Сибирский математический журнал
Июль—август, 2013. Том 54, № 4

УДК 512.554.7

СВОЙСТВО НАСЛЕДСТВЕННОСТИ ЛОКАЛЬНО НИЛЬПОТЕНТНОГО РАДИКАЛА В ЙОРДАНОВЫХ АЛГЕБРАХ С ИДЕМПОТЕНТОМ

В. И. Грибков

Аннотация. Доказывается свойство наследственности локально нильпотентного радикала в йордановых алгебрах с идемпотентом: пирсовские компоненты разложения радикала суть пересечения соответствующих компонент алгебры с радикалом.

Ключевые слова: йорданова алгебра, локально нильпотентный радикал, свойство наследственности, идемпотент.

Йорданова алгебра J над ассоциативно-коммутативным кольцом $\Phi \ni \frac{1}{2}$ с идемпотентом e раскладывается в прямую сумму подпространств, называемых *пирсовскими компонентами* (см. [1]):

$$J = J_1 \oplus J_{1/2} \oplus J_0, \tag{1}$$

где J_1 и J_0 — подалгебры и квадратичные идеалы алгебры J.

Для квазирегулярного радикала $\mathfrak{J}(J)$ алгебры J известна следующая теорема Маккримона (см. [1, теорема 15.1.1.]). *Если йорданова алгебра J содержит идемпотент e, то справедливы равенства*

$$\mathfrak{J}(J_1) = J_1 \cap \mathfrak{J}(J) = (\mathfrak{J}(J))_1. \tag{2}$$

Кроме того, известны аналогичные результаты для локально нильпотентного радикала: Андерсона [2] для класса ассоциативных алгебр и Рича [3] для класса альтернативных алгебр.

В 1983 г. И. П. Шестаков поставил вопрос: верны ли равенства (2) для локально нильпотентного радикала $\mathfrak{L}(J)$ в йордановой алгебре J? Ответ на этот вопрос был получен в 1984 г. и дается в настоящей статье.

Верна следующая основная

Теорема 1. *Для любого идемпотента e йордановой алгебры J справедливы равенства*

$$\mathfrak{L}(J_1) = J_1 \cap \mathfrak{L}(J) = (\mathfrak{L}(J))_1. \tag{3}$$

§ 1. Обозначения и базовые соотношения

Введем основные обозначения и напомним базовые соотношения и результаты.

A. Алгебра называется *йордановой*, если в ней выполняются тождества

$$xy = yx, \quad (x^2y)x = x^2(yx).$$

Пусть A — ассоциативная Φ-алгебра. На аддитивном Φ-модуле алгебры A определим новую операцию $\odot$, связанную с операциями алгебры формулой $a \odot b = \frac{1}{2}(ab + ba)$. После замены старого умножения новым получается новая алгебра, которая обозначается через $A^{(+)}$. Легко проверить, что она йорданова. Если J — подмодуль алгебры A, замкнутый относительно операции $\odot$, то J вместе с этой операцией является подалгеброй в $A^{(+)}$ и, следовательно, йордановой алгеброй. Такая йорданова алгебра называется *специальной*. Подалгебра A_0 алгебры A, порожденная множеством J, называется *ассоциативной обертывающей алгеброй* для J и обозначается через J^*. Неспециальные йордановы алгебры называются *исключительными*.

Пусть J — произвольная Φ-алгебра. Для всякого элемента $a \in J$ отображения J в себя R_a и L_a, переводящие элемент x в xa и ax, называются *операторами правого и левого умножения на элемент* a соответственно. Например (см. [1]), в йордановых алгебрах верно следующее операторное соотношение:

$$R_y R_z R_t + R_t R_z R_y + R_{(yt)z} = R_t R_{tz} + R_t R_{yz} + R_z R_{yt}. \tag{4}$$

Наряду с обычным умножением в йордановой алгебре можно определить тройное йорданово произведение:

$$\{xyz\} = (xy)z + (zy)x - (xz)y. \tag{5}$$

Если йорданова алгебра J специальная и вложена в алгебру $A^{(+)}$ для некоторой ассоциативной алгебры A, то для любых $x, y, z \in J$ верно тождество

$$\{xyz\} = \frac{1}{2}(xyz + zyx),$$

где через xy обозначено ассоциативное произведение элементов x и y.

Для любых элементов $x, y \in J$ под $U_{x,y}$ будем понимать отображение $J \to J\colon z \to \{xzy\}$. Из (5) следует, что

$$U_{x,y} = R_x R_y + R_y R_x - R_{xy}. \tag{6}$$

Через $V_{x,y}$ будем обозначать отображение $J \to J\colon z \to \{zxy\}$, т. е.

$$V_{x,y} = R_x R_y - R_y R_x + R_{xy}. \tag{7}$$

Отображение $U_{x,x}$ обозначим через U_x.

B. Пусть J содержит идемпотент e. Присоединим, если необходимо, к алгебре J единицу 1 ($J^{\#} = 1 \cdot \Phi + J$). Тогда, как уже отмечалось во введении, алгебра J раскладывается в прямую сумму подпространств вида (1), где J_1 и J_0 — подалгебры и квадратичные идеалы. При этом данные компоненты имеют вид

$$J_1 = JU_e, \quad J_{1/2} = JU_{e,1-e}, \quad J_0 = JU_{1-e}$$

и в силу теоремы Алберта [1, 15.3.4] обладают следующими свойствами:

$$J_i^2 \subseteq J_i, \quad J_1 J_0 = (0), \quad J_i J_{1/2} \subseteq J_{1/2}, \quad J_{1/2}^2 \subseteq J_0 + J_1, \quad \text{где } i = 0, 1. \tag{8}$$

Последние представляют своего рода таблицу умножения компонент, которая нам понадобится в дальнейшем.

C. Запишем первое из равенств (3) в виде

$$\mathfrak{L}(J_i) = \mathfrak{L}(J) \cap J_i, \quad \text{где } i = 0, 1. \tag{9}$$

При доказательстве (9) можно считать, что J содержит 1. Покажем это.

