Сибирский математический журнал
Май—июнь, 2015. Том 56, № 3

УДК 510.64

ИНТЕРПОЛЯЦИЯ НАД МИНИМАЛЬНОЙ ЛОГИКОЙ И ИНТЕРВАЛЫ ОДИНЦОВА

Л. Л. Максимова, В. Ф. Юн

Аннотация. Исследуется интерполяционное свойство Крейга CIP в расширениях минимальной логики Йохансона. Рассматривается классификация J-логик, предложенная С. П. Одинцовым, в соответствии с их интуиционистскими и негативными напарниками. При этом все логики разбиваются на интервалы. Доказано, что нижний конец интервала имеет CIP тогда и только тогда, когда оба его напарника имеют CIP. Также показана узнаваемость нижних и верхних концов, которые имеют CIP, и найдена их семантическая характеризация.

DOI 10.17377/smzh.2015.56.311

Ключевые слова: минимальная логика Йохансона, интерполяционное свойство Крейга, узнаваемость, интервалы Одинцова.

К юбилею Юрия Леонидовича Ершова

1. Введение

Статья посвящена проблеме интерполяции в расширениях минимальной логики J Йохансона [1].

В [2] доказано, что существует точно семь непротиворечивых суперинтуиционистских логик с интерполяционным свойством Крейга CIP [3]. Там получено описание всех этих логик. Все позитивные логики с интерполяционным свойством описаны в [4], а негативные логики — в [5], где также было начато исследование указанного свойства в паранепротиворечивых расширениях минимальной логики Йохансона J, в частности, описаны все позитивно аксиоматизируемые J-логики с CIP. В [6] найдены критерии для установления или опровержения интерполяционного свойства и проективного свойства Бета PBP в некоторых логиках специального вида, расширяющих J.

Свойства CIP и PBP, а также ограниченное интерполяционное свойство IPR разрешимы на классах суперинтуиционистских, позитивных, негативных и стройных логик [2, 7–10].

В [11] доказана разрешимость слабого интерполяционного свойства WIP над логикой J. Однако более сильные свойства CIP, IPR и PBP оказались более сложными и их исследование еще далеко от завершения.

Разрешимость CIP над интуиционистской логикой Int основывалась на двух фактах: существует лишь конечное число суперинтуиционистских логик с CIP,

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 12–01–00168а) и Совета по грантам президента РФ и государственной поддержке ведущих научных школ (код проекта НШ–860.2014.1).

и все они узнаваемы над Int [2]. Мы не знаем, конечно или бесконечно число J-логик с CIP и все ли они узнаваемы над J.

В [9] найдены все стройные логики с CIP, в [12, 13] доказано CIP для ряда других важных логик.

С. П. Одинцов [14] предложил классификацию J-логик в соответствии с их интуиционистскими и негативными напарниками, при этом все логики разбиваются на интервалы. В [15] доказано, что верхний конец интервала имеет CIP тогда и только тогда, когда оба его напарника имеют CIP. В этой статье мы покажем, что такой же результат верен для нижних концов интервалов. Также покажем узнаваемость всех концов, которые имеют CIP, и найдем их семантическую характеризацию.

Для доказательства CIP используем семантические методы, разработанные в [12], а также предложим новые конструкции. Более подробно рассматриваются логики, удовлетворяющие некоторым условиям линейности.

В разд. 2 приводятся необходимые определения и предварительные сведения, а также доказана узнаваемость над J всех концов интервалов, определяемых суперинтуиционистскими и негативными логиками с CIP (предложение 2.5). В разд. 3 доказана семантическая полнота рассматриваемых логик. В разд. 4 приведены общие теоремы, лежащие в основе доказательства интерполяционного свойства с помощью специально подобранных классов моделей. В разд. 5, 6 и 8 приводятся конструкции, используемые для доказательства CIP в логике так называемых Q-линейных моделей (разд. 7) и тех логиках, интуиционистским напарником которых является известная логика LC (разд. 9). Эти результаты являются частью основного результата, доказанного в последнем разд. 10 (теорема 10.3).

2. Предварительные сведения

Язык логики J содержит в качестве исходных связок $\&, \vee, \to, \bot, \top$, отрицание определяется как сокращение: $\neg A = A \to \bot$, $(A \leftrightarrow B) = (A \to B)\&(B \to A)$. Формула называется *позитивной*, если она не содержит вхождений константы $\bot$. Логика J может быть задана исчислением, которое имеет те же самые схемы аксиом, что и позитивное интуиционистское исчисление Int^+, и единственное правило вывода модус поненс: $A, A \to B \ / \ B$.

Под J-*логикой* понимаем любое множество формул, содержащее все аксиомы исчисления J и замкнутое относительно модус поненс и правила подстановки. Обозначаем

$$\mathrm{Int} = \mathrm{J} + (\bot \to p), \quad \mathrm{Neg} = \mathrm{J} + \bot, \quad \mathrm{For} = \mathrm{J} + p.$$

Логика называется *нетривиальной*, если она не совпадает с множеством всех формул For. *Суперинтуиционистской логикой* (с.и.л.) называется J-логика, содержащая интуиционистскую логику Int, а *негативной* — J-логика, содержащая логику Neg. Для любой J-логики L обозначаем через $E(L)$ семейство всех J-логик, содержащих L.

Для любой L определяются ее интуиционистский и негативный напарники [14, 16]:

$$L_{\mathrm{int}} = L + (\bot \to p), \quad L_{\mathrm{neg}} = L + \bot.$$

Пусть L_1 — с.и.л., L_2 — негативная логика,

$$[L_1; L_2] = \{L \mid L_{\mathrm{int}} = L_1,\ L_{\mathrm{neg}} = L_2\}.$$

$$L_1 * L_2 = \mathrm{J} + \{I(A) \mid A \in L_1\} + \{\bot \to B \mid B \in L_2\},$$

$I(A)$ — результат подстановки в A формулы $p_k \vee \bot$ вместо каждой переменной p_k.

Теорема 2.1 [14]. *Для любых с.и.л. L_1 и негативной L_2 множество $[L_1; L_2]$ образует интервал с нижним концом $L_1 * L_2$ и верхним концом $L_1 \cap L_2$.*

При этом для аксиоматизации логики $L_1 * L_2$ достаточно использовать лишь аксиомы логик L_1, L_2. Заметим, что

$$L_1 * \mathrm{For} = L_1, \quad \mathrm{For} * L_2 = L_2$$

и соответствующие интервалы одноэлементны.

Пусть L — логика, T — множество формул, A — формула. Пишем $T \vdash_L A$, если A выводима из $L \cup T$ с помощью правила модус поненс.

Если $\mathbf{p}$ — список переменных, то через $A(\mathbf{p})$ обозначаем формулу, все переменные которой входят в $\mathbf{p}$, а через $\mathscr{F}(\mathbf{p})$ — множество всех таких формул. *Интерполяционное свойство Крейга* CIP определяется следующим образом (где списки $\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{r}$ попарно не пересекаются).

CIP. Если $\vdash_L A(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \to B(\mathbf{p}, \mathbf{r})$, то существует такая формула $C(\mathbf{p})$, что $\vdash_L A(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \to C(\mathbf{p})$ и $\vdash_L C(\mathbf{p}) \to B(\mathbf{p}, \mathbf{r})$.

Теорема 2.2 [15]. 1. *Если* J*-логика имеет* CIP*, то ее негативный и интуиционистский напарники имеют* CIP.

2. *Для любых с.и.л. L_1 и негативной L_2 логика $L_1 \cap L_2$ имеет* CIP *тогда и только тогда, когда обе L_1 и L_2 имеют* CIP.

Конечно аксиоматизируемая логика $L_1 \supseteq L_0$ *узнаваема над* L_0, если и только если существует алгоритм, который по любой формуле A узнает, верно ли равенство $L_0 + A = L_1$.

Теорема 2.3 [2]. *Существуют точно семь нетривиальных с.и.л. со свойством* CIP*, и все они узнаваемы над* Int*:*

1) Int;

2) $\mathrm{KC} = \mathrm{Int} + (\neg p \vee \neg\neg p)$;

3) $\mathrm{LC} = \mathrm{Int} + ((p \to q) \vee (q \to p))$;

4) $\mathrm{LP}_2 = \mathrm{Int} + (p \vee (p \to (q \vee \neg q)))$;

5) $\mathrm{LV} = \mathrm{LP}_2 + ((p \to q) \vee (q \to p) \vee (p \leftrightarrow \neg q))$;

6) $\mathrm{LS} = \mathrm{LP}_2 + (\neg p \vee \neg\neg p)$;

7) $\mathrm{Cl} = \mathrm{Int} + (p \vee \neg p)$.

