных полигонов аксиоматизируем в том и только том случае, когда S — конечно порожденный моноид.*

Доказательство необходимого и достаточного условий теоремы разобьем на ряд лемм.

Необходимость. Пусть S — счетный моноид, $S = \{t_n \mid n \in \omega\}$, $t_0 = 1$, подмоноид S_n моноида S порождается множеством $\{t_0, \dots, t_n\}$, $n \in \omega$. Множество $A_n = \{t_k S_n \cup S_n \mid k \in \omega\}$ является полигоном относительно действия моноида S, определенного следующим образом:

$$t_m(t_k S_n \cup S_n) = (t_m t_k) S_n \cup S_n$$

для любого $m \in \omega$. Зафиксируем $k, n \in \omega$.

Лемма 1. *Пусть S — счетный не конечно порожденный моноид, $t_k S_n \cup S_n$ — нуль полигона ${}_S A_n$. Тогда $t_k \notin S_n$.*

Доказательство. Пусть условия леммы выполнены. Предположим, что $t_k \in S_n$. Тогда $t_k S_n \cup S_n = S_n = S_n \cup S_n$. Следовательно, $t_m S_n = S_n$ для любого $m \in \omega$, т. е. моноид S порождается конечным множеством S_n; противоречие. $\square$

Лемма 2. *Пусть S — счетный коммутативный не конечно порожденный моноид, $t_k S_n \cup S_n$ — нуль полигона ${}_S A_n$. Тогда $t_k S_n \cup S_n = t_k S \cup S_n$.*

Доказательство. Пусть условия леммы выполнены. Тогда

$$t_m t_k \in t_m t_k S_n \cup S_n = t_k S_n \cup S_n$$

для любого $m \in \omega$. Следовательно, $t_k S \subseteq t_k S_n \cup S_n$ и $t_k S \cup S_n = t_k S_n \cup S_n$. $\square$

Лемма 3. *Пусть S — счетный коммутативный не конечно порожденный моноид, $m \in \omega$, $m > k > n$, $S_n \subset S_m$ и $t_k S_n \cup S_n$ — нуль полигона ${}_S A_n$. Тогда в полигоне ${}_S A_m$ нет нулей.*

Доказательство. Предположим противное. Тогда существует $l \in \omega$ такое, что $r(t_l S_m \cup S_m) = t_l S_m \cup S_m$ для любого $r \in S$. Поскольку $t_k \in S_m$, то $t_k S_n \subseteq t_k S_m \subseteq S_m$ и, используя лемму 2, получаем

$$\begin{aligned} S_m = t_k S_m \cup S_m \supseteq t_k S_n \cup S_m &= t_k S_n \cup S_n \cup (S_m \setminus S_n) \\ &= t_k S \cup S_n \cup (S_m \setminus S_n) = t_k S \cup S_m \supseteq S_m. \end{aligned}$$

Следовательно, $S_m = t_k S_m \cup S_m = t_k S \cup S_m$. Тогда

$$\begin{aligned} t_k(t_l S_m \cup S_m) = t_k(t_l S_m) \cup S_m &\subseteq t_k S \cup S_m \\ &= S_m \cup S_m \subseteq t_l S_m \cup S_m = t_k(t_l S_m \cup S_m), \end{aligned}$$

т. е. $S_m = S_m \cup S_m = t_l S_m \cup S_m$, откуда следует $t_l \in S_m$, что противоречит лемме 1. $\square$

Из леммы 3 вытекает существование $k_0 \in \omega$ такого, что в полигоне ${}_S A_m$ нет нулей для любого $m \geqslant k_0$. Пусть

$${}_S A = \bigsqcup_{i \geqslant k_0} {}_S A_i.$$

Через ${}_S B$ обозначим инъективную оболочку полигона ${}_S A$, через ${}_S B_1$ — наименьший относительно включения подполигон полигона ${}_S B$ такой, что $A \subseteq B_1$ и любая компонента связности полигона ${}_S B_1$ является компонентой связности полигона ${}_S B$ и пересекается с A по непустому множеству.

Лемма 4. *Пусть S — счетный коммутативный не конечно порожденный моноид. Тогда в полигоне ${}_SB_1$ нет нулей.*

Доказательство. По построению в полигоне ${}_SA$ нет нулей. Предположим, что θ — нуль полигона ${}_SB_1$. Пусть $b \in A$ такой, что b принадлежит той же компоненте связности полигона ${}_SB_1$, что и θ. Следовательно, существуют элементы $b_0, \dots, b_n \in B_1$, $s_0, \dots, s_{n-1}, t_0, \dots, t_{n-1} \in S$ такие, что $b_0 = b$, $b_n = \theta$ и $s_i b_i = t_i b_{i+1}$ для любого i, $0 \leqslant i \leqslant n-1$. Заметим, что

$$s_{n-1}s_{n-2}\dots s_1 s_0 b_0 = t_0 \dots t_{k-1} s_{n-1} \dots s_k b_k$$

для любого k, $0 \leq k \leq n$. Тогда для $k = n$ получаем $s_{n-1}s_{n-2}\dots s_0 b_0 = t_0 \dots t_{n-1} b_n = \theta$. Поскольку $b \in A$, то $\theta \in A$; противоречие. $\square$

Лемма 5. *Пусть S — счетный коммутативный не конечно порожденный моноид. Тогда ${}_SB =_S (B_1 \amalg \{\theta\})$, где θ — нуль полигона ${}_SB$.*

Доказательство. По факту 9 в инъективном полигоне ${}_SB$ есть нуль θ. Достаточно доказать, что ${}_S(B_1 \amalg \{\theta\}) \in {}_S\mathrm{Inj}$. Пусть ${}_SC$ — подполигон циклического полигона ${}_SSa$, $\varphi :_S C \to_S (B_1 \amalg \{\theta\})$ — гомоморфизм полигонов, $\varphi' :_S C \to_S B$, $\varphi'(c) = \varphi(c)$ для любого $c \in C$.