Пусть $1 \notin J$. Присоединив ее, имеем для $J^\# = 1 \cdot \Phi + J$ разложение $J^\# = J_1 + J_{1/2} + J_0^\#$. Так как $J \lhd J^\#$, в силу свойства наследственности локально нильпотентного радикала в классе йордановых алгебр (см. [1]) имеем $\mathfrak{L}(J) \subset \mathfrak{L}(J^\#)$.

Таким образом, если (9) верно для $J^\#$, то для $\mathfrak{L}(J_1)$ получим

$$\mathfrak{L}(J_1) = J_1 \cap \mathfrak{L}(J^\#) = (J_1 \cap J) \cap \mathfrak{L}(J^\#) = J_1 \cap (J \cap \mathfrak{L}(J^\#)) = J_1 \cap \mathfrak{L}(J).$$

Для $\mathfrak{L}(J_0)$ выкладка немного длиннее:

$$\begin{aligned}\mathfrak{L}(J_0) &\overset{\text{т. к. } J_0 \lhd J_0^\#}{=} J_0 \cap \mathfrak{L}(J_0^\#) = J_0 \cap (J_0^\# \cap \mathfrak{L}(J^\#)) = (J_0 \cap J_0^\#) \cap \mathfrak{L}(J^\#) \\ &= J_0 \cap \mathfrak{L}(J^\#) = (J_0 \cap J) \cap \mathfrak{L}(J^\#) = J_0 \cap (J \cap \mathfrak{L}(J^\#)) = J_0 \cap \mathfrak{L}(J).\end{aligned}$$

Второе равенство из (3) следует из того, что для любого идеала $I \lhd J$ верно равенство $I \cap JU_e = IU_e$.

Мы показали, что доказывать истинность равенств (9) нужно для алгебры $J \ni 1$.

D. Покажем, что достаточно иметь дело с $\mathfrak{L}$-полупростой первичной йордановой алгеброй J, т. е. можно считать, что верна следующая импликация:

$$[\langle \mathfrak{L}(J) = 0 \rangle \wedge \langle \forall I, K \lhd J \colon IK = (0) \rangle] \to \langle I = (0) \vee K = (0) \rangle.$$

Предположим, что свойство $\mathfrak{L}$-полупростоты наследуется от алгебры J ее подалгебрам J_1 и J_0. Тогда для алгебры $\overline{J} = J/\mathfrak{L}(J)$ справедливо равенство $\mathfrak{L}(\overline{J}) = 0$ и по предположению имеют место равенства $\mathfrak{L}(\overline{J_i}) = 0$. Ввиду следующих равенств и изоморфизмов:

$$\bar{J}_i = (J_i + \mathfrak{L}(J))/\mathfrak{L}(J) \simeq J_i/(J_i \cap \mathfrak{L}(J)), \quad i = 1, 0,$$

а также по определению радикала (см. [1, с. 184]) справедливы следующие включения:

$$\mathfrak{L}(J_i) \subseteq J_i \cap \mathfrak{L}(J), \quad i = 1, 0.$$

Так как обратное включение верно всегда, мы доказали первую часть замечания.

Из [1, теорема 8.2.8.] следует, что $\mathfrak{L}$-полупростая алгебра J аппроксимируется первичными $\mathfrak{L}$-полупростыми алгебрами. Таким образом, имеем семейство идеалов $\{I_\alpha\}_{\alpha \in K}$ такое, что

$$\forall \alpha \in K \quad I_\alpha \lhd J, \quad \bigcap_{\alpha \in K} I_\alpha = 0,$$

причем для каждого такого идеала фактор-алгебра $J_\alpha = J/I_\alpha$ первична и $\mathfrak{L}$-полупроста. Ясно, что образ идемпотента при гомоморфизме есть идемпотент, поэтому на J_α, $\alpha \in K$, переносится структура разложения (1). Если докажем, что $\mathfrak{L}((J_\alpha)_i) = 0$ для любого $\alpha \in K$, то получим, что и $\mathfrak{L}(J_i) = 0$, где $i = 1, 0$.

Понятно, что достаточно рассмотреть те J_α, в которых образ e_α идемпотента e не равен 1 и 0. Если $e_\alpha = 1$, то $(J_\alpha)_1 = J_\alpha$, а если $e_\alpha = 0$, то $(J_\alpha)_0 = J_\alpha$. Очевидно, что в этих случаях доказывать нечего.

Сформулируем теорему, которая и будет доказываться.

Теорема 2. *Пусть J является $\mathfrak{L}$-полупростой первичной йордановой алгеброй над ассоциативно-коммутативным кольцом $\Phi \ni \frac{1}{2}$, содержащей единицу, и идемпотент e, отличный от 1, 0. Тогда $\mathfrak{L}(J_i) = 0$ для $i = 1, 0$.*

Так как $\mathfrak{L}$-полупростота влечет невырожденность алгебры, ввиду [4, теорема 3] разобьем доказательство теоремы 2 на четыре случая соответственно случаям (a)–(d) следующего утверждения.

Теорема (Е. И. Зельманов [4, теорема 3]). *Первичные невырожденные йордановы алгебры могут быть следующих типов:*

(a) *J — кольцо Алберта ($\mathscr{Z}(J) \neq 0$ и $\mathscr{Z}(J)^{-1}J$ — 27-мерная исключительная простая йорданова алгебра над полем $\mathscr{Z}(J)^{-1}\mathscr{Z}(J)$);*

(b) *J — центральный порядок в йордановой алгебре симметрической невырожденной билинейной формы ($\mathscr{Z}(J) \neq 0$ и $\mathscr{Z}(J)^{-1}J$ — алгебра симметрической невырожденной билинейной формы);*

(c) *J — специальная, содержащая ненулевой идеал $I \cong \overline{A}^{(+)}$, где $\overline{A}$ — некоторая первичная ассоциативная Φ-алгебра;*

(d) *J — специальная, содержащая ненулевой идеал $T \cong H(A, \wedge)$, где A — некоторая первичная ассоциативная Φ-алгебра с инволюцией $\wedge \colon A \to A$.*

Заметим, что во всех случаях $J_{1/2} \neq 0$. Поскольку J невырожденная, $J_1, J_0 \neq 0$, но в силу (8) $J_1 J_0 = 0$, а если $J_{1/2} = 0$, то ввиду того, что J_1, $J_0 \triangleleft J$, и первичности J либо $J_1 = 0$, либо $J_0 = 0$.