Теорема 2.4 [5]. *Существуют точно три нетривиальные негативные логики со свойством* CIP*, и все они узнаваемы над* Neg*:*

1) Neg;

2) $\mathrm{NC} = \mathrm{Neg} + ((p \to q) \vee (q \to p))$;

3) $\mathrm{NE} = \mathrm{Neg} + (p \vee (p \to q))$.

Разумеется, логика For тоже имеет CIP. Ее узнаваемость над J показана в [17]. Из теорем 2.2–2.4 следует, что не более 32 интервалов вида $[L_1, L_2]$ могут содержать логики с CIP, причем верхние концы этих интервалов действительно имеют CIP.

Покажем узнаваемость концов интервалов для логик с CIP.

Предложение 2.5. *Для любых с.и.л.* L_1 *и негативной* L_2 *с* CIP *логики* $L_1 \cap L_2$ *и* $L_1 * L_2$ *узнаваемы над* J.

Доказательство. По теоремам 2.3 и 2.4 все с.и. и негативные логики узнаваемы над Int и Neg соответственно. По теореме 2.2 логики $L_1 \cap L_2$ имеют CIP. Очевидно, что они содержат логику JX= J+ $((\bot \to p) \vee (p \to \bot))$. В [17] показано, что все такие логики узнаваемы над J.

Суперинтуиционистские и негативные логики с CIP аксиоматизируемы формулами без отрицательных вхождений дизъюнкции. Поэтому логики $L_1 * L_2$ финитно аппроксимируемы (см. следствие 4.5 из [9]). Далее, ввиду теоремы 2.1

$$\mathrm{J} + A \supseteq L_1 * L_2 \iff (\mathrm{Int} + A \supseteq L_1 \text{ и } \mathrm{Neg} + A \supseteq L_2).$$

Из узнаваемости L_1 и L_2 следует узнаваемость $L_1 * L_2$. □

Рассмотрим нижние концы интервалов, где логики L_1, L_2 имеют CIP. Если одна из логик тривиальна, то $L_1 * L_2$ совпадает с другой логикой, а значит, имеет CIP. Остается 21 интервал, где обе логики нетривиальны. Для некоторых из них CIP уже было установлено.

Предложение 2.6 [6, 12]. *Следующие логики имеют* CIP*:* J = Int ∗ Neg, JK = KC ∗ Neg, JE_1^Q = Int ∗ NE, KC ∗ NE, Cl ∗ Neg, Cl ∗ NC, Cl ∗ NE.

В следующих разделах рассмотрим проблему интерполяции в нижних концах остальных интервалов для нетривиальных L_1, L_2.

3. Семантика

В [18] доказана теорема о полноте логики J и некоторых ее расширений относительно семантики типа Крипке. В [12] была предложена некоторая модификация этой семантики, удобная для наших целей.

Подмножество X частично упорядоченного множества W называем *конусом*, если оно удовлетворяет условию

$$x \in X,\ x \leq y \Rightarrow y \in X.$$

Под J-*шкалой* (или просто *шкалой*) понимаем тройку $\mathbf{W} = (W, \leq, Q)$, где W — непустое множество, частично упорядоченное отношением $\leq$ и имеющее наибольший элемент ∞, Q — конус множества W, содержащий ∞.

Моделью языка $\mathscr{L}$ называется четверка $M = (W, \leq, Q, \models)$, где $(W, \leq, Q)$ — шкала, $\models$ — отношение между элементами множества W и формулами языка $\mathscr{L}$, удовлетворяющее условиям:

(1) $x \models p$, $x \leq y \Rightarrow y \models p$ для любой переменной p языка $\mathscr{L}$;
(2) $\infty \models p$ для любой переменной p языка $\mathscr{L}$;
(3) $x \models \bot \iff x \in Q$;
(4) $x \models (A \& B) \iff (x \models A$ и $x \models B)$;
(5) $x \models (A \vee B) \iff (x \models A$ или $x \models B)$;
(6) $x \models (A \to B) \iff (\forall y)(x \leq y \Rightarrow (y \models A \Rightarrow y \models B))$.

Лемма 3.1. *Для любой модели* M *языка* $\mathscr{L}$
(1) $\infty \models A$ *для любой формулы* A *языка* $\mathscr{L}$;
(2) $x \models A$, $x \leq y \Rightarrow y \models A$ *для любой формулы* A *языка* $\mathscr{L}$.

Доказательство проводится индукцией по длине формулы.

Модель (или шкала) называется *инициальной*, если имеет наименьший элемент. Если x есть элемент шкалы W, через W^x обозначаем шкалу $\{y \mid x \leq y\}$

с индуцированным порядком; через M^x обозначаем ограничение модели M на шкалу W^x.

Формула A называется *истинной*, или *общезначимой, в модели* M, если $x \models A$ для любого $x \in M$.

Пусть $L \in E(\mathrm{J})$. Модель M языка $\mathscr{L}$ называется *L-моделью*, если $x \models A$ для любого $x \in M$ и любой формулы A языка $\mathscr{L}$, выводимой в L.

Определим понятие канонической модели M_L языка $\mathscr{L}$. Множество T формул языка $\mathscr{L}$ называется *L-теорией языка* $\mathscr{L}$, если оно содержит $L \cap \mathscr{L}$ и замкнуто относительно правила модус поненс; L-теория T называется *простой*, если удовлетворяет условию: $(A \vee B) \in T \Rightarrow (A \in T$ или $B \in T)$ для любых формул A, B. В частности, множество $F(\mathscr{L})$ всех формул языка $\mathscr{L}$ является простой L-теорией языка $\mathscr{L}$.

В дальнейшем нам потребуется следующая простая

Лемма 3.2. *Пусть T — множество формул языка $\mathscr{L}$. Тогда T является L-теорией языка $\mathscr{L}$ в том и только в том случае, если T содержит $L \cap \mathscr{L}$, замкнуто относительно взятия конъюнкции формул и для всех формул A, B языка $\mathscr{L}$ удовлетворяет условию*

$$A \vdash_L B \Rightarrow (A \in T \Rightarrow B \in T).$$

Каноническая модель M_L языка $\mathscr{L}$ строится следующим образом. Обозначим через W_L множество всех простых L-теорий языка $\mathscr{L}$, где $\leq_L$ — отношение теоретико-множественного включения, $Q_L = \{T \in W_L \mid \bot \in T\}$. Полагаем

$$M_L = (W_L, \leq_L, Q_L, \models_L),$$

где для любой $T \in W_L$ и любой переменной p

$$T \models_L p \iff p \in T.$$

Отметим, что $F(\mathscr{L})$ является наибольшим элементом шкалы W_L.

Определение канонической модели введено Сегербергом [18]. Оно отличается от нашего определения тем, что теория $F(\mathscr{L})$ не включалась в W_L. Следующие теоремы, доказанные Сегербергом [18], справедливы и для моделей, рассматриваемых в этой статье.

Теорема 3.3 (о канонической модели). *Для любых* J*-логики L и языка $\mathscr{L}$ каноническая модель M_L языка $\mathscr{L}$ является L-моделью. Более того, для любой теории T из M_L и любой формулы A языка $\mathscr{L}$*

$$T \models A \iff A \in T.$$

Отсюда сразу вытекает

Теорема 3.4 (о полноте). *Для любой формулы A языка $\mathscr{L}$ и любой* J*-логики L следующие условия эквивалентны:*

1) *A выводима в L;*

2) *A общезначима во всех L-моделях языка $\mathscr{L}$.*

Рассмотрим следующие условия на J-модели, точнее, на J-шкалы.

(KCF) Множество $W - Q$ пусто или имеет наибольший элемент.

(LCF) Множество $W - Q$ линейно упорядочено.

(LP$_2$F) Длины цепей в $W - Q$ не превосходят 2.

(LVF) (LP$_2$F) и $W^x - Q$ содержит не более двух максимальных элементов.

(LSF) (LP$_2$F) и (KCF).

(NCF) Для $x \in Q$ множество Q^x линейно упорядочено.