Предположим, что $\varphi(C) \subseteq B_1$. Так как ${}_SB \in {}_S\mathrm{Inj}$, существует гомоморфизм $\psi' :_S Sa \to_S B$ такой, что $\psi'|C = \varphi'$. Покажем, что $\psi'(a) \in B_1$. Пусть $c \in C$. Тогда $c = ta$ для некоторого $t \in S$. Из равенств $t\psi'(a) = \psi'(ta) = \psi'(c) = \varphi'(c) \in B_1$ и из полигона ${}_SB_1$ следует, что $\psi'(a) \in B_1$. Таким образом, $\psi'(Sa) \subseteq B_1$ и гомоморфизм $\psi :_S Sa \to_S (B_1 \amalg \{\theta\})$ такой, что $\psi(d) = d$ для любого $d \in Sa$, обладает свойством $\psi|C = \varphi$.

Предположим, что существуют $c, d \in C$ такие, что $\varphi(c) \in B_1$, $\varphi(d) = \theta$. Тогда $c = ta$ и $d = sa$ для некоторых $t, s \in S$. Следовательно,

$$s\psi'(a) = \psi'(sa) = \psi'(d) = \varphi'(d) = \theta, \quad r\psi'(a) = \psi'(ra) = \psi'(c) = \varphi'(c).$$

Это означает, что θ и $\varphi'(c)$ принадлежат одной компоненте связности; противоречие.

Таким образом, по факту 10 ${}_S(B_1 \amalg \{\theta\})$ — инъективный полигон. Поскольку полигон ${}_SB$ является инъективной оболочкой полигона ${}_SA$, то ${}_SB =_S (B_1 \amalg \{\theta\})$. $\square$

Лемма 6. *Пусть S — счетный коммутативный моноид и класс ${}_S\mathrm{Inj}$ инъективных полигонов аксиоматизируем. Тогда S — конечно порожденный моноид.*

Доказательство. Предположим, что S — не конечно порожденный моноид. Покажем, что ${}_SB_1 \equiv_S B$. Пусть T — конечное непустое подмножество S, $n \in \omega$, X — конечное подмножество B, содержащее θ, k — наибольший элемент ω такой, что $A_k \cap X \neq \varnothing$ (если $|X| = 1$, то $k = 0$), $i = \max\{j \mid t_j \in T\}$, $i_0 = \max\{k, i\} + 1$. Определим $\varphi : X \to B$ следующим образом:

$$\varphi(x) = x, \text{ если } x \neq \theta, \quad \varphi(\theta) = S_{i_0} \cup S_{i_0} \in A_{i_0}.$$

Если $t_m \in T$, то $m \leq i \leq i_0$, $t_m \in S_{i_0}$ и $t_m(S_{i_0} \cup S_{i_0}) = S_{i_0} \cup S_{i_0}$. Следовательно, φ — конечный частичный изоморфизм $\langle B; t\rangle_{t\in T}$ в $\langle B_1; t\rangle_{t\in T}$. Согласно факту 4 ${}_SB_1 \equiv_S B$. Так как ${}_SB \in {}_S\mathrm{Inj}$ и класс ${}_S\mathrm{Inj}$ аксиоматизируем, по факту 1 ${}_SB_1 \in {}_S\mathrm{Inj}$. По лемме 4 в ${}_SB_1$ нет нулей, что противоречит факту 9. $\square$

Достаточность. На множестве $\omega^n = \{\langle m_1, \dots, m_n\rangle \mid m_i \in \omega\}$ определим отношение $\preccurlyeq$ следующим образом:

$$\langle m_1, \dots, m_n\rangle \preccurlyeq \langle m_1', \dots, m_n'\rangle \Longleftrightarrow \forall i (m_i \leqslant m_i').$$

Ясно, что отношение $\preccurlyeq$ является отношением частичного порядка на ω^n. На множестве $K \subseteq \omega^n$ определим свойство

$$\forall \bar{m}, \bar{k} \in \omega^n (\bar{m} \preccurlyeq \bar{k} \text{ и } \bar{m} \in K \Longrightarrow \bar{k} \in K). \qquad (*)$$

Лемма 7. *Пусть множество $K \subseteq \omega^n$ обладает свойством $(*)$. Тогда в K существует конечное число минимальных относительно $\preccurlyeq$ элементов.*

Доказательство. Проведем доказательство индукцией по n. Пусть $K \subseteq \omega^{n+1}$, k_0 — наименьшее число такое, что $\langle k_0, k_1, \dots, k_n \rangle \in K$ для некоторых $k_1, \dots, k_n \in \omega$,

$$K' = \{\langle k_1, \dots, k_n \rangle \in \omega^n \mid \langle k_0, k_1, \dots, k_n \rangle \in K\}.$$