§ 2. Инвариантные идеалы

Прежде чем перейти к доказательству теоремы 2, приведем соотношения, связывающие идеалы компонент J_1, J_0 с идеалами алгебры J. Некоторые из них присутствуют в [5], где рассматриваются квадратичные йордановы алгебры без предположения $\Phi \ni \frac{1}{2}$. В нашем случае $\frac{1}{2} \in \Phi$.

А. Идеалы подалгебр J_1, J_0 будем называть просто *идеалами*, а идеалы алгебры J — *глобальными идеалами.* Пусть $I \triangleleft J$. По п. B из § 1 для I имеем $I = I_1 \oplus I_{1/2} \oplus I_0$, где

$$I_1 = IU_e = I \cap J_1, \quad I_0 = IU_{1-e} = I \cap J_0, \quad I_{1/2} = IU_{1/2} = I \cap J_{1/2}.$$

Отсюда видно, что $I_i \triangleleft J_i$, $i = 1, 0$.

В [5] приведены следующие соотношения для элементов алгебры из разных компонент:

$$((a_i x_{1/2}) y_{1/2})_j = a_i U_{x_{1/2}, y_{1/2}}, \tag{10}$$

$$((a_i x_{1/2}) y_{1/2})_i = a_i V_{x_{1/2}, y_{1/2}}, \tag{11}$$

где $a_i \in J_i$, $x_{1/2}, y_{1/2} \in J_{1/2}$, $i = 1, 0$, $j = 1 - i$. Из (10) и (11) следуют включения

$$I_i U_{J_{1/2}} \subset I_j, \tag{12}$$

$$I_i V_{J_{1/2}, J_{1/2}} \subset I_i, \tag{13}$$

где $i = 1, 0$, $j = 1 - i$. Отсюда

$$I_i U_{J_{1/2}} U_{J_{1/2}} \subset I_i. \tag{14}$$

B. Теперь зададимся вопросом: как выглядит глобальный идеал, порожденный идеалом компоненты J_i, удовлетворяющим (14) и (13)?

Пусть $I_i \triangleleft J_i$ и $I_i V_{J_{1/2},J_{1/2}} \subset I_i$ (в [5] замечено, что в случае, когда $\frac{1}{2} \in \Phi$, из (13) следует (14)). Тогда по [6]

$$I = \mathrm{id}_J(I_i) = I_i \oplus I_i J_{1/2} \oplus I_i U_{J_{1/2}}, \tag{15}$$

где $i = 1, 0$ и $I_i U_{J_{1/2}} \triangleleft J_j$, $I_i U_{J_{1/2}} V_{J_{1/2},J_{1/2}}$.

Определение 1. Идеалы, удовлетворяющие отношению (13), будем называть, как и в [5], *инвариантными* и обозначать через $I_i \triangleleft_{\mathrm{inv}} J_i$.

Обобщая последние рассуждения, можно прийти к следующему выводу: $I_i \triangleleft_{\mathrm{inv}} J_i \Leftrightarrow I_i$ — проекция глобального идеала.

Определение 2. Идеал $I_i \triangleleft J_i$ такой, что $\mathscr{M}(J_i/I_i) = 0$, называется *строго полупервичным.*

В [5] доказано, что *строго полупервичные* идеалы инвариантны. Так как по теореме Зельманова [6] $\mathfrak{L}(J)$ является строго полупервичным идеалом, имеем $\mathfrak{L}(J_i) \triangleleft_{\mathrm{inv}} J_i$, т. е.

$$\mathfrak{L}(J_i) V_{J_{1/2},J_{1/2}} \subset \mathfrak{L}(J_i), \quad \mathrm{id}_J(\mathfrak{L}(J_i)) = \mathfrak{L}(J_i) \oplus \mathfrak{L}(J_i) J_{1/2} \oplus \mathfrak{L}(J_i) U_{J_{1/2}}. \tag{16}$$

Замечание 1. Если J — простая йорданова алгебра с учетом того, что $e \notin \mathfrak{L}(J_1)$, $1 - e \notin \mathfrak{L}(J_0)$, имеем $\mathrm{id}_J(\mathfrak{L}(J_i)) \neq J$, а значит, $= 0$. Отсюда следует справедливость теоремы 2 для простых йордановых алгебр.

§ 3. Кольцо Алберта и алгебра билинейной формы

Докажем теорему 2 для случаев (a) и (b).

A. Изучим сначала, как переносится пирсовское разложение и локальная нильпотентность с алгебры J на алгебру $\mathscr{Z}(J)^{-1}J$.

Пп. (a) и (b) объединяет тот факт, что центр алгебры $\mathscr{Z}(J) \neq 0$ состоит из регулярных элементов. Пусть $F = \mathscr{Z}(J)^{-1}J$ — алгебра над полем $P = \mathscr{Z}(J)^{-1}\mathscr{Z}(J)$. Алгебра J естественным образом вкладывается в алгебру F: $\wedge\colon y \to \hat{y} = \frac{y}{1}$; если $1 \notin J$, то $y \to \frac{yz}{z}$, где $z \in \mathscr{Z}(J)$. Таким образом $e \to \frac{e}{1} = \hat{e} \in F$ — идемпотент, не равный нулю и единице. Ясно, что $e \notin \mathscr{Z}(J)$, так как

$$e\bigl(x_{1/2}^2\bigr) = e(x_1 + x_0) = x_1, \quad (ex_{1/2})x_{1/2} = \frac{1}{2}x_{1/2}^2 = \frac{1}{2}(x_1 + x_0).$$

Поскольку существует $x_{1/2}$ такой, что $x_{1/2}^2 \neq 0$, ввиду полупервичности алгебры J ($\mathfrak{L}$-полупростые алгебры полупервичны, см. [1]), т. е. $J_{1/2}^2 \neq 0$, имеем $(e, x_{1/2}, x_{1/2}) \neq 0$. Это еще раз показывает, что $\hat{e} \neq 1$ в алгебре F. Таким образом, $F = F_1 \oplus F_{1/2} \oplus F_0$ — пирсовское разложение, соответствующее идемпотенту $\hat{e}$, где для всех $f \in F$ верны равенства $fU_{\hat{e}} = \frac{y}{z}U_{\hat{e}} = \frac{y_1}{z}$, а также

$$F_1 = \mathscr{Z}(J)^{-1}J_1, \quad F_0 = \mathscr{Z}(J)^{-1}J_0, \quad F_{1/2} = \mathscr{Z}(J)^{-1}J_{1/2}.$$

Лемма 1. $\mathfrak{L}(F_i) = \mathscr{Z}(J)^{-1}\mathfrak{L}(J_i)$, $i = 1, 0$, $\mathfrak{L}(F) = \mathscr{Z}(J)^{-1}\mathfrak{L}(J)$.