(NEF) Все элементы множества $Q - \{\infty\}$ попарно не сравнимы.

Лемма 3.5. *Для любой* J-*логики* L

1. *Пусть* $L_1 \in \{\mathrm{KC}, \mathrm{LC}, \mathrm{LP}_2, \mathrm{LV}, \mathrm{LS}\}$. *Если* $L_{\mathrm{int}} \supseteq \mathrm{L}_1$, *то инициальные конусы всех канонических моделей логики* L *удовлетворяют условию* (L_1F).

2. *Пусть* $L_2 \in \{\mathrm{NC}, \mathrm{NE}\}$. *Если* $L_{\mathrm{neg}} \supseteq \mathrm{L}_2$, *то инициальные конусы всех канонических моделей логики* L *удовлетворяют условию* (L_2F).

Доказательство. Для $L_1 = \mathrm{KC}$ и $L_2 = \mathrm{NE}$ утверждение доказано в [12] (см. предложение 2.5). Для $L_1 = \mathrm{LC}$ и $L_2 = \mathrm{NC}$ утверждение доказано Сегербергом [18]. Для остальных логик доказывается аналогично. □

Пусть (IntF) и (NegF) — тождественно истинные условия. Имеет место

Теорема 3.6. *Пусть* $L_1 \in \{\mathrm{Int}, \mathrm{KC}, \mathrm{LC}, \mathrm{LP}_2, \mathrm{LV}, \mathrm{LS}\}$, $L_2 \in \{\mathrm{Neg}, \mathrm{NC}, \mathrm{NE}\}$. *Тогда логика* $L_1 * L_2$ *полна относительно класса шкал, удовлетворяющих условиям* (L_1F) *и* (L_2F).

Доказательство. Если модель удовлетворяет условиям (L_1F) и (L_2F), то в ней общезначимы все аксиомы логики $L_1 * L_2$. С другой стороны, по лемме 3.5 инициальные конусы всех канонических моделей логики L удовлетворяют условиям (L_1F) и (L_2F). □

4. Достаточные условия интерполяции

Для доказательства CIP применим метод из [12].

В [12] доказана теорема, дающая достаточное условие для CIP в J-логиках. Сначала приведем определения.

Даны шкалы W_1, W_0. Отображение θ из W_1 на W_0 называется *p-морфизмом шкал*, если удовлетворяет условиям

(p1) $x, y \in W_1, x \leq_1 y \Rightarrow \theta(x) \leq_0 \theta(y)$;

(p2) $x \in W_1, y \in W_0, \theta(x) \leq_0 y \Rightarrow (\exists z \in W_1)(x \leq_1 z \wedge \theta(z) = y)$;

(p3) $x \in Q_1 \iff \theta(x) \in Q_0$.

Из (p1) следует, что для любого p-морфизма θ из W_1 на W_0 выполнены условия: $\theta(\infty_1) = \infty_0$, и если W_1 — инициальная шкала с наименьшим элементом a, то $\theta(a)$ — наименьший элемент в W_0.

Даны модели M_1 языка $\mathscr{L}_1$ и M_0 языка $\mathscr{L}_0$, содержащегося в языке $\mathscr{L}_1$. Отображение θ из W_1 на W_0 называется $\mathscr{L}_0$-*морфизмом моделей*, если удовлетворяет условиям

(m1) θ является p-морфизмом шкал;

(m2) для любого $x \in W_1$ и любой переменной p языка $\mathscr{L}_0$

$$x \models_1 p \iff \theta(x) \models_0 p.$$

Индукцией по длине формулы доказывается

Лемма 4.1. *Пусть* θ — $\mathscr{L}_0$-*морфизм модели* M_1 *языка* $\mathscr{L}_1$ *на модель* M_0 *языка* $\mathscr{L}_0$. *Тогда для любого* $x \in W_1$ *и любой формулы* A *языка* $\mathscr{L}_0$:

$$x \models_1 A \iff \theta(x) \models_0 A.$$

Для дальнейшего нам потребуются некоторые естественные морфизмы канонических L-моделей.

Лемма 4.2 (о канонических морфизмах). *Пусть даны канонические* L-*модели* M_1 *языка* $\mathscr{L}_1$ *и* M_0 *языка* $\mathscr{L}_0$, *содержащегося в языке* $\mathscr{L}_1$. *Тогда отображение*

$$\theta(T_1) = T_1 \cap \mathscr{L}_0,$$

где $T_1 \in M_1$, *является* $\mathscr{L}_0$-*морфизмом из* M_1 *на* M_0.

Отображение θ из леммы 4.2 называется *каноническим* $\mathscr{L}_0$-*морфизмом* из M_1 на M_0.

Класс моделей K будем называть *устойчивым*, если для любых инициальных моделей M_1 языка $\mathscr{L}_1$, M_2 языка $\mathscr{L}_2$ и M_0 языка $\mathscr{L}_0 = \mathscr{L}_1 \cap \mathscr{L}_2$ из K и любых $\mathscr{L}_0$-морфизмов $\theta_1 : M_1 \to M_0$, $\theta_2 : M_2 \to M_0$ существуют инициальная модель M языка $\mathscr{L} = \mathscr{L}_1 \cup \mathscr{L}_2$, принадлежащая K, а также $\mathscr{L}_1$-морфизм φ из M на M_1 и $\mathscr{L}_2$-морфизм ψ из M на M_2 такие, что $\theta_1\varphi = \theta_2\psi$.

Такую модель вместе с морфизмами будем называть *амальгамой* для M_0, M_1, M_2.

Теорема 4.3 [12]. *Пусть выбранный класс L-моделей содержит все инициальные конусы канонических L-моделей всех языков от различных конечных множеств переменных. Если этот класс является устойчивым, то L имеет* CIP.

Нам также потребуется более сильное утверждение, где достаточно существования амальгамы для канонических моделей и морфизмов.

Теорема 4.4. *Пусть L — произвольная* J*-логика. Пусть для любых инициальных конусов M_1 канонической L-модели языка $\mathscr{L}_1$, M_2 канонической L-модели языка $\mathscr{L}_2$ и M_0 канонической L-модели языка $\mathscr{L}_0 = \mathscr{L}_1 \cap \mathscr{L}_2$ и любых канонических $\mathscr{L}_0$-морфизмов $\theta_1 : M_1 \to M_0$, $\theta_2 : M_2 \to M_0$ существуют инициальная L-модель M языка $\mathscr{L} = \mathscr{L}_1 \cup \mathscr{L}_2$, а также $\mathscr{L}_1$-морфизм ϕ из M на M_1 и $\mathscr{L}_2$-морфизм ψ из M на M_2 такие, что $\theta_1\phi = \theta_2\psi$. Тогда L имеет* CIP.

Доказательство дословно повторяет доказательство теоремы 4.3. □

В следующих разделах приведем конструкции, которые потребуются в доказательствах.

5. Согласованные произведения

В [12] определено понятие согласованного произведения моделей. Пусть даны две модели M_1 языка $\mathscr{L}_1$ и M_2 языка $\mathscr{L}_2$, имеющие общий $\mathscr{L}_0$-морфный образ M_0, где $\mathscr{L}_0 = \mathscr{L}_1 \cap \mathscr{L}_2$, относительно $\mathscr{L}_0$-морфизмов θ_1, θ_2 соответственно. Рассмотрим следующую модель

$$M = (W, \leq, Q, \models)$$

языка $\mathscr{L} = \mathscr{L}_1 \cup \mathscr{L}_2$. Положим

$$W = \{(a, b) \mid a \in W_1,\ b \in W_2,\ \theta_1(a) = \theta_2(b)\},$$
$$(a, b) \leq (a', b') \iff (a \leq_1 a' \text{ и } b \leq b'),$$
$$Q = \{(a, b) \in W \mid a \in Q_1,\ b \in Q_2\},$$
$$(a, b) \models p \iff ((p \in \mathscr{L}_1 \text{ и } a \models_1 p) \text{ или } (p \in \mathscr{L}_2 \text{ и } b \models_2 p)).$$

Заметим, что $\theta_1(\infty_1) = \theta_2(\infty_2)$ ввиду монотонности p-морфизмов, поэтому пара $\infty = (\infty_1, \infty_2)$ принадлежит W и является наибольшим элементом в этом множестве. Кроме того, если M_1 и M_2 — инициальные модели, порожденные элементами a_1 и a_2 соответственно, то $\theta_1(a_1) = \theta_2(a_2)$ есть наименьший элемент модели M_0, пара (a_1, a_2) принадлежит W и является наименьшим элементом в модели M, а значит, M — инициальная модель.