Если $\langle k_1, \dots, k_n \rangle \in K'$ и $\langle k_1, \dots, k_n \rangle \preccurlyeq \langle k_1', \dots, k_n' \rangle$, то $\langle k_0, k_1, \dots, k_n \rangle \in K$ и $\langle k_0, k_1, \dots, k_n \rangle \preccurlyeq \langle k_0, k_1', \dots, k_n' \rangle$, т. е. $\langle k_0, k_1', \dots, k_n' \rangle \in K$ и $\langle k_1', \dots, k_n' \rangle \in K'$. Следовательно, множество K' обладает свойством $(*)$. По предположению индукции в K' существует конечное число p минимальных элементов. Пусть $1 \leqslant i \leqslant n$ и l_i — наибольшее число такое, что существует минимальный элемент $\langle k_1, \dots, k_{i-1}, l_i, k_i, \dots, k_n \rangle \in K'$. Заметим, что $\langle l_1, \dots, l_n \rangle \in K'$ и $\langle k_0, l_1, \dots, l_n \rangle \in K$. Пусть $\langle k, k_1, \dots, k_n \rangle$ — минимальный элемент K такой, что $k > k_0$. Если $k_i \geqslant l_i$ для любого i, $1 \leqslant i \leqslant n$, то $\langle k_0, l_1, \dots, l_n \rangle \preccurlyeq \langle k, k_1, \dots, k_n \rangle$, причем $k_0 < k$, что противоречит минимальности элемента $\langle k, k_1, \dots, k_n \rangle$. Следовательно, существует i такое, что $k_i < l_i$. Множество

$$K^i = \{\langle s_0, \dots, s_{i-1}, s_{i+1}, \dots, s_n \rangle \in \omega^n \mid \langle s_0, \dots, s_{i-1}, k_i, s_{i+1}, \dots, s_n \rangle \in K\}$$

обладает свойством $(*)$, поэтому по предположению индукции в K^i имеется конечное число p_{k_i} минимальных элементов. Таким образом, число минимальных элементов в K не больше $p + \sum\limits_{i=1}^{n} \sum\limits_{k<l_i} p_{k_i}$. $\square$

Лемма 8. *Пусть S — конечно порожденный коммутативный моноид. Тогда любой подполигон конечно порожденного полигона конечно порожден.*

Доказательство. Пусть $\{s_0, \dots, s_n\}$ — множество порождающих элементов моноида S, ${}_SB$ — конечно порожденный полигон, ${}_SA$ — подполигон полигона ${}_SB$. Лемму достаточно доказать для случая, когда ${}_SB$ — однопорожденный полигон, т. е. $B = Sb$, где $b \in B$. Через K обозначим множество

$$\big\{\langle x_0, \dots, x_n \rangle \in \omega^{n+1} \mid s_0^{x_0} \dots s_n^{x_n} b \in A\big\}.$$

Поскольку для любых $\langle x_0, \dots, x_n \rangle$, $\langle y_0, \dots, y_n \rangle \in \omega^{n+1}$

$$Ss_0^{x_0} \dots s_n^{x_n} b \subseteq Ss_0^{y_0} \dots s_n^{y_n} b \Longleftrightarrow \langle y_0, \dots, y_n \rangle \preccurlyeq \langle x_0, \dots, x_n \rangle,$$

то K обладает свойством $(*)$. По лемме 7 число минимальных элементов в K конечно. Тогда конечное множество

$$\big\{s_0^{k_0} \dots s_n^{k_n} b \mid \langle k_0, \dots, k_n \rangle \text{ — минимальный элемент множества} K\big\}$$

является множеством порождающих элементов полигона ${}_SA$. $\square$

Лемма 9. *Пусть S — конечно порожденный коммутативный моноид. Тогда любая конгруэнция полигона ${}_SS$ конечно порождена.*

Доказательство. Пусть $\{s_0, \dots, s_n\}$ — множество порождающих элементов моноида S, $\theta \in \mathrm{Con}({}_SS)$, $\mathscr{F}$ — свободный коммутативный моноид, порожденный множеством $\{s_0, \dots, s_n\}$. Тогда $S \cong \mathscr{F}/\rho$ для некоторой конгруэнции ρ моноида $\mathscr{F}$. Отождествим моноиды S и $\mathscr{F}/\rho$. Определим бинарное отношение η на множестве $\mathscr{F}$ следующим образом:

$$a\eta b \Longleftrightarrow a/\rho\theta b/\rho.$$

Покажем, что η — конгруэнция моноида $\mathscr{F}$. Действительно, если $a, b, a', b' \in \mathscr{F}$, то

$$\begin{aligned} a\eta b \text{ и } a'\eta b' \Leftrightarrow a/\rho\theta b/\rho \text{ и } a'/\rho\theta b'/\rho \Leftrightarrow aa'/\rho \\ = a/\rho \cdot a'/\rho\theta a/\rho \cdot b'/\rho = b'/\rho \cdot a/\rho\theta b'/\rho \cdot b/\rho = b'b/\rho \Leftrightarrow aa'\eta bb'. \end{aligned}$$

По факту 7 конгруэнция η моноида $\mathscr{F}$ конечно порождена. Пусть множество $X = \{\langle a_0, b_0\rangle, \dots, \langle a_m, b_m\rangle\}$ порождает конгруэнцию η моноида $\mathscr{F}$. Покажем, что множество

$$Y = \{\langle a_0/\rho, b_0/\rho\rangle, \dots, \langle a_m/\rho, b_m/\rho\rangle\}$$