Доказательство. Пусть $l \in \mathfrak{L}(J_i)$, $z \in \mathscr{Z}(J)$, $I = \mathrm{id}_{F_1}\bigl(\frac{l}{z}\bigr)$, $x_1, \dots, x_n$ — конечное множество элементов из I. Можно считать, что $x_k = \frac{l}{z}R_{f_1^k} \cdots R_{f_{m_k}^k}$, где $f_j \in F_1$. Также считая, что $f_j^k = \frac{y_j^k}{z_j^k}$, $y_j^k \in J_i$, $z_j^k \in \mathscr{Z}(J)$, имеем

$$x_k = \frac{R_{y_1^k} \dots R_{y_{m_k}^k}}{z \prod_{j=1}^{m_k} z_j^i} \rightleftharpoons \frac{v_k}{z_k}.$$

Пусть $\mathscr{V} = \mathrm{alg}(v_1, \ldots, v_n)$. Видно, что $\mathscr{V} \subset \mathfrak{L}(J_i)$, откуда следует, что $\mathscr{V}^s = 0$ для некоторого $s \in \mathbf{N}$. Понятно, что алгебра $\mathscr{X} = \mathrm{alg}(x_1, \ldots, x_n)$ также нильпотентна, $\mathscr{X}^s = 0$. Таким образом, для первых двух равенств доказаны включения справа налево. В обратную сторону доказывается аналогично, а также видна истинность третьего равенства. Лемма доказана. $\square$

B. В случаях (a) и (b) алгебра F простая, и по лемме 1 $\mathfrak{L}(F) = 0$. Отсюда по пп. B и C из § 2 $\mathfrak{L}(F_i) = 0$. Теорема 2 для (a) и (b) доказана.

§ 4. Ассоциативная обертывающая компоненты J_i

Выясним связь между пирсовскими разложениями специальной йордановой алгебры J и ее ассоциативной обертывающей $J^* = A$, и отличие J_1^* от A_{11}, а также докажем теорему 2 для случая (c), когда $J \simeq A^{(+)}$.

A. Пусть $J \subset A^{(+)}$, где $A = J^*$. По-прежнему $\mathfrak{L}(J) = 0$, поэтому можно считать, что $\mathfrak{L}(A) = 0$. Так как по теореме Скосырского (см. [1, теорема 4.5]) $J \cap \mathfrak{L}(A) = \mathfrak{L}(J)$, ясно, что если $\mathfrak{L}(A) \neq 0$, то $A/\mathfrak{L}(A)$ $\mathscr{L}$-полупростая и обертывающая для J,

$$[J \sim (J + \mathfrak{L}(A))/\mathfrak{L}(A) \simeq J/(J \cap \mathfrak{L}(A)) \simeq J].$$

Идемпотент e алгебры J будет также идемпотентом в алгебре A:

$$ee = \frac{1}{2}(ee + ee) = e \odot e = e.$$

Алгебра A имеет пирсовское разложение:

$$A = A_{11} \oplus A_{00} \oplus A_{01} \oplus A_{10}, \tag{17}$$

где $A_{11} = eAe$, $A_{00} = (1-e)A(1-e)$, $A_{01} = (1-e)Ae$, $A_{10} = eA(1-e)$.

Далее,

$$\begin{gathered} J_1 = eJe \subset eJ^*e = A_{11}, \quad J_0 = (1-e)J(1-e) \subset A_{00}, \\ J_{1/2} = (1-e)Je + eJ(1-e) \subset A_{01} + A_{10}. \end{gathered} \tag{18}$$

В [2] показано, что $\mathfrak{L}(A_{ii}) = A_{ii} \cap \mathscr{L}(A)$, где $i = 1, 0$. Если докажем, что $\mathfrak{L}(J_i^*) \subset \mathfrak{L}(A_{ii})$, то отсюда получим, что

$$[\mathfrak{L}(A) = 0] \to [\mathfrak{L}(A_{ii}) = 0] \to [\mathfrak{L}(J_i^*) = 0] \to [\mathfrak{L}(J_i) = 0].$$

Для этого нужно выяснить, насколько A_{ii} отличается от J_i^*. Меру этого отличия показывает

Лемма 2. *Верно равенство $A_{ii} = J_i^*(1 + \mathfrak{L}_i)$, где $i = 1, 0$, и*

$$\mathfrak{L}_i = \mathrm{alg}(e_i x_{1/2} y_{1/2} e_i \colon x_{1/2}, y_{1/2} \in J_{1/2}), \quad e_1 = e,\ e_0 = 1 - e.$$

Доказательство. Пусть $i = 1$ и $a \in A_{11}$ такой, что $a = ey^1y^2 \ldots y^n e$. Покажем, что такой элемент a имеется в $J_1^*(1 + \mathfrak{L}_1)$.

Сначала установим, что $ex_1x_2 \ldots x_n e = 0$, если все x_i принадлежат $J_{1/2}$ и n нечетно. Для $n = 1$ это ясно, так как $J_{1/2}U_e = 0$. Пусть $n = 2k + 1$. Тогда

$$\begin{aligned} ex_1x_2x_3 \ldots x_{2k}x_{2k+1}e &= ex_1(2e \odot x_2)x_3 \ldots x_{2k+1}e \\ &= \underbrace{ex_1e}_{=0}\, x_2x_3 \ldots x_{2k+1}e + ex_1x_2\, \underbrace{ex_3 \ldots x_{2k+1}e}_{=0} = 0. \end{aligned}$$

Также заметим, что при четном n

$$ex_1x_2x_3x_4\dots x_{2k-1}x_{2k}e = ex_1x_2ex_3x_4e\dots ex_{2k-1}x_{2k}e \in \mathfrak{L}_1.$$

Взяв элемент a и разложив все элементы y^i на компоненты $y^i = y^i_1 + y^i_0 + y^i_{1/2}$, получим

$$a = ey^1\dots y^ne = e\big(y^1_1 + y^1_0 + y^1_{1/2}\big)\dots\big(y^n_1 + y^n_0 + y^n_{1/2}\big)e = \sum_k ez_ke = \sum_k x_kev_ie,$$

где $x_i \in J_1^*$, $v_i \in \mathfrak{L}_1$.