Модель M называем *согласованным произведением* M_1 *и* M_2 *над* M_0.

По следующей лемме M с проекциями π_i является амальгамой для M_0, M_1, M_2.

Лемма 5.1 [12]. *Если даны две модели M_1 языка $\mathscr{L}_1$ и M_2 языка $\mathscr{L}_2$, имеющие общий $\mathscr{L}_0$-морфный образ M_0, где $\mathscr{L}_0 = \mathscr{L}_1 \cap \mathscr{L}_2$, относительно $\mathscr{L}_0$-морфизмов θ_1, θ_2 соответственно и M — их согласованное произведение над M_0, то проекция π_1 является $\mathscr{L}_1$-морфизмом из M на M_1, а проекция π_2 — $\mathscr{L}_2$-морфизмом из M на M_2, причем $\theta_1\pi_1 = \theta_2\pi_2$.*

Из этой леммы и теоремы 4.3 вытекает

Следствие 5.2. *Если логика полна относительно класса моделей, замкнутого относительно согласованных произведений, то она имеет* CIP.

6. Композиции шкал и моделей

Следствие 5.2 использовалось в [12, 13] для доказательства CIP в ряде J-логик. Однако во многих случаях требуются более сложные конструкции.

Для построения моделей, удовлетворяющих тем или иным условиям, определим понятие композиции шкал и моделей.

Пусть $W = (W, \leq, Q)$, $W_1 = (W_1, \leq_1, Q_1)$ — шкалы, θ — p-морфизм из W на W_1, B — некоторое множество элементов из W. Для всех $b \in B$ даны шкалы $Y_b = (Y_b, \leq_b, Q_b)$, где $Y_b \cap W = \{b, \infty\}$, $Y_b \cap Y_{b'} = \{\infty\}$ при $b \neq b'$, b — наименьший, а ∞ — наибольший элементы в Y_b относительно $\leq_b$, α_b — p-морфизм из Y_b на $W_1^{\theta(b)}$.

Ясно, что $\alpha_b(b) = \theta(b)$, $\alpha_b(\infty) = \infty_1$.

Следующую шкалу $W^* = (W^*, \leq^*, Q^*)$ будем называть *композицией над* W. Положим

$$W^* = W \cup \bigcup_{b\in B} Y_b = (W - B) \cup \bigcup_{b\in B} Y_b, \quad Q^* = Q \cup \bigcup_{b\in B} Q_b, \quad \infty^* = \infty.$$

Для $x, y \in W^*$

$$x \leq^* y \iff [(x, y \in W, x \notin B, x \leq y) \text{ или } (\exists b \in B)(x, y \in Y_b \text{ и } x \leq_b y) \text{ или }$$
$$(x \in (W - B) \text{ и } (\exists b \in B)(y \in Y_b \text{ и } x \leq b))].$$

Для $x \in W^*$ положим

$$\beta(x) = \begin{cases} \theta(x), & \text{если } x \in W, \\ \alpha_b(x), & \text{если } x \in Y_b \text{ для } b \in B. \end{cases}$$

Отметим, что для $b \in B$ выполняется $\theta(b) = \alpha_b(b)$, $\theta(\infty) = \alpha_b(\infty) = \infty_1$. Поэтому β определено корректно.

Отметим простые свойства введенного отношения.

Лемма 6.1. *Пусть $x <^* y$.*

1. *Если $x \in Y_b$ для некоторого $b \in B$, то $y \in Y_b$ и $x \leq_b y$.*
2. *Если $y \in W - \{\infty\}$, то $x \in W - B - \{\infty\}$.*

Доказательство. (1) Пусть $x <^* y$ и $x \in Y_b$. Из $Y_b \cap W = \{b, \infty\}$ следует, что $x \notin (W - B)$. Поэтому существует $b' \in B$ такой, что $x, y \in Y_{b'}$ и $x \leq_{b'} y$. Получаем $x \in Y_b \cap Y_{b'}$, поэтому $b = b'$.

(2) Следует сразу из (1). $\square$

Построенную в следующей лемме модель M^* будем называть *композицией над* M.

Лемма 6.2 (о композиции). 1. *Отношение* $\leq^*$ *является частичным порядком на* W^*, *причем* $x \leq^* \infty$ *для всех* $x \in W^*$.

2. *Отображение* β *есть p-морфизм из* W^* *на* W_1.

3. *Пусть* $M = (W, \leq, Q, \models)$ *и все* $M_b = (Y_b, \leq_b, Q_b, \models_b)$ — *модели языка* $\mathscr{L}$, $M_1 = (W_1, \leq_1, Q_1, \models_1)$ — *модель языка* $\mathscr{L}_1 \subseteq \mathscr{L}$ *и все* α_b *и* θ *являются* $\mathscr{L}_1$-*морфизмами. Тогда* β *является* $\mathscr{L}_1$-*морфизмом модели* $M^* = (W^*, \leq^*, Q^*, \models^*)$ *на* M_1, *где для* $x \in W^*$, $p \in \mathscr{L}_1$

$$x \models^* p \iff ((x \in W \text{ и } x \models p) \text{ или } (\exists b \in B)(x \in Y_b \text{ и } x \models_b p)).$$

Доказательство. (1) Если $x \in Y_b$ для некоторого $b \in B$, то $x \leq_b x$ и $x \leq_b \infty$. Если $x \in W - B$, то $x \leq x$ и $x \leq \infty$. Таким образом, $\leq^*$ рефлексивно и $x \leq^* \infty$.

Антисимметричность легко проверяется.

Докажем транзитивность. Достаточно проверить случай

$$x <^* y, \quad y <^* z <^* \infty.$$

Пусть $z \in W - \{\infty\}$. Тогда по лемме 6.1 $y \in W - B$, $x \in W - B$, $x < y < z$, поэтому $x < z$ и $x <^* z$.

Пусть $z \in (Y_b - \{\infty\})$ для некоторого $b \in B$.

Если $y \in W - B$, то $x \in W - B$. Кроме того, $y \leq b$, $x < y$. Тогда $x \leq b$ и $x \leq^* z$.

Рассмотрим случай $y \in Y_{b'}$ для некоторого $b' \in B$. Тогда по лемме 6.1 $b = b'$ и $b \leq_b y \leq_b z$. Если $x \in W - B$, то $x \leq b$ и $x \leq^* z$. Если $x \in \bigcup\limits_{b'' \in B} Y_{b''}$, то $x \in Y_b$, $x \leq_b y \leq_b z$ и $x \leq^* z$.

(2) (p1) Пусть $x, y \in W^*$, $x \leq^* y$. Рассмотрим возможные случаи.

Если $x, y \in Y_b$, $x \leq_b y$ для некоторого $b \in B$, то $\alpha_b(x) \leq_1 \alpha_b(y)$, т. е. $\beta(x) \leq_1 \beta(y)$.

Если $x, y \in W$, то $x \leq y$, $\theta(x) \leq_1 \theta(y)$, т. е. $\beta(x) \leq_1 \beta(y)$.

Если $x \in (W - B)$, $y \in Y_b$, $x \leq b$ для некоторого $b \in B$, то $b \leq_b y$. Поэтому

$$\beta(x) = \theta(x) \leq_1 \theta(b) = \alpha_b(b) \leq_1 \alpha_b(y) = \beta(y).$$

(p2) Пусть $x \in W^*$, $\beta(x) <_1 y$, $y \in W_1$. Найдем $z >^* x$ такой, что $\beta(z) = y$.

Если $x \in Y_b$ для некоторого $b \in B$, то $\alpha_b(x) <_1 y$. Поэтому существует $z \in Y_b$ такой, что $x \leq_b z$ и $\alpha_b(z) = y$. Отсюда $x <^* z$ и $\beta(z) = y$.

Пусть $x \in (W - B)$. Тогда $\theta(x) <_1 y$, поэтому $y = \theta(z)$ для некоторого $z \in W$. Так как $x \notin B$, получаем $x <^* z$. Кроме того, $\beta(z) = y$.