порождает конгруэнцию θ полигона ${}_SS$. Пусть $u, v \in \mathscr{F}$ и $u/\rho\theta v/\rho$. Тогда $u\eta v$. Из коммутативности моноида $\mathscr{F}$ и факта 5 следует, что существуют $k \geq 1$, $c_1, \dots, c_k \in \mathscr{F}$ такие, что $u = c_1 d_1$, $c_i d_i' = c_{i+1} d_{i+1}$ $(1 \leq i < k)$, $v = c_k d_k$ и $\langle d_i, d_i'\rangle \in X$ или $\langle d_i', d_i\rangle \in X$ $(1 \leq i \leq k)$. Так как $\langle d_i/\rho, d_i'/\rho\rangle \in Y$ или $\langle d_i'/\rho, d_i/\rho\rangle \in Y$, по факту 8 множество Y порождает конгруэнцию θ полигона ${}_SS$. $\square$

Пусть $\mathscr{K}$ — класс алгебраических систем, $\mathscr{A} \in \mathscr{K}$, $\bar{b} \in A$. *Типом* кортежа $\bar{b}$ в алгебраической системе $\mathscr{A}$ называется множество $tp(\bar{b}) = \{\Phi(\bar{x}) \mid l(\bar{x}) = l(\bar{b}), \mathscr{A} \models \Phi(\bar{b})\}$. Множество всех конъюнкций атомарных формул типа $tp(\bar{b})$ кортежа $\bar{b}$ алгебраической системы $\mathscr{A}$ назовем *а-типом* кортежа $\bar{b}$ алгебраической системы $\mathscr{A}$ и обозначим через $tp^a(\bar{b})$. Если существует формула $\Phi(\bar{x}) \in tp^a(\bar{b})$ сигнатуры Σ такая, что для любой формулы $\Psi(\bar{x}) \in tp^a(\bar{b})$

$$\mathscr{K} \models \forall \bar{x}(\Phi(\bar{x}) \to \Psi(\bar{x})),$$

то а-тип $tp^a(\bar{b})$ кортежа $\bar{b}$ в алгебраической системе $\mathscr{A}$ называется *главным а-типом* кортежа $\bar{b}$ в классе $\mathscr{K}$. При этом формула $\Phi(\bar{x})$ называется *главной формулой* а-типа $tp^a(\bar{b})$.

Лемма 10. *Пусть S — конечно порожденный коммутативный моноид. Тогда для любого кортежа $\bar{a} \in S$ а-тип $tp^a(\bar{a})$ является главным а-типом кортежа $\bar{a}$ в классе $S - \mathscr{A}ct$.*

Доказательство. Пусть S — конечно порожденный коммутативный моноид. По теореме Редеи моноид S изоморфен фактор-моноиду свободного конечно порожденного коммутативного моноида $\mathscr{F}$ по конечно порожденной конгруэнции ρ. Можно считать, что $S = \mathscr{F}/\rho$. Пусть $\{s_1, \dots, s_n\}$ — множество порождающих элементов моноида $\mathscr{F}$, $\langle t_1, g_1\rangle, \dots, \langle t_m, g_m\rangle$ — множество порождающих элементов конгруэнции ρ, $\bar{a} = \langle a_1, \dots, a_l\rangle \in \mathscr{F}$. Если $d \in \mathscr{F}$, то d/ρ обозначим через $\tilde{d}$. Пусть $T = \bigcup\limits_{1 \leq i \leq l} \mathscr{F}\tilde{a}_i$, где $\mathscr{F}\tilde{a}_i = \{fb \mid f \in \mathscr{F}, b \in \tilde{a}_i\}$. По лемме 8 подполигон ${}_{\mathscr{F}}T$ полигона ${}_{\mathscr{F}}\mathscr{F}$ конечно порожден. Пусть $\{b_1,\dots,b_r\}$ — множество порождающих элементов полигона ${}_{\mathscr{F}}T$. Тогда для любого $i\in\{1,\dots,r\}$ существует $h_i\in\{1,\dots,l\}$ и $f_i\in\mathscr{F}$ такие, что $b_i=f_ia_{h_i}$. Для $i,j\in\{1,\dots,r\}$ и $k\in\{1,\dots,m\}$ выберем слово $d_k^{ij}\in\mathscr{F}$ минимальной длины такое, что

$$d_k^{ij}t_k=t_k^{ij}b_i,\quad d_k^{ij}g_k=g_k^{ij}b_j$$

для некоторых $t_k^{ij},g_k^{ij}\in\mathscr{F}$. Для $i,j\in\{1,\dots,l\}$ выберем слова $a^{ij}\in\mathscr{F}$ минимальной длины такие, что

$$a^{ij}a_i=a^{ji}a_j.$$

Введем обозначения: $\bar{\tilde{a}}=\langle\tilde{a}_1,\dots,\tilde{a}_l\rangle$,

$$\Psi_{ij}\leftrightharpoons a^{ij}x_i=a^{ji}x_j,\quad \Phi_{ijk}\leftrightharpoons\tilde{t}_k^{ij}\tilde{f}_ix_{h_i}=\tilde{g}_k^{ij}\tilde{f}_jx_{h_j},$$

$$\Phi\leftrightharpoons\bigwedge_{1\le i,j\le l}\ \bigwedge_{1\le k\le m}\Phi_{ijk}\wedge\bigwedge_{1\le i,j\le l}\Psi_{ij}.$$

