Сибирский математический журнал
Май—июнь, 2015. Том 56, № 3

УДК 512.542

СУЩЕСТВОВАНИЕ ПРОНОРМАЛЬНЫХ π–ХОЛЛОВЫХ ПОДГРУПП В E_π–ГРУППАХ

Е. П. Вдовин, Д. О. Ревин

Аннотация. Подгруппа H группы G называется *пронормальной*, если для любого $g \in G$ подгруппы H и H^g сопряжены в $\langle H, H^g\rangle$. Доказано, что если конечная группа G обладает π-холловой подгруппой для некоторого множества π простых чисел, то любая ее нормальная подгруппа (в частности, сама G) обладает π-холловой подгруппой, пронормальной в G.

DOI 10.17377/smzh.2015.56.301

Ключевые слова: пронормальная подгруппа, холлова подгруппа, свойство E_π, аргумент Фраттини.

К 75-летию Юрия Леонидовича Ершова

Введение

На протяжении статьи термин «группа» будет использоваться в значении «конечная группа».

В соответствии с определением Ф. Холла подгруппа H группы G называется *пронормальной*, если для любого элемента $g \in G$ подгруппы H и H^g сопряжены в $\langle H, H^g\rangle$.

Для подгрупп свойство пронормальности является более общим, чем нормальность, и играет в теории групп важную роль. В частности, для пронормальных подгрупп справедлив аргумент Фраттини: *если пронормальная подгруппа H группы G содержится в некоторой нормальной подгруппе A, то* $G = AN_G(H)$. Это утверждение часто оказывается полезным при индуктивных рассуждениях. Отметим, что равенство $G = AN_G(H)$ эквивалентно совпадению множеств $H^G = \{H^g \mid g \in G\}$ и $H^A = \{H^a \mid a \in A\}$.

Ввиду теоремы Силова примерами пронормальных подгрупп в конечной группе являются силовские подгруппы, а также силовские подгруппы любой нормальной подгруппы. Цель данной работы — изучить, в какой мере данные свойства силовских подгрупп могут быть перенесены на холловы подгруппы. Напомним соответствующие определения.

На протяжении всей статьи будем считать, что π — некоторое фиксированное множество простых чисел. Через π' обозначим множество всех простых чисел, не лежащих в π, через $\pi(n)$ — множество простых делителей натурального числа n, а для конечной группы G через $\pi(G)$ — множество $\pi(|G|)$. Натуральное число n, для которого $\pi(n) \subseteq \pi$, называется *π-числом*, а группа G, для которой $\pi(G) \subseteq \pi$, называется *π-группой.* Подгруппа H группы G называется *π-холловой*, если $\pi(H) \subseteq \pi$ и $\pi(|G : H|) \subseteq \pi'$. Таким образом, в случае $\pi = \{p\}$ понятие π-холловой подгруппы совпадает с обычным понятием силовской p-подгруппы.

Под холловой подгруппой понимается подгруппа, являющаяся π-холловой для некоторого множества π, т. е. подгруппа, индекс и порядок которой взаимно просты.

В соответствии с [1] будем говорить, что группа G *обладает свойством* E_π (или коротко $G \in E_\pi$), если в G имеется π-холлова подгруппа. Если при этом любые две π-холловы подгруппы сопряжены, то будем говорить, что группа G *обладает свойством* C_π ($G \in C_\pi$). Группу со свойством E_π или C_π будем называть также E_π- или C_π-*группой* соответственно.

Из теоремы Ф. Холла следует, что холловы подгруппы пронормальны в разрешимых группах. Установлено, что π-холловы подгруппы пронормальны

• в конечных простых группах [2];

• в C_π-группах [3].

В [4] изучались свойства групп, в которых π-холловы подгруппы существуют и все пронормальны.

Вместе с тем известно [3], что если множество π простых чисел таково, что $E_\pi \neq C_\pi$, то для любой группы $X \in E_\pi \setminus C_\pi$ и простого числа $p \in \pi'$ группа $X \wr \mathbb{Z}_p$ обладает непронормальными π-холловыми подгруппами, поэтому полностью перенести утверждение о пронормальности силовских подгрупп на холловы подгруппы не удается.

В [5, теорема 1] доказан следующий аналог аргумента Фраттини для π-холловых подгрупп: *если $G \in E_\pi$, то любая нормальная подгруппа A группы G содержит π-холлову подгруппу H такую, что $G = AN_G(H)$.*

В данной работе, опираясь на результаты работ [2, 5–9], докажем следующее утверждение.