Это следует из равенств (17) и (18). В элементе z_k множители из J_0 можно перемещать по формуле $x_{1/2}x_0 = 2x_0\odot x_{1/2} - x_0x_{1/2}$ до ближайшего элемента из J_1, при этом они просто аннулируются и получаются какие-то новые элементы из $J_{1/2}$. Элементы из J_1 можно переместить в начало z_k, получая при этом опять какие-то элементы из $J_{1/2}$. Между элементами e остаются одни лишь элементы из $J_{1/2}$, а, как видели выше, это слагаемое либо 0, либо принадлежит $\mathfrak{L}_1$. Для компоненты J_1 все доказано. Доказательство для J_0 совершенно аналогично. Таким образом, лемма 2 доказана. □

Следствие 1. *Если $J \simeq A^{(+)}$, то $\mathfrak{L}(J_i) = 0$.*

Доказательство. В данном случае $J_1 = A_{11}$, $J_0 = A_{00}$, $J_{1/2} = A_{10} + A_{01}$. Отсюда для $i = 1$ имеем

$$ex_{1/2}y_{1/2}e = e(x_{10} + x_{01})(y_{10} + y_{01})e = ex_{10}y_{01}e = \underline{(x_{10}\odot y_{01})e \in J_1},$$

для $i = 0$ —

$$\begin{aligned}(1-e)x_{1/2}y_{1/2}(1-e) &= (1-e)(x_{10} + x_{01})(y_{10} + y_{01})(1-e)\\ &= (1-e)x_{01}y_{10}(1-e) = \underline{(1-e)(x_{01}\odot y_{10})(1-e) \in J_0}.\end{aligned}$$

Для этого случая получаем $\mathfrak{L}_i \subset J_i^*$, стало быть, $J_i^* = A_{ii}$. Следствие доказано. □

§ 5. Специальный случай

Докажем свойство идеалов I и T из [4, пп. (c), (d) теоремы 3]: $\mathfrak{L}(I_i) = \mathfrak{L}(T_i) = 0$ для $i = 1, 0$, если $\mathfrak{L}(J) = 0$.

Вначале отметим одно свойство идеала T (см. [4]) — *поглощение тетрад*, т. е. в ассоциативной обертывающей $T^* = A$ верно следующее:

$$\forall t_1, t_2, \dots, t_k \in T \quad \{t_1, t_2, \dots, t_k\} = t_1t_2\dots t_k + t_k\dots t_2t_1 \in T. \tag{19}$$

Докажем основную лемму.

Лемма 3. *Пусть T — идеал алгебры J, определенный выше, и $\mathfrak{L}(J) = 0$. Тогда $\mathfrak{L}(T_i) = 0$ для $i = 1, 0$.*

Доказательство. Пусть $i = 1$ и t_1 — ненулевой элемент из $\mathfrak{L}(T_1)$. Так как $\mathfrak{L}(T) = 0$ по условию, достаточно показать, что $t_1 \in \mathfrak{L}(A)$, и тогда в силу того, что $T \cap \mathfrak{L}(A) = \mathfrak{L}(T) = 0$, имеем $\mathfrak{L}(T_1) = 0$. Аналогично и с радикалом $\mathfrak{L}(T_0)$.

A. Положим $K = \mathrm{id}_A(t_1) = t_1A^{\#}$. Возьмем элементы $x_1, \dots, x_n$ из данного идеала K. Можно считать, что $x_i = t_1a_i$. Покажем, что алгебра $B = alg(x_1, \dots, x_n)$ нильпотентна.

Каждое b_k имеет вид $f^{k,1}\dots f^{k,s_k}$, $f^{i,j}\in T$, а каждое $f^{i,j}$ раскладывается в сумму $f_1^{i,j}+f_{1/2}^{i,j}+f_0^{i,j}$. Обозначим через F_q множество

$$\bigl\{f_q^{i,j}\mid i=1,\dots,n,\ j=1,\dots,s_i\bigr\},\quad \text{где } q=1,0,\frac{1}{2}.$$

Каждый элемент b_k представляется суммой $\sum\limits_i d_k^i$, где d_k^i — слова длины s_k из элементов множеств F_q, $q=1,0,\frac{1}{2}$. Если в d_k^i встречаются подслова вида

$$f_q^{k,i}f_{1/2}^{k,j_1}\dots f_{1/2}^{k,j_p}f_q^{k,j},\quad f_q^{k,i'}f_{1/2}^{k,j_1'}\dots f_{1/2}^{k,j_s'}f_{\bar q}^{k,j'} \tag{20}$$

(где $q=1,0$, $\bar q=1-q$, p нечетно, s четно), то они, как отмечено в лемме 2, должны быть равны нулю, а тогда и $d_k^i=0$. Учитывая технику доказательства леммы 2 и тот факт, что мы будем рассматривать произведения элементов $\bigl\{t_1d_k^i\bigr\}_{i,k}$, можно считать, что каждый d_k^i представим в виде произведения $e_k^ih_k^i$, где $e_k^i\in\widetilde F_1^*$, $h_k^i\in\widetilde F_{1/2}^*$ (элементы из F_0 в представлении слова d_k^i исчезнут). Множество $\widetilde F_q$ равно F_q в объединении с конечным набором элементов из T_q, появляющихся в процессе переработки слов d_k^i по следующим формулам:

$$z_{1/2}z'_{1/2}x_i=2x_iV_{z'_{1/2}z_{1/2}}=x_iz'_{1/2}z_{1/2}, \tag{21}$$

$$x_iy_{1/2}=2x_i\odot y_{1/2}-y_{1/2}x_i, \tag{22}$$

$$\begin{aligned}x_iy_{1/2}z_{1/2}\dots v_{1/2}w_{1/2}x_0&=2x_iy_{1/2}z_{1/2}\dots v_{1/2}(w_{1/2}\odot x_0)\\&\quad-x_1y_{1/2}z_{1/2}\dots v_{1/2}x_0w_{1/2}=2x_1y_{1/2}z_{1/2}\dots v_{1/2}\widetilde w_{1/2},\end{aligned}$$

где $i=1,0$, $j=1-i$, и все элементы, встречающиеся в этих формулах, берутся из F_q, где $q=1,0,\frac{1}{2}$, причем по (20) элементы h_k^i должны быть четной длины.