Предположим, что $ca_i=da_j$ для некоторых $c,d\in\mathscr{F}$, $i,j\in\{1,\dots,l\}$. Тогда $c=wa^{ij}$, $d=wa^{ji}$ для некоторого $w\in\mathscr{F}$ и

$$S-\mathscr{A}ct\models\Psi_{ij}\to cx_i=dx_j.$$

Докажем, что Φ — главная формула a-типа $tp^a(\bar{\tilde{a}})$. Пусть $u,v\in\mathscr{F}$, $\tilde{u}x_i=\tilde{v}x_j$ — атомарная формула a-типа $tp^a(\bar{\tilde{a}})$. Покажем, что

$$S-\mathscr{A}ct\models\Phi\to\tilde{u}x_i=\tilde{v}x_j.\tag{1}$$

Так как $\tilde{u}\tilde{a}_i=\tilde{v}\tilde{a}_j$, существуют $\widetilde{w}_1,\dots,\widetilde{w}_s\in\mathscr{F}$, $i_1,\dots,i_r\in\{1,\dots,m\}$, такие, что имеют место равенства

$$ua_i=w_1t_{i_1},\quad va_j=w_sg_{i_s},\quad w_kg_{i_k}=w_{k+1}t_{i_{k+1}}\quad(1\le k<s).$$

Пусть $k\in\{1,\dots,s\}$. Поскольку $\widetilde{w}_k\tilde{t}_{i_k}=\widetilde{w}_k\tilde{g}_{i_k}=\tilde{u}\tilde{a}_i$, то $w_kg_{i_k},w_kt_{i_k}\in T$, $w_kg_{i_k}=w_k'b_{m_k}$ и $w_kt_{i_k}=w_k''b_{n_k}$ для некоторых $w_k',w_{k+1}''\in\mathscr{F}$ и $m_k,n_k\in\{1,\dots,r\}$. Тогда $w_k=d_k'd_{i_k}^{n_km_k}$, $w_k''=d_k't_{i_k}^{n_km_k}$, $w_k'=d_k'g_{i_k}^{n_km_k}$ для некоторого $d_k'\in\mathscr{F}$. Следовательно,

$$S-\mathscr{A}ct\models\Phi_{n_km_ki_k}\to\widetilde{w}_k''\tilde{f}_{n_k}x_{h_{n_k}}=\widetilde{w}_k'\tilde{f}_{m_k}x_{h_{m_k}}.$$

Так как $ua_i=w_1''b_{n_1}=w_1''f_{n_1}a_{h_{n_1}}$ и $va_j=w_s'b_{m_s}=w_s'f_{m_s}a_{h_{m_s}}$, то

$$S-\mathscr{A}ct\models\tilde{u}x_i=\widetilde{w}_1''\tilde{f}_{n_1}x_{h_{n_1}},\quad S-\mathscr{A}ct\models\tilde{v}x_j=\widetilde{w}_s'\tilde{f}_{m_s}x_{h_{m_s}}.$$

Поскольку

$$w_k'f_{m_k}a_{h_{m_k}}=w_k'b_{m_k}=w_kg_{i_k}=w_{k+1}t_{i_{k+1}}=w_{k+1}''b_{n_{k+1}}=w_{k+1}''f_{n_{k+1}}a_{h_{n_{k+1}}},$$

то

$$S-\mathscr{A}ct\models w_k'f_{m_k}x_{h_{m_k}}=w_{k+1}''f_{n_{k+1}}x_{h_{n_{k+1}}}.$$

Таким образом, (1) доказано. $\square$

Лемма 11. *Пусть S — конечно порожденный коммутативный моноид, $\bar{a} \in S$ и $\theta \in \mathrm{Con}({}_SS)$. Тогда a-тип $tp^a(\bar{a}/\theta)$ является главным a-типом кортежа $\bar{a}/\theta$ в классе $S - \mathscr{A}ct$.*

Доказательство. Пусть $\bar{a} = \langle a_0, \ldots, a_m \rangle \in S$ и $\theta \in \mathrm{Con}({}_SS)$. По лемме 10 a-тип $\bar{a}$ является главным a-типом кортежа $\bar{a}$ в классе $S - \mathscr{A}ct$. Пусть $\Psi(\bar{x})$ — главная формула a-типа $\bar{a}$, $\bar{x} = \langle x_0, \ldots, x_m \rangle$. Через ${}_ST$ обозначим полигон ${}_S(Sa_0 \cup \cdots \cup Sa_m)$, через η — конгруэнцию на полигоне ${}_SS$ такую, что $\eta \restriction T = \theta \restriction T$ и $s/\eta = \{s\}$ для любого $s \in S \setminus T$. По лемме 9 конгруэнция η конечно порождена. Пусть $\langle b_0, c_0 \rangle, \ldots, \langle b_n, c_n \rangle$ — порождающие конгруэнции η, $b_i = t_i a_{u_i}$, $c_i = s_i a_{v_i}$, где $t_i, s_i \in S$, $u_i, v_i \in \{0, \ldots, m\}$ $(0 \leqslant i \leqslant n)$.