Теорема 1. *Пусть $G \in E_\pi$ для некоторого множества π простых чисел и $A \trianglelefteq G$. Тогда существует π-холлова подгруппа группы A, пронормальная в G.*

Следствие 2. *Пусть π — некоторое множество простых чисел. Тогда любая конечная группа, содержащая π-холлову подгруппу, содержит и пронормальную π-холлову подгруппу.*

Заметим, что результат работы [9] о пронормальности π-холловых подгрупп в C_π-группах (или, эквивалентно, о наследуемости свойства C_π надгруппами π-холловых подгрупп) является частным случаем этого утверждения.

Теорема 1 обобщает цитированный выше результат из [5]. Отметим также следующее утверждение, обобщающее полезную лемму 6 (см. ниже) и дающее критерий существования π-холловых подгрупп в непростых группах.

Следствие 3. *Пусть $A \trianglelefteq G$ и π — некоторое множество простых чисел. Тогда $G \in E_\pi$ если и только если $G/A \in E_\pi$ и A содержит π-холлову подгруппу H такую, что $H^A = H^G$.*

1. Предварительные результаты

Используемые в работе обозначения, в основном, стандартны. Как отмечено во введении, через π всюду обозначается некоторое множество простых чисел. Для группы G через $\mathrm{Hall}_\pi(G)$ обозначается множество всех π-холловых подгрупп группы G. Запись $H \operatorname{prn} G$ используется для обозначения того, что H — пронормальная подгруппа группы G.

Лемма 4 [10, гл. IV, (5.11)]. *Пусть A — нормальная подгруппа группы G. Если H — π-холлова подгруппа группы G, то $H \cap A$ является π-холловой подгруппой в A, а фактор-группа HA/A — π-холловой подгруппой в G/A.*

Напомним, что конечная группа называется π-*отделимой*, если она обладает нормальным рядом, все факторы которого являются π- или π'-группами.

Лемма 5 [10, гл. V, теорема 3.7]. *Любая π-отделимая группа обладает свойством C_π.*

Лемма 6 [6, лемма 2.1(e)]. *Пусть A — нормальная подгруппа группы G такая, что G/A является π-группой, U — π-холлова подгруппа группы A. Тогда π-холлова подгруппа H группы G, удовлетворяющая условию $H \cap A = U$, существует, если и только если $U^G = U^A$.*

Лемма 7 [2, теорема 1]. *Холловы подгруппы в простых группах пронормальны.*

Лемма 8 [5, теорема 1]. *Пусть $G \in E_\pi$ и $A \trianglelefteq G$. Тогда существует подгруппа $H \in \mathrm{Hall}_\pi(A)$ такая, что $G = AN_G(H)$. При этом $N_G(H) \in E_\pi$ и $\mathrm{Hall}_\pi(N_G(H)) \subseteq \mathrm{Hall}_\pi(G)$.*

Лемма 9. *Пусть H — подгруппа группы G. Возьмем элементы $g \in G$, $y \in \langle H, H^g \rangle$ и предположим, что подгруппы H^y и H^g сопряжены в $\langle H^y, H^g \rangle$. Тогда подгруппы H и H^g сопряжены в $\langle H, H^g \rangle$.*

Доказательство. Пусть $z \in \langle H^y, H^g \rangle$ и $H^{yz} = H^g$. Тогда $z \in \langle H, H^g \rangle$, так как $\langle H^y, H^g \rangle \leq \langle H, H^g \rangle$. Поэтому $x = yz \in \langle H, H^g \rangle$ и $H^x = H^g$. $\square$

Утверждения следующих двух лемм очевидны.

Лемма 10. *Пусть $^{-} : G \to G_1$ — гомоморфизм групп, $H \leq G$. Тогда если $H \operatorname{prn} G$, то $\overline{H} \operatorname{prn} \overline{G}$.*

Лемма 11. *Пусть G — группа. Тогда если $H \operatorname{prn} G$, то $H \operatorname{prn} K$ для любой подгруппы K группы G такой, что $H \leq K$.*

Лемма 12 [2, лемма 7]. *Пусть G — конечная группа и $G_1, \dots, G_n$ — нормальные подгруппы группы G такие, что $[G_i, G_j] = 1$ при $i \neq j$ и $G = G_1 \cdot \ldots \cdot G_n$. Пусть для любого $i = 1, \dots, n$ в группе G_i выбрана пронормальная подгруппа H_i и $H = \langle H_1, \dots, H_n \rangle$. Тогда $H \operatorname{prn} G$.*