(p3) Пусть $x \in W^*$. Если $x \in (W - B)$, то

$$x \in Q^* \iff x \in Q \iff \theta(x) \in Q_1 \iff \beta(x) \in Q_1.$$

Пусть $x \in (Y_b - \{\infty\})$ для некоторого $b \in B$. Тогда

$$x \in Q^* \iff x \in Q_b \iff \alpha_b(x) \in Q_1 \iff \beta(x) \in Q_1.$$

(3) Легко следует из (2). Пусть p — переменная языка $\mathscr{L}_1$, $x \in W^*$. Если $x \in B$, то

$$x \models p \iff \theta(x) \models_1 p \iff \alpha_x(x) \models_1 p \iff \beta(x) \models_1 (p).$$

Поэтому $x \models^* p \iff \beta(x) \models_1 p$. При $x \in W^* - B$ такое же соотношение очевидно. $\square$

7. CIP в Int $*$ NC

Напомним, что

$$\mathrm{Int} * \mathrm{NC} = \mathrm{J} + (\bot \to (p \to q) \vee (q \to p)).$$

Модель называем *Q-линейной*, если выполнено условие

(NCF) $x \in Q$, $x \leq y$, $x \leq z \Rightarrow (y \leq z$ или $z \leq y)$.

По лемме 3.5 и теореме 3.6 все канонические модели логики Int$*$NC являются Q-линейными, а сама логика полна относительно класса Q-линейных моделей.

Лемма 7.1 (о линейности). *Пусть W_0, W_1, W_2 — линейно упорядоченные шкалы, θ_i — p-морфизмы из W_i на W_0 $(i = 1, 2)$, a и b — инициальные элементы шкал W_1 и W_2 соответственно, $\theta_1(a) = \theta_2(b)$, для любого $z \in W_0$ множества $\theta_1^{-1}(z)$ и $\theta_2^{-1}(z)$ имеют наименьший и наибольший элементы. Тогда существуют линейно упорядоченная инициальная шкала $W = (W, \leq, Q)$ и p-морфизмы α и β из W на W_1 и W_2 соответственно такие, что $\theta_1\alpha = \theta_2\beta$.*

Доказательство. Пусть $z \in W_0$. Обозначим через a_{1z} наименьший элемент в множестве $\theta_1^{-1}(z)$, а через b_{2z} — наибольший элемент в множестве $\theta_2^{-1}(z)$.

Положим

$$S_z = \big\{(a_{1z}, v) \mid v \in \theta_2^{-1}(z)\big\} \cup \big\{(u, b_{2z}) \mid u \in \theta_1^{-1}(z)\big\},$$
$$W = \bigcup\{S_z \mid z \in W_0\}, \quad Q = \bigcup\{S_z \mid z \in Q_0\},$$
$$\infty = (\infty_1, \infty_2).$$

Для $(u, v), (u', v') \in W$

$$(u, v) \leq (u', v') \iff (u \leq_1 u' \text{ и } v \leq_2 v').$$

Заметим, что S_z непусто для любого z, так как содержит пару (a_{1z}, b_{2z}). Кроме того, $(a, b) \in W$.

Очевидно, $\leq$ — частичный порядок на W. Покажем, что $\leq$ — линейный порядок. Пусть $(u, v), (u', v') \in W$. Тогда $(u, v) \in S_z$, $(u', v') \in S_{z'}$, где $z = \theta_1(u) = \theta_2(v)$, $z' = \theta_1(u') = \theta_2(v')$. Имеем $z \leq_0 z'$ или $z' \leq_0 z$.

Пусть $z = z'$. Допустим, что $(u, v) \not\leq (u', v')$. Тогда $u \not\leq_1 u'$ или $v \not\leq_2 v'$. В первом случае $u' <_1 u$, $u \neq a_{1z}$, а значит, $v = b_{2z}$. Поэтому $(u', v') \leq (u, v)$. Во втором случае $v' <_2 v$, $v' \neq b_{2z}$, а значит, $u' = a_{1z}$. Тем самым $(u', v') \leq (u, v)$.

Пусть $z <_0 z'$. Поскольку множества W_1 и W_2 линейно упорядочены, получаем $u <_1 u'$ и $v <_2 v'$, т. е. $(u, v) \leq (u', v')$. Аналогично если $z' <_0 z$, то $(u', v') \leq (u, v)$. Итак, $\leq$ — линейный порядок.

Для $(u, v) \in W$ положим

$$\alpha(u, v) = u, \quad \beta(u, v) = v.$$

Покажем, что α — p-морфизм из W на W_1. Условие (p1) очевидно, докажем (p2).

Пусть $(u, v) \in W$, $u \leq_1 u'$. Тогда $z = \theta_1(u) = \theta_2(v) \leq_0 \theta_1(u') = z'$. Получаем $(u', b_{2z'}) \in S_{z'} \subseteq W$ и $(u, v) \leq (u', b_{2z'})$, $\alpha(u', b_{2z'}) = u'$.

Покажем, что β — p-морфизм из W на W_2. Достаточно проверить условие (p2).

Пусть $(u, v) \in W$, $v <_2 v'$. Тогда $z = \theta_1(u) = \theta_2(v) \leq_0 \theta_2(v') = z'$. Кроме того, $(a_{1z'}, v') \in S_{z'} \subseteq W$. Если $z <_0 z'$, то $(u, v) < (a_{1z'}, v')$.

Рассмотрим случай $z' = z$. Имеем $v \neq b_{1z}$, поэтому $u = a_{1z}$. Кроме того, $(a_{1z}, v') \in S_z$, $(u, v) < (a_{1z}, v')$ и $\beta(a_{1z}, v') = v'$.

Ясно, что $\theta_1\alpha = \theta_2\beta$. $\square$

Лемма 7.2. *Пусть M, M_0 — инициальные конусы канонических моделей логики L языков $\mathscr{L}, \mathscr{L}_0$, где $\mathscr{L}_0 \subseteq \mathscr{L}$, и θ — канонический $\mathscr{L}_0$-морфизм из M на M_0. Пусть $x \in W$, W^x линейно упорядочено и $\theta(x) = x_0$. Тогда $W_0^{x_0}$ линейно упорядочено и для любого $z \geq_0 x_0$ множество $W^x \cap \theta^{-1}(z)$ имеет наименьший элемент a_z и наибольший элемент b_z.*

Доказательство. Линейная упорядоченность следует из (p1). Далее, вспомним, что $\theta(x) = x \cap \mathscr{L}_0$. Пересечение цепи простых теорий и объединение цепи простых теорий из $W^x \cap \theta^{-1}(z)$ снова являются простыми теориями и принадлежат тому же множеству. $\square$

Предложение 7.3. *Пусть L содержит $(\bot \to (p \to q) \vee (q \to p))$. Пусть M_0, M_1, M_2 — инициальные конусы канонических моделей логики L языков $\mathscr{L}_0, \mathscr{L}_1, \mathscr{L}_2$, где $\mathscr{L}_0 = \mathscr{L}_1 \cap \mathscr{L}_2$, и θ_1, θ_2 — канонические $\mathscr{L}_0$-морфизмы из M_1, M_2 на M_0. Тогда существуют модель M^*, удовлетворяющая условию (NCF), а также $\mathscr{L}_1$-морфизм α из M^* на M_1 и $\mathscr{L}_2$-морфизм β из M^* на M_2 такие, что $\theta_1\alpha = \theta_2\beta$.*

Доказательство. Пусть $\mathscr{L}_0 = \mathscr{L}_1 \cap \mathscr{L}_2$ и M_0, M_1, M_2 — инициальные конусы канонических моделей логики L языков $\mathscr{L}_0$, $\mathscr{L}_1$, $\mathscr{L}_2$ соответственно. Пусть $M_i = (W_i, \leq_i, Q_i)$ для $i = 0, 1, 2$ и θ_1, θ_2 — канонические $\mathscr{L}_0$-морфизмы из M_1, M_2 на M_0. Надо построить Q-линейную амальгаму.

Обозначим через $M = (W, \leq, Q, \models)$ согласованное произведение моделей M_1 и M_2 над M_0.

По лемме 5.1 проекции π_i являются $\mathscr{L}_i$-морфизмами из M на M_i, причем $\theta_1\pi_1(x, y) = \theta_2\pi_2(x, y)$ для любой пары $(x, y) \in W$.

Построим композицию M^* над M. Положим $B = Q$.