Покажем, что формула

$$\Phi(\bar{x}) \leftrightharpoons \bigwedge_{i=0}^{n} t_i x_{u_i} = s_i x_{v_i} \wedge \Psi(\bar{x})$$

является главной формулой a-типа $tp^a(\bar{a}/\theta)$. Пусть $sx_i = tx_j \in tp^a(\bar{a}/\theta)$. Тогда $sa_i \theta ta_j$. Так как $sa_i, ta_j \in T$, то $sa_i \eta ta_j$. По факту 8 существуют $k \in \omega$, $r_0, \ldots, r_k \in S$, $i_0, \ldots, i_k \in \{0, \ldots, n\}$ такие, что

$$sa_i = r_0 b_{i_0}, \quad r_k c_{i_k} = ta_j, \quad r_l c_{i_l} = r_{l+1} b_{i_{l+1}} \quad (0 \le l < k).$$

Поскольку $\Psi(\bar{x})$ — главная формула a-типа $tp^a(\bar{a})$ и

$$sx_i = r_0 t_{i_0} x_{u_{i_0}}, \quad r_k s_{v_k} x_{v_{i_k}} = tx_j, \quad r_l s_{i_l} x_{v_{i_l}} = r_{l+1} t_{i_{l+1}} x_{u_{i_{l+1}}} \in tp^a(\bar{a})$$

для любого l, $0 \le l < k$, то

$$S - \mathscr{A}ct \models \Psi(\bar{x}) \to sx_i = r_0 t_{i_0} x_{u_{i_0}} \wedge r_k s_{i_k} x_{v_{i_k}} = tx_j \wedge \bigwedge_{0 \le l < k} r_l s_{i_l} x_{v_{i_l}} = r_{l+1} t_{i_{l+1}} x_{u_{i_{l+1}}}.$$

Кроме того,

$$S - \mathscr{A}ct \models t_{i_l} x_{u_{i_l}} = s_{i_l} x_{u_{i_l}} \to r_l t_{i_l} x_{u_{i_l}} = r_l s_{i_l} x_{u_{i_l}}$$

для любого l, $0 \le l \le k$. Таким образом,

$$S - \mathscr{A}ct \models \Psi(\bar{x}) \to sx_i = tx_j$$

и $tp^a(\bar{a}/\theta)$ является главным a-типом кортежа $\bar{a}/\theta$ в классе $S - \mathscr{A}ct$. $\square$

Лемма 12. *Пусть S — конечно порожденный коммутативный моноид. Тогда класс ${}_S\mathrm{Inj}$ инъективных полигонов аксиоматизируем.*

Доказательство. Пусть $\{s_0, \ldots, s_n\}$ — множество порождающих элементов моноида S, $\bar{a} = \langle a_0, \ldots, a_m \rangle \in S$, $\theta \in \mathrm{Con}({}_SS)$. По лемме 11 a-типы $tp^a(1/\theta)$ элемента $1/\theta$ и $tp^a(\bar{a}/\theta)$ кортежа $\bar{a}/\theta = \langle a_0/\theta, \ldots, a_m/\theta \rangle$ являются главными a-типами в классе $\mathscr{A}ct$. Пусть $\Phi^\theta(x)$ — главная формула a-типа $tp^a(1/\theta)$, $\Phi^\theta_{\bar{a}}(\bar{x})$ — главная формула a-типа $tp^a(\bar{a}/\theta)$, где $\bar{x} = \langle x_0, \ldots, x_m \rangle$. Положим

$$\mathbf{\Sigma} = \left\{ \exists x \bigwedge_{i=0}^{n} (s_i \cdot x = x) \right\} \cup \left\{ \forall x_0 \ldots \forall x_m \left(\Phi^\theta_{\bar{a}}(x_0, \ldots, x_m) \to \exists y \left(\Phi^\theta(y) \wedge \bigwedge_{i=0}^{m} x_i = a_i y \right) \right) \mid \theta \in \mathrm{Con}({}_SS),\ a_0, \ldots, a_m \in S \right\}.$$

Покажем, что $\mathbf{\Sigma}$ — множество аксиом класса ${}_S\operatorname{Inj}$.

Пусть ${}_SQ$ — инъективный полигон. Покажем, что все формулы из $\mathbf{\Sigma}$ истинны в ${}_SQ$. По факту 9 в ${}_SQ$ есть нуль. Поэтому ${}_SQ \vDash \exists x \bigwedge\limits_{i=0}^{n} (s_i \cdot x = x)$. Пусть $\bar{a} = \langle a_0, \ldots, a_m \rangle \in S$, $\theta \in \operatorname{Con}({}_SS)$, $\bar{x}^0 = \left\langle x_0^0, \ldots, x_m^0 \right\rangle \in Q$. Предположим, что ${}_SQ \vDash \Phi_{\bar{a}}^{\theta}(\bar{x}^0)$. Через ${}_SA$ обозначим подполигон полигона ${}_SS/\theta$, порожденный множеством $\{a_0/\theta, \ldots, a_m/\theta\}$. Определим отображение $\varphi :_S A \to_S Q$ следующим образом:

$$\varphi(ta_i/\theta) = tx_i^0 \quad (0 \leqslant i \leqslant m)$$

для любого $t \in S$. Предположим, что $ta_i/\theta = ra_j/\theta$ для некоторых $t, r \in S$ $(0 \leqslant i \leqslant j \leqslant m)$. Тогда $(tx_i = rx_j) \in tp^a(\bar{a}/\theta)$. Поскольку $\Phi_a^{\theta}(\bar{x})$ — главная формула a-типа $tp^a(\bar{a}/\theta)$, имеем

$${}_SS/\theta \vDash \forall \bar{x}\big(\Phi_{\bar{a}}^{\theta}(\bar{x}) \to tx_i = rx_j\big).$$