Лемма 13 [7, следствие 9]. *Пусть $G \in E_\pi$ и $A \trianglelefteq G$. Тогда для любой $K/A \in \mathrm{Hall}_\pi(G/A)$ найдется $H \in \mathrm{Hall}_\pi(G)$ такая, что $K = HA$.*

Лемма 14. *Пусть $H \leq G$ и $A \trianglelefteq G$. Следующие утверждения эквивалентны.*

(1) *$H \operatorname{prn} G$.*

(2) *$HA \operatorname{prn} G$ и $H \operatorname{prn} N_G(HA)$.*

Доказательство. Пусть выполнено утверждение (1). Тогда $HA \operatorname{prn} G$ по лемме 10 и $H \operatorname{prn} N_G(HA)$ по лемме 11. Обратно, пусть выполнено утверждение (2). Пусть $g \in G$. Требуется показать, что существует элемент $x \in \langle H, H^g \rangle$ такой, что $H^x = H^g$. Поскольку $HA/A \operatorname{prn} G/A$, найдется $y \in \langle H, H^g \rangle$, для которого $H^y A = H^g A$. В соответствии с леммой 9 можно заменить H на H^y и считать, что $HA = H^y A = H^g A$, т. е. $g \in N_G(HA)$. Так как $H \operatorname{prn} N_G(HA)$, существование искомого x очевидно. $\square$

Лемма 15. *Пусть A — π-отделимая нормальная подгруппа группы G и $H \in \mathrm{Hall}_\pi(A)$. Тогда $H \operatorname{prn} G$.*

Доказательство. Лемма вытекает из того, что для любого $g \in G$ подгруппа $\langle H, H^g \rangle \leq A$ π-отделима, при этом H и H^g — ее π-холловы подгруппы и они сопряжены в $\langle H, H^g \rangle$ по лемме 5. $\square$

Лемма 16. *Пусть B — нормальная подгруппа конечной группы G. Тогда для любой нормальной подгруппы A группы G, содержащей B, и для любой $H \in \mathrm{Hall}_\pi(A)$ из условий*

(1) $HB/B \operatorname{prn} G/B$,

(2) $(H \cap B) \operatorname{prn} B$,

(3) $(H \cap B)^G = (H \cap B)^B$

следует $H \operatorname{prn} G$.

Доказательство. Так как $HB/B \operatorname{prn} G/B$, имеем $HB \operatorname{prn} G$. По лемме 14 достаточно установить, что $H \operatorname{prn} N_G(HB)$. Поэтому, не уменьшая общности рассуждений, можем считать, что $G = N_G(HB)$, т. е. $HB \trianglelefteq G$, и $A = N_A(HB)$. Заметим, что в этом случае группа A/B π-отделима, поскольку факторы A/HB и HB/B нормального ряда $A \trianglerighteq HB \trianglerighteq B$ являются соответственно π'- и π-группами.

Возьмем произвольный элемент $g \in G$. Поскольку $(H \cap B)^G = (H \cap B)^B$, найдется элемент $b \in B$ такой, что $H^g \cap B = H^b \cap B$. Далее, так как $(H \cap B) \operatorname{prn} B$, найдется элемент

$$y \in \langle H \cap B, H^b \cap B \rangle = \langle H \cap B, H^g \cap B \rangle \leq \langle H, H^g \rangle$$

такой, что $H^y \cap B = H^b \cap B$. По лемме 9 из сопряженности H^y и H^b в $\langle H^y, H^b \rangle$ следует сопряженность H и H^b в $\langle H, H^b \rangle$. Тем самым можно заменить H на H^y и считать, что

$$(H \cap B)^g = (H \cap B)^b = (H \cap B)^y = H \cap B,$$

т. е. $g \in N_G(H \cap B)$. Ясно также, что $H \leq N_A(H \cap B)$.

Далее, так как $(H \cap B)^G = (H \cap B)^B$, применяя аргумент Фраттини, получаем $G = BN_G(H \cap B)$ и $A = BN_A(H \cap B)$. Поэтому группа

$$N_A(H \cap B)/N_B(H \cap B) \cong BN_A(H \cap B)/B = A/B$$

π-отделима. Группа $N_B(H \cap B)$ также π-отделима, поскольку обладает нормальной π-холловой подгруппой $H \cap B$. Следовательно, π-отделимой будет и группа $N_A(H \cap B)$. Но тогда из того, что $H \in \mathrm{Hall}_\pi(N_A(H \cap B))$, по лемме 15, примененной к группе $N_G(H \cap B)$ и ее нормальной π-отделимой подгруппе $N_A(H \cap B)$, имеем $H \operatorname{prn} N_G(H \cap B)$. Поскольку $g \in N_G(H \cap B)$, для некоторого элемента $x \in \langle H, H^g \rangle$ выполнено равенство $H^x = H^g$. Тем самым установлено, что $H \operatorname{prn} G$. $\square$

2. Доказательство основных результатов

Доказательство теоремы 1. Пусть $G \in E_\pi$ и $A \trianglelefteq G$. Требуется показать, что A обладает π-холловой подгруппой H такой, что $H \operatorname{prn} G$. Доказательство будем проводить индукцией по $|G|$.