Покажем, что $\mathfrak L(T_1)V_{T_{1/2},T_{1/2}}\subset\mathfrak L(T_1)$. Рассмотрим йорданову алгебру T' с 1 и идемпотентом e: $T'=\operatorname{alg}(T,e,1)$. Для T' справедливы все утверждения, касающиеся алгебры с идемпотентом, а именно $\mathfrak L(T_1')\triangleleft_{\mathrm{inv}}T_1'$, так как нетрудно видеть, что

$$T'=\Phi e+T+(1-e)\Phi=\underbrace{(T_1+e\Phi)}_{=T_1'}+T_{1/2}+\underbrace{(T_0+(1-e)\Phi)}_{=T_0'},$$

и утверждение доказано.

Очевидно, что $T_1\triangleleft T_1'$, откуда

$$\mathfrak L(T_1)=T_1\cap\mathfrak L(T_1')\wedge\mathfrak L(T_1)V_{T_{1/2},T_{1/2}}\subset T_1,$$

а с другой стороны,

$$\mathfrak L(T_1)V_{T_{1/2},T_{1/2}}\subset\mathfrak L(T_1')V_{T_{1/2},T_{1/2}}\subset\mathfrak L(T_1').$$

Отсюда следует, что $\mathfrak L(T_1)V_{T_{1/2},T_{1/2}}\subset\mathfrak L(T_1)$.

B. После освобождения от лишних индексов возьмем алгебру

$$\mathscr D=\operatorname{alg}\{t_1d_k\colon k=1,\dots,m;\ d_k=e_kh_k,\ e_k=e_k(x_1,\dots,x_n),h_k=h_k(y_1,\dots,y_l)\},$$

где $\{x_1,\dots,x_n\}=\widetilde F_1$, $\{y_1,\dots,y_l\}=\widetilde F_{1/2}$.

Для удобства сделаем переобозначения: $\widetilde F_1\rightleftharpoons X_n$, $\widetilde F_{1/2}\rightleftharpoons Y_l$. (Знак $\rightleftharpoons$ используется в значении «переобозначим».)

Заметим, что h_i можно рассматривать как мономы от пар элементов из Y_l, так как они четной длины по элементам из Y_l. Таким образом, положим $Y_l^2 = \{y_i y_j : i \neq j, y_i, y_j \in Y_l\} \rightleftharpoons \{w_s \mid s = 1, \ldots, l^2 - l\}$ и $l^2 - l \rightleftharpoons l$. Имеем $h_k = h_k(w_1, \ldots, w_l)$.

Ясно, что можно рассматривать $\deg_{w_i} h_k$ — степень h_k по w_i, и считать, что все e_k и h_k — полилинейные мономы. При этом покажем, что из $\deg_{w_i} h_k = 1$ следует $\deg_{\overline{w}_i} h_k = 0$, где $w_i = y_1 y_2$, $\overline{w}_i = y_2 y_1$. К этому также можно прийти переобозначением и дополнением новых символов y_i к множеству Y_l.

C. Докажем нильпотентность алгебры D. Рассмотрим некоторое произведение d порождающих алгебры D:

$$d = t_1 e_1(x_1, \ldots, x_n) h_1(w_1, \ldots, w_l) t_1 e_2(x_1, \ldots, x_n) h_2(w_1, \ldots, w_l) \\ \ldots t_1 e_N(x_1, \ldots, x_n) h_N(w_1, \ldots, w_l). \quad (23)$$

В процессе переработки слова d, а именно при сборке вместе элементов t_1, появятся еще какие-то элементы из $\mathfrak{L}(T_1)$. Процесс переработки таков, что новые элементы будут появляться только до какого-то конечного шага, после чего начнется накопление элементов из некоторого конечного множества $S \subset \mathfrak{L}(T_1)$. Пусть $|S| = q$ и $(\mathrm{alg}_{_T}(S))^p = 0$, тогда по предложению 4.5.2 из [1] $(\mathrm{alg}_{_A}(S))^{q+p} = 0$. В качестве N в (23) возьмем $q + p$.

Процесс переработки слова d состоит из четырех шагов и начинается с преобразования произведения

$$e_1(x_1, \ldots, x_n) h_1(w_1, \ldots, w_l) t_1 e_2(x_1, \ldots, x_n) h_2(w_1, \ldots, w_l).$$

Шаг 1. Выражение $e_1(x_1, \ldots, x_n) h_1(w_1, \ldots, w_l) t_1$ с помощью соотношений (21) и равенства $xt = \underbrace{2x \odot t}_{=t' \in \mathfrak{L}(T_1)} - tx$, где $x \in T_1$ и $t \in \mathfrak{L}(T_1)$, можно преобразовать в сумму выражений вида $t_1' e_1'(x_1, \ldots, x_n) h_1'(w_1, \ldots, w_l)$, где $t_1' \in S$, а $e_1'(x_1, \ldots, x_n)$ и $h_1'(w_1, \ldots, w_l)$ — полилинейные мономы.

Шаг 2. Каждое произведение вида $h_1'(w_1, \ldots, w_l) e_2(x_1, \ldots, x_n)$, используя (21), приводим к сумме произведений вида

$$e_2'(x_1', \ldots, x_{n'}') h_1''(w_1, \ldots, w_l),$$

где $T_1 \supset \{x_1', \ldots, x_{n'}'\} \supset X_n$, а выражение $e_2'(x_1', \ldots, x_{n'}')$ является полилинейным мономом (линейность по элементам из X_n очевидна в силу (21), а по остальным достигается введением новых символов), выражение $h_1''(w_1, \ldots, w_l)$ — полилинейный моном.