Так как ${}_SQ \vDash \Phi_{\bar{a}}^{\theta}(\bar{x}^0)$, то $tx_i^0 = tx_j^0$. Следовательно, отображение φ является гомоморфизмом полигонов. Поскольку ${}_SQ \in {}_S\operatorname{Inj}$ и ${}_SA \subseteq_S S/\theta$, существует гомоморфизм $\psi :_S S/\theta \to_S Q$ такой, что $\psi|A = \varphi$. Пусть $\psi(1/\theta) = y^0$. Так как

$${}_SS/\theta \vDash \Phi^{\theta}(1/\theta) \wedge \bigwedge_{i=0}^{m} a_i/\theta = a_i \cdot 1/\theta,$$

то

$${}_SQ \vDash \Phi^{\theta}(y^0) \wedge \bigwedge_{i=0}^{m} x_i^0 = a_i y^0.$$

Таким образом, в полигоне ${}_SQ$ истинны все формулы из $\mathbf{\Sigma}$.

Пусть ${}_SQ$ — полигон, в котором истинны все формулы из $\mathbf{\Sigma}$. Покажем, что ${}_SQ \in {}_S\operatorname{Inj}$. Предположим, что ${}_SA$ — подполигон циклического полигона ${}_SC$ и отображение $\varphi :_S A \to_S Q$ является гомоморфизмом полигонов. Тогда существует $\theta \in \operatorname{Con}({}_SS)$ такая, что ${}_SC \cong_S S/\theta$. Можно считать, что ${}_SA$ — подполигон полигона ${}_SS/\theta$. Так как полигон ${}_SC$ конечно порожден, по лемме 8 ${}_SA$ — конечно порожденный полигон. Пусть $\bar{a}/\theta = \{a_0/\theta, \ldots, a_m/\theta\} \in S/\theta$ — множество порождающих элементов полигона ${}_SA$. Тогда ${}_SA \vDash \Phi_{\bar{a}}^{\theta}(\bar{a}/\theta)$ и ${}_SQ \vDash \Phi_{\bar{a}}^{\theta}(\bar{x}^0)$, где $\bar{x}^0 = \left\langle x_0^0, \ldots, x_m^0 \right\rangle$, $x_i^0 = \varphi(a_i/\theta)$ $(0 \leqslant i \leqslant m)$. Стало быть,

$${}_SQ \vDash \Phi^{\theta}(y^0) \wedge \bigwedge_{i=0}^{m} x_i^0 = a_i y^0$$

для некоторого $y^0 \in Q$. Определим отображение $\psi : S/\theta \to Q$ следующим образом:

$$\psi(r/\theta) = ry^0$$

для любого $r \in S$. Пусть $r/\theta = t/\theta$. Тогда $rx = tx \in tp(1/\theta)$. Так как ${}_SQ \vDash \Phi^{\theta}(y^0)$ и ${}_SQ \vDash \forall y(\Phi^{\theta}(y) \to rx = tx)$, то $ry^0 = ty^0$. Значит, ψ — гомоморфизм полигонов. Из равенств

$$\psi(a_i/\theta) = a_i y^0 = x_i^0 = \varphi(a_i/\theta)$$

следует, что $\psi|A = \varphi$. Таким образом, по факту 10 ${}_SQ \in {}_S\operatorname{Inj}$. $\square$

Из лемм 6 и 12 следует теорема 1.

4. Аксиоматизируемость класса инъективных полигонов над группой

Теорема 2. *Пусть S — счетная группа. Класс ${}_S\mathrm{Inj}$ инъективных полигонов аксиоматизируем тогда и только тогда, когда S является конечно порожденной группой.*

Доказательство. Необходимость. Предположим, класс ${}_S\mathrm{Inj}$ инъективных полигонов аксиоматизируем и группа $S = \{s_k \mid k \in \omega\}$ не конечно порожденная. Индукцией по n построим подгруппы T_n группы S. Подгруппа T_0 группы S порождается множеством $\{s_0\}$. Подгруппа T_n группы S порождается множеством $T_{n-1} \cup \{s_k\}$, где k — наименьшее натуральное число такое, что $s_k \notin T_{n-1}$. Поскольку S не является конечно порожденной группой, то $T_i \subset T_{i+1}$ для любого $i \in \omega$. Кроме того, $\bigcup\limits_{i\in\omega} T_i = S$. Пусть $A_i = \{sT_i \mid s \in S\}$ — множество левых классов смежности группы S по подгруппе T_i. Определим действие моноида S на множестве A_i следующим образом:

$$t(sT_i) = (ts)T_i$$

для любого $t \in S$. Тогда ${}_SA_i$ — полигон. Через ${}_SA$ обозначим полигон $\coprod\limits_{i\in\omega} {}_SA_i$, через ${}_SQ$ — полигон ${}_S(A \coprod \{\theta\})$, где θ — нуль полигона ${}_SQ$.

Поскольку S — группа, в циклическом полигоне нет собственных подполигонов. По факту 10 отсюда следует, что ${}_SQ \in {}_S\mathrm{Inj}$.

Пусть $k \in \omega$. Так как $s_0, \ldots, s_k \in T_k$ и $T_k \in A$, то $s_iT_k = T_k$ для любого i, $0 \le i \le k$, и

$${}_SA \models \exists x \left(\bigwedge_{i=0}^{k} s_i x = x \right).$$

Следовательно, по факту 4 ${}_SQ \equiv_S A$, и в силу аксиоматизируемости класса ${}_S\mathrm{Inj}$ по факту 1 ${}_SA \in {}_S\mathrm{Inj}$. По факту 9 в полигоне ${}_SA$ есть нуль, что не так; противоречие.