Если $|G| = 1$, доказывать нечего.

Пусть $|G| > 1$. Выберем в G минимальную нормальную подгруппу B, содержащуюся в A (отметим, что при этом не предполагается, что $B \neq A$). Поскольку ввиду леммы 4 $G/B \in E_\pi$, группа A/B по предположению индукции обладает π-холловой подгруппой K/B такой, что $K/B \operatorname{prn} G/B$. Из леммы 8 следует, что B содержит π-холлову подгруппу V такую, что $G = BN_G(V)$ или, что то же самое, $V^G = V^B$. Это, в частности, означает, что $V^K = V^B$ и по лемме 6 в подгруппе K найдется $H \in \mathrm{Hall}_\pi(K)$ такая, что $V = H \cap B$. Заметим, что $|A : H| = |A : K||K : H|$ — π'-число, поэтому $H \in \mathrm{Hall}_\pi(A)$. Покажем, что $H \operatorname{prn} G$, и тем самым докажем теорему. Воспользуемся леммой 16. Ввиду выбора K имеем $HB/B = K/B \operatorname{prn} G/B$, что эквивалентно $HB = K \operatorname{prn} G$, и, таким образом, выполнено условие (1) в лемме 16. Далее, B является прямым произведением простых групп $B = S_1 \times \dots \times S_n$, поскольку B — минимальная нормальная подгруппа группы G, и $V = \langle V \cap S_i \mid i = 1, \dots, n\rangle$.

Так как $V \cap S_i \in \mathrm{Hall}_\pi(S_i)$ для любого $i = 1, \dots, n$ по лемме 4 и $(V \cap S_i) \operatorname{prn} S_i$ по лемме 7, применив лемму 12, получим $H \cap B = V \operatorname{prn} B$, и, таким образом, справедливо утверждение (2) в лемме 16. Наконец, $H \cap B = V$, и ввиду выбора подгруппы V в B имеем $(H \cap B)^G = (H \cap B)^B$. Тем самым выполнено условие (3) в лемме 16. Таким образом, $H \operatorname{prn} G$ по лемме 16. $\square$

Доказательство следствия 2. Утверждение следствия непосредственно вытекает из теоремы 1 в случае, когда $G = A$. $\square$

Доказательство следствия 3. Пусть $A \trianglelefteq G$. Предположим, что $G/A \in E_\pi$ и A содержит π-холлову подгруппу H такую, что $H^A = H^G$. Покажем, что $G \in E_\pi$. Выберем $X/A \in \mathrm{Hall}_\pi(G/A)$. Поскольку $A \leq X \leq G$, имеем

$$H^A \subseteq H^X \subseteq H^G,$$

откуда $H^A \subseteq H^X$. Учитывая лемму 6 и тот факт, что X/A — π-группа, получаем $X \in E_\pi$. Так как $|G : X| = |G/A : X/A|$ — π'-число, имеем

$$\varnothing \neq \mathrm{Hall}_\pi(X) \subseteq \mathrm{Hall}_\pi(G) \quad \text{и} \quad G \in E_\pi.$$

Обратно, пусть $G \in E_\pi$. Тогда $G/A \in E_\pi$ по лемме 4. В силу теоремы 1 найдется подгруппа $H \in \mathrm{Hall}_\pi(A)$ такая, что $H \operatorname{prn} G$. В частности, для любого $g \in G$ существует элемент $a \in \langle H, H^g\rangle \leq A$ такой, что $H^g = H^a$. Тем самым равенство $H^A = H^G$ доказано. $\square$

3. Замечания

Замечание 1. Теорема 1 утверждает существование пронормальной π-холловой подгруппы в любой нормальной подгруппе A группы $G \in E_\pi$. Требование $G \in E_\pi$ в условии теоремы нельзя заменить требованием $A \in E_\pi$, более слабым ввиду леммы 4. В самом деле, пусть $\pi = \{2, 3\}$ и $A = \mathrm{GL}_3(2) = \mathrm{SL}_3(2)$. Тогда (см. [11, теорема 1.2]) группа A обладает ровно двумя классами сопряженных π-холловых подгрупп с представителями

$$H_1 = \begin{pmatrix} \boxed{\mathrm{GL}_2(2)} & * \\ 0 & \boxed{1} \end{pmatrix}, \quad H_2 = \begin{pmatrix} \boxed{1} & * \\ 0 & \boxed{\mathrm{GL}_2(2)} \end{pmatrix}$$