Шаг 3. Каждое произведение вида $h_1''(w_1, \ldots, w_l) h_2(w_1, \ldots, w_l)$ преобразуем в сумму произведений вида $e_2''(x_1'', \ldots, x_{n''}'') h_2'(w_1, \ldots, w_l)$, где $\{x_1'', \ldots, x_{n''}''\} \supset \{x_1', \ldots, x_{n'}'\}$ и e_2'', h_2' — полилинейные мономы, следующим образом: пусть $h = h_1'' h_2$ и $\deg_{w_i} h + \deg_{\overline{w}_i} h > 1$. Тогда $ehe = e \ldots w_i \ldots w_j \ldots e$, где $w_i = w_j$ либо $w_i = \overline{w}_j$. По (19) получим, что $e\{y_1 y_2 y_3 y_4\} e \in T_1$ для всех $y_1, y_2, y_3, y_4 \in T_{1/2}$. Отсюда видим, что для всех $w_k, w_s \in Y_l^2$ верно равенство $e w_k w_s e \equiv -e \overline{w}_s \overline{w}_k e \pmod{T_1}$. Стало быть, в нашем случае w_j можно подвести к w_i, а получающиеся элементы из T_1 переправлять по (21) в начало h:

$$e w_i w_j e = \begin{cases} e w_j w_j e = e y_1 y_2 y_1 y_2 e = 2 \underbrace{e y_1 \odot y_2 e y_1 y_2 e}_{= x_i'' w_j,\, x_i'' \in T_1} - \underbrace{e y_2 y_1 y_1 y_2}_{\in T_1}, \\ e \overline{w}_j w_j e = e y_2 y_1 y_1 y_2 e \in T_1. \end{cases}$$

Аналогично для $w_i\overline{w}_j$. Ясно, что h представляется в виде суммы мономов, каждый из которых имеет суммарную степень по w_j и $\overline{w}_j$ на единицу меньше. Продолжая этот процесс для w_j и для других w_i, получим требуемое.

Шаг 4. Каждое выражение вида

$$t_1'e_1'(x_1,\dots,x_n)e_2'(x_1',\dots,x_{n'}')e_2''(x_1'',\dots,x_{n''}'') \tag{24}$$

преобразуем к сумме выражений вида $t_1''e_1''(x_1'',\dots,x_{n''}'')$, где $t_1''\in S$, а e_1'' — полилинейный моном, применяя следующее утверждение.

Лемма [1, лемма 4.5.9]. *Для любого линейного по x_0 однородного йорданова многочлена $j(x_0,x_1,\dots,x_n)$ и любого одночлена $v(x_1,\dots,x_n)$ найдутся линейные по x_0 однородные йордановы многочлены $j_i(x_0,x_1,\dots,x_n)$ и полилинейные одночлены $v_i(x_1,\dots,x_n)$ такие, что*

$$\begin{aligned}j(x_0,x_1,\dots,x_n)&v(x_1,\dots,x_n)\\&=j_0(x_0,x_1,\dots,x_n)+\sum_i j_i(x_0,x_1,\dots,x_n)v_i(x_1,\dots,x_n),\end{aligned}$$

причем $d(j)+d(v)=d(j_0)=d(j_i)+d(v_i)$.

Положив в (24) $t_1'=j(x_0,\dots,x_n)$ и

$$v(x_1,\dots,x_n)=e(x_1'',\dots,x_{n''}'')=e_1'e_2'e_2'',$$

получим

$$t_1'e(x_1'',\dots,x_{n''}'')=\underbrace{j_0(t_1,x_1'',\dots,x_{n''}'')}_{\in\mathfrak{L}(T_1)}+\sum_i\underbrace{j_i(t_1,x_1'',\dots,x_{n''}'')}_{\in\mathfrak{L}(T_1)}e_i(x_1'',\dots,x_{n''}''),$$

что и требовалось.

Таким образом, выражение, которое взято перед шагом 1, преобразуется к сумме выражений вида $t_1''e_1''(x_1'',\dots,x_{n''}'')h_2'(w_1,\dots,w_l)$, где $t_1''\in S, e_1'', h_2'$ — полилинейные мономы.

Далее повторяем этот процесс, начиная с шага 1, но уже с произведениями вида

$$e_1''(x_1'',\dots,x_{n''}'')h_2'(w_1,\dots,w_l)t_1e_3(x_1,\dots,x_l)h_3(w_1,\dots,w_l),$$

и т. д. до N.

Получим представление для d в виде суммы произведений $t_1t_1''t_2''\dots t_{N-1}''$ $e_{N-1}''h_n'$, где $t_1,t_i''\in S$. Каждое из таких произведений равно нулю, так как N — индекс нильпотентности $\mathrm{alg}_A(S)$. Следовательно, $d=0$.

D. Для завершения доказательства заметим, что все новые элементы x_i', x_i'', t_i', t_i'' в процессе преобразования произведения d появляются только до какого-то номера $N'<N$ (см. п. C).

Рассмотрим сначала множество X_n. Оно пополняется только на шагах 2 и 3. Обозначим через $E=\{e_i(x_1,\dots,x_n)\}$ всевозможные полилинейные мономы, а через $H=\{h_i(w_1,\dots,w_l)\}$ — также всевозможные полилинейные мономы, рассматриваемые в п. B, т. е.

$$\deg_{w_k}h_i+\deg_{\overline{w}_k}h_i\le 1\quad\forall w_k\in Y_l^2.$$

На шаге 2 работаем с множеством $HE=\{he\mid h\in H, e\in E\}$. Это множество конечной мощности, и каждая итерация этого шага дает конечное множество элементов x_i'. Присоединим их к множеству X_n и новое множество обозначим через $X_{n'}'$.

На шаге 3 имеем дело с множеством $HH = \{h_ih_j \mid h_i, h_j \in H\}$. Это множество также конечное, и на каждом применении этого шага появляется конечное множество элементов x_i''. Присоединим их все к множеству $X'_{n'}$ и новое множество обозначим через X_n. Путаницы со старым обозначением не будет, т. е. считаем, что все элементы из T_1, появляющиеся в результате применения шагов 2 и 3, учли и сразу включили в множество X_n.