Достаточность. Пусть S — счетная конечно порожденная группа, $s_0, \ldots, s_n$ — множество порождающих элементов группы S. Из факта 11 следует, что $\left\{ \exists x \left(\bigwedge\limits_{i=0}^{n} s_i x = x \right) \right\}$ — множество аксиом класса ${}_S\mathrm{Inj}$. □

5. Полнота и модельная полнота класса инъективных полигонов над коммутативным моноидом и над группой

Теорема 3. *Пусть S — коммутативный моноид или группа. Следующие условия эквивалентны:*

(1) *класс ${}_S\mathrm{Inj}$ инъективных полигонов полон;*

(2) *класс ${}_S\mathrm{Inj}$ инъективных полигонов модельно полон;*

(3) *класс ${}_S\mathrm{Inj}$ инъективных полигонов категоричен в некоторой бесконечной мощности;*

(4) $S = \{1\}$.

Доказательство. Если $S = \{1\}$, то класс $S - \mathscr{A}ct$ всех полигонов, в частности, класс ${}_S\mathrm{Inj}$ инъективных полигонов полон, модельно полон и категоричен.

(3) $\Rightarrow$ (1) следует из факта 3.

(1) $\Rightarrow$ (4) и (2) $\Rightarrow$ (4). Пусть класс ${}_S\,\mathrm{Inj}$ полон (модельно полон). Заметим, что $Ss \cap St \neq \varnothing$ для любых $s, t \in S$. Действительно, если S — коммутативный моноид, то $st = ts \in Ss \cap St$; если S — группа, то $Ss = St$.

Покажем, что полигон ${}_SQ$, каждый элемент которого является нулем, инъективен. Предположим, что $\varphi :_S B \to_S Q$ — гомоморфизм полигонов, ${}_SB$ — подполигон циклического полигона ${}_SSa$ и $b_1, b_2 \in B$. Тогда $b_1 = t_1a$ и $b_2 = t_2a$ для некоторых $t_1, t_2 \in S$. Поскольку $St_1 \cap St_2 \neq \varnothing$, то $s_1t_1 = s_2t_2$ для некоторых $s_1, s_2 \in S$. Тогда $\varphi(s_1b_1) = \varphi(s_2b_2)$, т. е. $\varphi(b_1) = \varphi(b_2)$ и $\varphi(B)$ — нуль полигона ${}_SQ$. Полагаем $\psi(Sa) = \varphi(B)$. Таким образом, по факту 10 ${}_SQ \in {}_S\,\mathrm{Inj}$.

Покажем, что $S = \{1\}$. Пусть $s \in S$, $s \neq 1$, ${}_SQ$ — бесконечный полигон, каждый элемент которого является нулем, ${}_SA =_S S \sqcup_S Q$, ${}_S\overline{A}$ — инъективная оболочка полигона ${}_SA$. Тогда ${}_SQ$ — подполигон ${}_S\overline{A}$. Поскольку ${}_SQ \in {}_S\,\mathrm{Inj}$, в силу полноты (модельной полноты) класса ${}_S\,\mathrm{Inj}$ инъективных полигонов ${}_SQ \equiv_S \overline{A}$. Заметим, что ${}_SQ \models \Phi_t$ для любого $t \in S$, где $\Phi_t \leftrightharpoons \forall x(tx = x)$. Следовательно, ${}_S\overline{A} \models \Phi_t$ для любого $t \in S$, т. е. все элементы полигона ${}_S\overline{A}$ являются нулями, в частности, элемент $1 \in \overline{A}$. Это означает, что $S = \{1\}$. $\square$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гоулд В., Михалев А. В., Палютин Е. А., Степанова А. А.* Теоретико-модельные свойства свободных, проективных и плоских S-полигонов // Фунд. и прикл. математика. 2008. Т. 14, № 7. С. 63–110.
2. *Степанова А. А.* Аксиоматизируемость и полнота некоторых классов S-полигонов // Алгебра и логика. 1991. Т. 30, № 5. С. 583–594.
3. *Gould V.* Axiomatisability problems for S-systems // J. London Math. Soc. 1987. V. 35. P. 193–201.
4. *Михалев А. В., Овчинникова Е. В., Палютин Е. А., Степанова А. А.* Теоретико-модельные свойства регулярных полигонов // Фунд. и прикл. математика. 2004. Т. 10, № 4. С. 107–157.
5. *Степанова А. А.* Аксиоматизируемость и модельная полнота класса регулярных полигонов // Сиб. мат. журн. 1994. Т. 35, № 1. С. 181–193.
6. *Ершов Ю. Л., Палютин Е. А.* Математическая логика. М.: Наука, 1987.
7. *Мальцев А. И.* Алгебраические системы. М.: Наука, 1970.
8. *Клиффорд А., Престон Г.* Алгебраическая теория полугрупп. М.: Мир, 1972.
9. *Kilp M., Knauer U., Mikhalev A. V.* Monoids, acts and categories. Berlin; New York: Walter De Gruyter, 2000.

Статья поступила 15 сентября 2014 г.

Степанова Алена Андреевна
Дальневосточный федеральный университет,
Школа естественных наук,
ул. Суханова, 8, Владивосток 690000;
Институт прикладной математики ДВО РАН,
ул. Радио, 7, Владивосток 690041
stepltd@mail.ru