соответственно. Класс H_1^A состоит из стабилизаторов прямых в естественном линейном представлении группы G, а H_2^A — из стабилизаторов плоскостей. Отображение $\iota : x \in A \mapsto (x^t)^{-1}$ является автоморфизмом порядка 2 группы A (здесь x^t — матрица, транспонированная к матрице x). Этот автоморфизм переставляет классы H_1^A и H_2^A. Рассмотрим естественное расщепляемое расширение $G = A : \langle\iota\rangle$. Подгруппы H_1 и H_2 сопряжены в G. Вместе с тем H_1

и H_2 не сопряжены в подгруппе A, содержащей H_1 и H_2, а следовательно, не пронормальны в G. Остается заметить, что в данном примере $G \notin E_\pi$, как следует из леммы 6.

Замечание 2. В [3, 9] определено понятие сильно пронормальной подгруппы. Напомним, что подгруппа H группы G называется *сильно пронормальной*, если для любых $g \in G$ и $K \leq H$ найдется элемент $x \in \langle H, K^g \rangle$ такой, что $K^{gx} \leq H$. В [3] сформулирована гипотеза о том, что любая пронормальная холлова подгруппа конечной группы будет сильно пронормальной. В свете теоремы 1 и ее следствия представляется естественной следующее ослабление данной гипотезы: верно ли, что любая E_π-группа обладает сильно пронормальной π-холловой подгруппой?

Замечание 3. Важную роль в доказательстве теоремы 1 играет лемма 16, из которой, в частности, вытекает следующий признак пронормальности холловых подгрупп. Пусть $A \trianglelefteq G$ для некоторой группы G. Холлова подгруппа H группы G пронормальна, если

(1) $HA/A \operatorname{prn} G/A$;

(2) $(H \cap A) \operatorname{prn} A$;

(3) $(H \cap A)^G = (H \cap A)^A$.

Авторам неизвестно, справедливо ли обратное утверждение. Более точно, верно ли, что из условия $H \operatorname{prn} G$ для холловой подгруппы H группы G следует справедливость утверждений (2) и (3)? Утверждение (1) следует из пронормальности подгруппы H ввиду леммы 10.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Hall P.* Theorems like Sylow's // Proc. London Math. Soc. 1956. V. 6, N 22. P. 286–304.
2. *Вдовин Е. П., Ревин Д. О.* Пронормальность холловых подгрупп в конечных простых группах // Сиб. мат. журн. 2012. Т. 53, № 3. С. 527–542.
3. *Вдовин Е. П., Ревин Д. О.* О пронормальности холловых подгрупп // Сиб. мат. журн. 2013. Т. 54, № 1. С. 35–43.
4. *Го В., Ревин Д. О.* О классе групп с пронормальными π-холловыми подгруппами // Сиб. мат. журн. 2014. Т. 55, № 3. С. 509–524.
5. *Revin D. O., Vdovin E. P.* Frattini argument for Hall subgroups // J. Algebra. 2014. V. 414. P. 95–104.
6. *Revin D. O., Vdovin E. P.* On the number of classes of conjugate Hall subgroups in finite simple groups // J. Algebra. 2010. V. 324, N 12. P. 3614–3652.
7. *Revin D. O., Vdovin E. P.* Existence criterion for Hall subgroups of finite groups // J. Group Theory. 2011. V. 14, N 1. P. 93–101.
8. *Вдовин Е. П., Ревин Д. О.* Критерий сопряженности холловых подгрупп в конечных группах // Сиб. мат. журн. 2010. Т. 51, № 3. С. 506–516.
9. *Вдовин Е. П., Ревин Д. О.* Теоремы силовского типа // Успехи мат. наук. 2011. Т. 66, № 5. С. 3–46.
10. *Suzuki M.* Group theory. II. New York: Springer-Verl., 1986.
11. *Ревин Д. О.* Холловы π-подгруппы конечных групп Шевалле, характеристика которых принадлежит π // Мат. тр. 1999. Т. 2, № 1. С. 157–205.

Статья поступила 15 июля 2014 г.

Вдовин Евгений Петрович, Ревин Данила Олегович
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090;
Новосибирский гос. университет,
ул. Пирогова, 2, Новосибирск 630090
vdovin@math.nsc.ru, revin@math.nsc.ru