Пусть $(a, b) \in B$, т. е. $a \in Q_1$, $b \in Q_2$ и $\theta_1(a) = \theta_2(b)$. Так как M_1 и M_2 удовлетворяют условию (NCF) по лемме 3.5, множества W_1^a и W_2^b линейно упорядочены. По лемме 7.2 для любого $z \geq_0 \theta_1(a)$ множества $W_1^a \cap \theta_1^{-1}(z)$ и $W_2^b \cap \theta_2^{-1}(z)$ имеют наименьшие и наибольшие элементы. Тогда по лемме 7.1 существуют линейно упорядоченная инициальная шкала $Y_{ab} = (Y_{ab}, \leq_{ab}, Q_{ab})$ и p-морфизмы α_{ab} и β_{ab} из Y_{ab} на W_1^a и W_2^b такие, что $\theta_1\alpha_{ab} = \theta_2\beta_{ab}$. Заменяя в случае необходимости множества их изоморфными копиями, можно считать, что $Y_{ab} \cap W = \{(a, b), \infty\}$, $Y_{ab} \cap Y_{a'b'} = \{\infty\}$ при $(a, b) \neq (a', b')$, $Q_{ab} = Y_{ab}$, (a, b) — наименьший, а $\infty = (\infty_1, \infty_2)$ — наибольший элементы в Y_{ab}. В частности, $Y_{\infty_1\infty_2} = \{\infty\}$.

Определим модель $M_{ab} = (Y_{ab}, \leq_{ab}, Q_{ab}, \models_{ab})$, полагая для $x \in Y_{ab}$ и переменной $p \in \mathscr{L}_1 \cup \mathscr{L}_2$

$$x \models_{ab} p \iff [(p \in \mathscr{L}_1 \text{ и } \alpha_{ab}(x) \models_1 p) \text{ или } (p \in \mathscr{L}_2 \text{ и } \beta_{ab}(x) \models_2 p)].$$

Учитывая условие $\theta_1\alpha_{ab} = \theta_2\beta_{ab}$, нетрудно проверить, что тогда α_{ab} является $\mathscr{L}_1$-морфизмом из M_{ab} на M_1^a, а β_{ab} — $\mathscr{L}_2$-морфизмом из M_{ab} на M_2^b.

Строим композицию W^* над W. Получаем

$$W^* = W \cup \bigcup_{(a,b)\in Q} Y_{ab}, \quad Q^* = \bigcup_{(a,b)\in Q} Q_{ab}, \quad \infty^* = \infty.$$

Заметим, что $W^* - Q^* = W - Q$.

Для $x, y \in W^*$ определим

$$x \leq^* y \iff [(x, y \in W, x \notin Q, x \leq y) \text{ или } (\exists (a, b) \in Q)(x, y \in Y_{ab} \text{ и } x \leq_{ab} y)$$
$$\text{или } (x \in (W - Q) \text{ и } (\exists (a, b) \in Q)(y \in Y_{ab} \text{ и } x \leq (a, b))].$$

По лемме 6.2 W^* частично упорядочено отношением $\leq^*$. Для $x \in W^*$ положим

$$\alpha(x) = \begin{cases} \pi_1(x), & \text{если } x \in W, \\ \alpha_{ab}(x), & \text{если } x \in Y_{ab} \text{ для } (a,b) \in B; \end{cases}$$

$$\beta(x) = \begin{cases} \pi_2(x), & \text{если } x \in W, \\ \beta_{ab}(x), & \text{если } x \in Y_{ab} \text{ для } (a,b) \in B. \end{cases}$$

Определим $M^* = (W^*, \leq^*, Q^*, \models^*)$, где для $x \in W^*$ и переменной $p \in \mathscr{L}_1 \cup \mathscr{L}_2$

$$x \models^* p \iff [(p \in \mathscr{L}_1 \text{ и } \alpha(x) \models_1 p) \text{ или } (p \in \mathscr{L}_2 \text{ и } \beta(x) \models_2 p)].$$

Тогда по лемме 6.2 α является $\mathscr{L}_1$-морфизмом из M^* на M_1, а β — $\mathscr{L}_2$-морфизмом из M^* на M_2. Очевидно, $\theta_1\alpha = \theta_2\beta$.

Покажем, что M^* удовлетворяет условию (NCF). Пусть $y \in Q^*$. Тогда $y \in Y_{ab}$ для некоторых a, b.

Допустим, что $y <^* z$ и $y <^* t$. По лемме 6.1 заключаем, что $z, t \in Y_{ab}$. Поскольку Y_{ab} линейно упорядочено, элементы z и t сравнимы по $\leq_{ab}$, а значит, и по $\leq^*$. Условие (NCF), а вместе с ним и лемма доказаны. $\square$

Из предложения 7.3 и теоремы 4.4 сразу следует

Теорема 7.4. *Логика* Int $*$ NC *имеет* CIP.

8. Корректные подмодели

Шкала $(W', \leq', Q')$ называется *подшкалой* шкалы $(W, \leq, Q)$, если $W' \subseteq W$, отношение $\leq'$ является ограничением $\leq$ на W' и $Q' = Q \cap W'$.

Модель $M = (W', \leq', Q', \models')$ языка $\mathscr{L}$ называется *подмоделью* модели $M = (W, \leq, Q, \models)$ языка $\mathscr{L}$, если $(W', \leq', Q')$ является подшкалой шкалы $(W, \leq, Q)$ и для любых $x \in W'$ и переменной p языка $\mathscr{L}$

$$x \models' p \iff x \models p.$$

Пусть W, W_1 — шкалы, θ — p-морфизм из W на W_1. Подшкалу W' шкалы W называем *корректной относительно* θ, если ограничение θ' p-морфизма θ на W' снова является p-морфизмом на W_1.

Пусть θ — $\mathscr{L}_1$-морфизм модели M языка $\mathscr{L} \supseteq \mathscr{L}_1$ на модель M_1 языка $\mathscr{L}_1$. Подмодель M' модели M называется *корректной относительно* θ, если ограничение θ' $\mathscr{L}_1$-морфизма θ на M' снова является $\mathscr{L}_1$-морфизмом на M_1.

Ясно, что если θ — $\mathscr{L}_1$-морфизм модели $M = (W, \leq, Q, \models)$ языка $\mathscr{L} \supseteq \mathscr{L}_1$ на модель $M_1 = (W_1, \leq_1, Q_1, \models_1)$ языка $\mathscr{L}_1$ и $M' = (W', \leq', Q', \models')$ — подмодель M, причем подшкала W' корректна относительно θ, то подмодель M' корректна относительно θ.

Следующая лемма дает достаточное условие корректности.

Лемма 8.1 (об ограничении). *Пусть W, W_1 — шкалы, θ — p-морфизм из W на W_1, $D \subseteq W - Q$, причем $\theta(D) = W_1 - Q_1$ и выполнено условие*

$$x \in D, \quad \theta(x) <_1 y, \quad y \in W_1 - Q_1 \Rightarrow (\exists z \in D)(x < z \text{ и } \theta(z) = y).$$

Определим подшкалу $W' = D \cup Q$ шкалы W, где $Q' = Q$, порядок на W' индуцирован порядком на W. Тогда подшкала W' корректна относительно θ.

Доказательство. Условия (p1) и (p3) очевидны. Проверим (p2). Пусть $x \in W'$, $\theta'(x) <_1 y$, $y \in W_1$. Найдем $z \in W'$ такой, что $x <' z$ и $\theta'(z) = y$.

Если $x \in Q'$, то $y \in Q_1$, а значит, существует $z \in Q$ такой, что $z > x$ и $\theta(z) = y$. Тогда $z \in W'$, $x <' z$ и $\theta'(z) = y$.

Пусть $x \notin Q'$, т. е. $x \in D$. Если $y \in Q_1$, то, как и в предыдущем случае, существует $z \in W'$ такой, что $x <' z$ и $\theta'(z) = y$. Допустим, что $y \in W_1 - Q_1$. Тогда требуемый z существует по условию леммы. □

Следующая лемма доказывает устойчивость класса моделей, удовлетворяющих условию (NEF), что позволяет доказать CIP в логике Int∗NE.

Лемма 8.2. *Пусть даны две модели M_1 языка $\mathscr{L}_1$ и M_2 языка $\mathscr{L}_2$, удовлетворяющие условию* (NEF), *и $\mathscr{L}_0$-морфизмы θ_1, θ_2 моделей M_1, M_2 на модель M_0 языка $\mathscr{L}_0 = \mathscr{L}_1 \cap \mathscr{L}_2$. Тогда существует подмодель*

$$M^* = (W^*, \leq^*, Q^*, \models^*)$$

согласованного произведения моделей M_1 и M_2 над M_0, где

$$W^* - Q^* = \{(a, b) \mid a \in W_1 - Q_1,\ b \in W_2 - Q_2,\ \theta_1(a) = \theta_2(b)\},$$

удовлетворяющая условию (NEF), *причем ограничения π_i^* $(i = 1, 2)$ проекций π_i на M^* являются $\mathscr{L}_i$-морфизмами из M^* на M_i и $\theta_1\pi_1^* = \theta_2\pi_2^*$.*

Доказательство. По существу, лемма доказана в [12]. Доказательство CIP для логики $\mathrm{JE}_1^Q = \mathrm{Int} * \mathrm{NE}$ основано на устойчивости класса моделей, удовлетворяющих условию (NEF), которая устанавливается с помощью следующей конструкции. По данным моделям строится подмодель

$$M^* = (W^*, \leq^*, Q^*, \models^*)$$

согласованного произведения моделей M_1 и M_2 над M_0, где

$$W^* = \{(a, b) \mid a \in W_1 - Q_1,\ b \in W_2 - Q_2,\ \theta_1(a) = \theta_2(b)\} \cup Q^*,$$

$$\begin{aligned} Q^* = \{(a, b) \mid a \in Q_1,\ b \in Q_2,\ \theta_1(a) = \theta_2(b) \neq \infty_0\} \\ \cup \{(a, \infty_2) \mid a \in Q_1,\ \theta_1(a) = \infty_0\} \cup \{(\infty_1, b) \mid b \in Q_2,\ \theta_2(b) = \infty_0\}. \end{aligned}$$

Тогда M^* удовлетворяет требованиям леммы. □

9. CIP в LC∗Neg, LC∗NC и LC∗NE

Лемма 9.1. *Пусть $L_{\mathrm{int}} \supseteq \mathrm{LC}$, M, M_0 — инициальные конусы канонических моделей логики L языков $\mathscr{L}, \mathscr{L}_0$, где $\mathscr{L}_0 \subseteq \mathscr{L}$, и θ — канонический $\mathscr{L}_0$-морфизм из M на M_0. Тогда для любого $z \in (W_0 - Q_0)$ множество $\theta^{-1}(z)$ имеет наименьший элемент a_z и наибольший элемент b_z.*

Доказательство. По лемме 3.5 множество $W - Q$ линейно упорядочено. Следовательно, $\theta^{-1}(z)$ линейно упорядочено. Утверждение легко вытекает из определения канонического морфизма. □

Теорема 9.2. *Логики* $\mathrm{LC} * \mathrm{Neg}$, $\mathrm{LC} * \mathrm{NC}$, $\mathrm{LC} * \mathrm{NE}$ *имеют* CIP.

Доказательство. Сначала докажем CIP в $\mathrm{LC} * \mathrm{NC}$. Используем доказательство для $\mathrm{Int} * \mathrm{NC}$.

Пусть M_0, M_1, M_2 — инициальные конусы канонических моделей логики $\mathrm{LC} * \mathrm{NC}$, $\theta_i : M_i \to M_0$ — $\mathscr{L}_0$-морфизмы для $i = 1, 2$.

В соответствии с доказательством предложения 7.3 обозначаем через $M = (W, \leq, Q, \models)$ согласованное произведение моделей M_1 и M_2 над M_0. Затем строим модель $M^* = (W^*, \leq^*, Q^*, \models^*)$ и $\mathscr{L}_i$-морфизмы α, β из M^* на M_1 и M_2 соответственно такие, что $\theta_1\alpha = \theta_2\beta$. При этом

$$W^* - Q^* = W - Q = \{(x, y) \mid x \in W_1 - Q_1,\ y \in W_2 - Q_2,\ \theta_1(x) = \theta_2(y)\},$$

для $(x, y), (x', y') \in (W^* - Q^*)$ выполняется

$$(x, y) \leq^* (x', y') \iff (x, y) \leq (x', y') \iff (x \leq_1 x' \text{ и } y \leq_2 y'),$$

$$\alpha(x, y) = x, \quad \beta(x, y) = y.$$

По предложению 7.3 модель M^* удовлетворяет условию (NCF).

Вспомним, что исходные модели удовлетворяли $I((p \to q) \vee (q \to p))$. Тогда $W_i - Q_i$ линейно упорядочены по лемме 3.5. Кроме того, по лемме 9.1 для любого $x_0 \in W_0 - Q_0$ в множестве $\theta_i^{-1}(x_0)$ существуют наименьший элемент $l_i(x_0)$ и наибольший элемент $u_i(x_0)$.

Применим лемму 8.1. Определим подмодель M' модели M^*, полагая

$$D = \{(x_1, x_2) \mid \theta_1(x_1) = \theta_2(x_2) = x_0 \in W_0 - Q_0,\ (x_1 = l_1(x_0) \text{ или } x_2 = u_2(x_0))\},$$

$$W' = D \cup Q^*, \quad Q' = Q^*.$$

Тогда $W' - Q'$ линейно упорядочено. Покажем, что α и β удовлетворяют условиям леммы 8.1.

Пусть $x \in D$. Тогда

$$x = (x_1, x_2), \quad x_i \in (W_i - Q_i), \quad \theta_1(x_1) = \theta_2(x_2).$$

Допустим $\alpha(x) <_1 y_1$, $y_1 \in (W_1 - Q_1)$. Найдем $z \in D$ такой, что $x <^* z$ и $\alpha(z) = y_1$.

Имеем

$$x_1 <_1 y_1, \quad \theta_2(x_2) = \theta_1(x_1) \leq_0 \theta_1(y_1) = x_0, \quad x_0 \in (W_0 - Q_0).$$

Отсюда $z = (y_1, u_2(x_0)) \in D$ и $x <^* z$.

Допустим $\beta(x) <_2 y_2$, $y_2 \in (W_2 - Q_2)$. Найдем $z \in D$ такой, что $x <^* z$ и $\beta(z) = y_2$.

Пусть $\theta_2(y_2) = y_0$. Если $\theta_1(x_1) <_0 y_0$, то $x_1 <_1 l_1(y_0)$. При $z = (l_1(y_0), y_2)$ получаем $z \in D$, $x <^* z$ и $\beta(z) = y_2$.

Рассмотрим случай $\theta_1(x_1) = y_0$. Поскольку $(x_1, x_2) \in D$, получаем $x_1 = l_1(y_0)$ или $x_2 = u_2(y_0)$. Второй вариант невозможен, так как $\theta_2(y_2) = y_0$, а значит, $y_2 \leq_2 u_2(y_0)$ в противоречие с $x_2 <_2 y_2$. Поэтому $x_1 = l_1(y_0)$, $z = (x_1, y_2) \in D$, $x <^* z$ и $\beta(z) = y_2$.

По лемме 8.1 ограничения α' и β' отображений α и β на множество W' являются p-морфизмами из W' на W_1 и W_2 соответственно. Ясно, что они являются и $\mathscr{L}_i$-морфизмами и $\theta_1\alpha' = \theta_2\beta'$.

По теореме 4.4 $\mathrm{LC} * \mathrm{NC}$ имеет CIP.

Доказательство для $\mathrm{LC} * \mathrm{Neg}$ аналогично. Достаточно вместо амальгамы M^* и морфизмов α и β взять согласованное произведение M и проекции π_i. Для LC*NE вместо амальгамы M^* и морфизмов α и β достаточно взять амальгаму M^*, π_1^*, π_2^* из леммы 8.2. $\square$

10. Основной результат

Докажем основной результат — теорему 10.3.

Будем говорить, что модель $M = (W, \leq, Q, \models)$ *удовлетворяет условию максимальности*, если для любого $x \in W - Q$ существует $y \geq x$, максимальный в $W - Q$.

В [13] доказана

Лемма 10.1. *Пусть $M = (W, \leq, Q, \models)$ — согласованное произведение моделей с условием максимальности. Тогда*

(1) M также удовлетворяет условию максимальности;

(2) для любого x, максимального в $W_1 - Q_1$, существует y, максимальный в $W_2 - Q_2$ и такой, что $(x, y) \in W$;

(3) для любого y, максимального в $W_2 - Q_2$, существует x, максимальный в $W_1 - Q_1$ и такой, что $(x, y) \in W$;

(4) если $(x_1, x_2) \in W$, то элемент (x_1, x_2) является максимальным в $W - Q$ тогда и только тогда, когда x_1 и x_2 максимальны в $W_1 - Q_1$ и $W_2 - Q_2$ соответственно.

Лемма 10.2. *Классы инициальных моделей, удовлетворяющих любому из условий* (KCF), (LP$_2$F), (LVF), (LSF), *являются устойчивыми.*

Доказательство. Пусть даны две инициальные модели M_1 языка $\mathscr{L}_1$ и M_2 языка $\mathscr{L}_2$, удовлетворяющие одному из указанных условий, и $\mathscr{L}_0$-морфизмы θ_1, θ_2 моделей M_1, M_2 на модель M_0 языка $\mathscr{L}_0 = \mathscr{L}_1 \cap \mathscr{L}_2$. По предложению 5.1 согласованное произведение $M = (W, \leq, Q, \models)$ моделей M_1 и M_2 над M_0 вместе с проекциями π_i является амальгамой для M_0, M_1, M_2. Построим подмодель

$$M^* = (W^*, \leq^*, Q^*, \models^*)$$

согласованного произведения M, удовлетворяющую тому же условию и корректную относительно обоих $\mathscr{L}_i$-морфизмов π_i.

(KCF) Само M удовлетворяет этому условию.

(LP$_2$F) В множестве $W - Q$ оставляем лишь наименьший и максимальные элементы.

(LVF) В множестве $W - Q$ оставляем лишь наименьший и максимальные элементы. При этом число максимальных элементов равно 1, 2 или 4. В первых двух случаях M удовлетворяет (LVF). В последнем случае каждое из множеств $W_i - Q_i$ состоит из двух различных элементов a_i, b_i и мы оставляем в $W^* - Q^*$ лишь две пары (a_1, b_1) и (a_2, b_2).

(LSF) В множестве $W - Q$ оставляем лишь наименьший и наибольший элементы.

Корректность легко следует из леммы 8.1. Таким образом, ограничения π_i^* $(i = 1, 2)$ проекций π_i на M^* являются $\mathscr{L}_i$-морфизмами из M^* на M_i и $\theta_1\pi_1^* = \theta_2\pi_2^*$. $\square$

Теорема 10.3. *Логика $L_1 * L_2$ имеет* CIP *тогда и только тогда, когда L_1 и L_2 имеют* CIP.

Доказательство. Если $L_1 * L_2$ имеет CIP, то L_1 и L_2 имеют CIP по теореме 2.2. Докажем обратное.

Если одна из логик есть For, то логика $L_1 * L_2$ совпадает с другой логикой и доказывать нечего. Для случая $L_1 = \mathrm{Cl}$ утверждение уже доказано (предложение 2.6). Там же установлено CIP для логик $\mathrm{Int} * \mathrm{Neg}$ и $\mathrm{Int} * \mathrm{NE}$, а в теореме 7.4 — для $\mathrm{Int} * \mathrm{NC}$. Случай $L_1 = \mathrm{LC}$ рассмотрен в теореме 9.2. Остается рассмотреть случаи $L_2 \in \{\mathrm{Neg}, \mathrm{NC}, \mathrm{NE}\}$ и $L_1 \in \{\mathrm{KC}, \mathrm{LP}_2, \mathrm{LV}, \mathrm{LS}\}$.

Если $L_2 \in \{\mathrm{Neg}, \mathrm{NE}\}$, то CIP вытекает из теоремы 4.3. Устойчивость класса инициальных моделей для $L_1 * \mathrm{Neg}$ следует из теоремы 3.6 и лемм 3.5 и 10.2.

Класс моделей для $L_1 * \mathrm{NE}$ должен удовлетворять (L_1F) и дополнительному условию (NEF). Устойчивость этого класса доказывается аналогично лемме 10.2. Надо лишь в качестве амальгамы для данных моделей M_0, M_1, M_2 вместо их согласованного произведения взять модель M^* с морфизмами π_i^* из леммы 8.2.

Пусть $L_2 = \mathrm{NC}$. Используем теорему 4.4. Докажем, что $L = \mathrm{L}_1 * \mathrm{NC}$ удовлетворяет условию этой теоремы.

Пусть даны инициальные конусы M_1 и M_2 канонических L-моделей языков $\mathscr{L}_1$ и $\mathscr{L}_2$ соответственно и канонические $\mathscr{L}_0$-морфизмы θ_1, θ_2 моделей M_1, M_2 на модель M_0 языка $\mathscr{L}_0 = \mathscr{L}_1 \cap \mathscr{L}_2$. По лемме 3.5 все модели удовлетворяют условиям (L_1F) и (NCF). Сначала применяем предложение 7.3 и строим модель M^*, удовлетворяющую условию (NCF), и морфизмы α и β. Затем аналогично конструкции из леммы 10.2 строим подмодель модели M^*, обладающую свойством (L_1F) и корректную относительно α и β. Построенная подмодель является амальгамой для M_0, M_1, M_2 и удовлетворяет условиям (L_1F) и (NCF). По теореме 4.4 L имеет CIP. $\square$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Johansson I.* Der Minimalkalkül, ein reduzierter intuitionistischer Formalismus // Compos. Math. 1937. V. 4. P. 119–136.
2. *Максимова Л. Л.* Теорема Крейга в суперинтуиционистских логиках и амальгамируемые многообразия псевдобулевых алгебр // Алгебра и логика. 1977. Т. 16, № 6. С. 643–681.
3. *Craig W.* Three uses of Herbrand–Gentzen theorem in relating model theory and proof theory // J. Symb. Log. 1957. V. 22. P. 269–285.
4. *Максимова Л. Л.* Интерполяционная теорема Крейга и амальгамируемые многообразия // Докл. АН СССР. 1977. Т. 237, № 6. С. 1281–1284.
5. *Максимова Л. Л.* Неявная определимость в позитивных логиках // Алгебра и логика. 2003. Т. 42, № 1. С. 65–93.
6. *Максимова Л. Л.* Интерполяция и определимость в расширениях минимальной логики // Алгебра и логика. 2005. Т. 44, № 6. С. 726–750.
7. *Максимова Л. Л.* Разрешимость проективного свойства Бета в многообразиях гейтинговых алгебр // Алгебра и логика. 2001. Т. 40, № 3. С. 290–301.
8. *Gabbay D. M., Maksimova L.* Interpolation and definability: Modal and intuitionistic logics. Oxford: Clarendon Press, 2005.
9. *Максимова Л. Л.* Разрешимость интерполяционного свойства Крейга в стройных J-логиках // Сиб. мат. журн. 2012. Т. 53, № 5. С. 1048–1064.
10. *Максимова Л. Л.* Проективное свойство Бета в стройных логиках // Алгебра и логика. 2013. Т. 52, № 2. С. 172–202.
11. *Максимова Л. Л.* Разрешимость слабого интерполяционного свойства над минимальной логикой // Алгебра и логика. 2011. Т. 50, № 2. С. 152–188.
12. *Максимова Л. Л.* Метод доказательства интерполяции в паранепротиворечивых расширениях минимальной логики // Алгебра и логика. 2007. Т. 46, № 5. С. 627–648.
13. *Максимова Л. Л.* Негативная эквивалентность над минимальной логикой и интерполяция // Сиб. электрон. мат. изв. 2014. Т. 11. С. 1–17.
14. *Odintsov S.* Logic of classic refutability and class of extensions of minimal logic // Log. Log. Philos. 2001. V. 9. P. 91–107.
15. *Максимова Л. Л.* Неявная определимость в расширениях минимальной логики // Логические исследования. 2001. Т. 8. С. 72–81.
16. *Odintsov S.* Constructive negations and paraconsistency. Dordrecht: Springer-Verl., 2008. (Ser. Trends in Logic; V. 26).
17. *Максимова Л. Л., Юн В. Ф.* Узнаваемые логики // Алгебра и логика (в печати).

18. *Segerberg K.* Propositional logics related to Heyting's and Johansson's // Theoria. 1968. V. 34. P. 26–61.

Статья поступила 8 сентября 2014 г.

Максимова Лариса Львовна
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090
lmaksi@math.nsc.ru

Юн Вета Федоровна
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090;
Новосибирский гос. университет,
ул. Пирогова, 2, Новосибирск 630090
veta_v@mail.ru