Далее рассмотрим шаг 1. Там работаем с множеством $EHt_1 = \{eht_1 \mid e \in E, h \in H\}$. При этом появляется конечное множество S' элементов из $\mathfrak{L}(T_1)$. Сделаем переобозначение $S' \rightleftharpoons S' \cup t_1$. Наконец, на шаге 4 имеем дело с множеством $S'E^3 = \{te_ie_je_k \mid t \in S',\ e_i, e_j, e_k \in E\}$. Здесь опять появляется конечное число элементов из $\mathfrak{L}(T_1)$, так как множество $S'E^3$ конечно.

Объединение S' и новых этих элементов, можно считать, и есть искомое множество S. Таким образом, лемма 3 доказана. $\square$

Следствие 2. *Для случая* (c) *теоремы* 3 *из* [4] *верна основная лемма, т. е.* $\mathfrak{L}(I_i) = 0$.

Доказательство. Так как $ey_1y_2e \in I_1$ для всех $y_1, y_2 \in I_{1/2}$, где $I \cong \overline{A}^{(+)}$ для некоторой ассоциативной алгебры $\overline{A}$, то (в обозначениях основной леммы) $w_i \in I_1$. Повторяя дословно доказательство леммы, только пропуская те части, где речь идет об элементах h_i, так как таковые будут отсутствовать в этом случае, получим, что $\mathfrak{L}(I_i) = 0$, $i = 1, 0$. $\square$

Следствие 3. *Если* $J \cong H(A, \wedge)$ *для некоторой ассоциативной алгебры* A *и инволюции* $\wedge : A \to A$ *и* $\mathfrak{L}(J) = 0$, *то* $\mathfrak{L}(J_i) = 0$.

Доказательство. Если в основной лемме положить T равным J, то в данном случае можно начинать доказательство с п. B, так как можно считать, что $J^* = A$, $\mathfrak{L}(A) = 0$, и можно воспользоваться леммой 4.5.9 из [1] и схемой доказательства, предложенной при рассмотрении леммы 3. $\square$

§ 6. Связь между $\mathfrak{L}(J_1)$ и $\mathfrak{L}(J_0)$

Пусть J — специальная йорданова алгебра, $J^* = A$, $J \subset A^{(+)}$ и $A_{ii} = J^*(1 + L_i)$.

Лемма 4. $\mathfrak{L}(J_i)U_{1/2} \subset \mathfrak{L}(J_j)$, $i = 1, 0$, $j = 1 - i$.

Доказательство. Рассмотрим только случай $i = 1$, для $i = 0$ доказательство проводится аналогично.

Любой элемент x из $\mathfrak{L}(J_1)U_{1/2}$ можно выразить в виде $x = \sum\limits_{i=1}^{k} q_il_iq_i$. Нужно показать, что $\mathrm{id}_{J_0}(x) \subset \mathfrak{L}(J_0)$. Для этого ввиду свойств радикалов достаточно показать, что $I_i = \mathrm{id}_{J_0}(q_il_iq_i) \subset \mathfrak{L}(J_0)$, $i = \overline{1, k}$.

Пусть $I = \mathrm{id}_{J_0}(qlq)$, $q \in J_{1/2}$, $l \in \mathfrak{L}(J_1)$. Возьмем конечное множество элементов $x_1, \ldots, x_n$ из I. Каждый из них имеет вид $(qlq)R_{v^i_1}R_{v^i_{m_i}}$, $v^i_j \in J_0$. Положим $V = \{v^i_j \mid i = \overline{1, n},\ j = \overline{1, m_i}\} \rightleftharpoons \{v_j \mid j = \overline{1, m}\}$ и, записав каждое x_i в ассоциативной записи, имеем

$$x_i = \sum_{j=1}^{l_i} e^j_i(v_1, \ldots, v_m)qlq{e'}^j_i(v_1, \ldots, v_m) = \sum_{j=1}^{l_i} y^j_i.$$

Ясно, что

$$B = \mathrm{alg}_I(x_i \mid i = \overline{1, n}) \subset \overline{A} = \mathrm{alg}_{A_{00}}\big(y^j_i \mid i = \overline{1, n},\ j = \overline{1, l_i}\big).$$

Последнее выражение обозначим через $\operatorname{alg}_{A_{00}}(y_i \mid i = \overline{1,n})$. Из нильпотентности алгебры $\overline{A}$ следует нильпотентность алгебры B.

Заметим, что вычисления можно свести к компоненте A_{11}:

$$b = \prod y_i = e_1 q \underbrace{lq\bar{e}_1 e_2 q}_{\in A_{11}} \underbrace{lq\bar{e}_2 e_3 q}_{\in A_{11}} \underbrace{lq\bar{e}_3 \dots q}_{\dots} \underbrace{lq\bar{e}_{t-1} e_t q} lq\bar{e}_t = e_1 q a_{11} lq\bar{e}_t,$$

где $a_{11} \in A_{11}$. Если $a_{11} = 0$ для некоторого t, то и b будет равен нулю.

Положим $E = \{e_i(v_1, \dots, v_m) \mid i = \overline{1,n}\}$, $\overline{E} = \{\bar{e}_i(v_1, \dots, v_m) \mid i = \overline{1,n}\}$. Рассмотрим прямое произведение $\overline{E} \times E$. Для любых $\bar{e}_i \in \overline{E}$, $e_j \in E$, имеем

$$lq\bar{e}_i(v_1, \dots, v_m) e_j(v_1, \dots, v_m) q = lqq_{ij}, \quad \text{где } q_{ij} \in J_{1/2}.$$

Так как справа от q можно поставить идемпотент e, он и будет убирать элементы v_k из $\bar{e}_i, e_j$:

$$v_k q e = 2 v_k \odot q e - q \underbrace{v_k e}_{=0} = \underbrace{2 v_k \odot q}_{=q'} = q' e.$$

Последнее получается ввиду того, что $J_0 \subset A_{00}$, и $A_{11} A_{00} = (0)$.

Теперь, полагая $Q = \{q_{ij} \mid i, j = \overline{1,n}\} \rightleftharpoons \{q_s \mid s = \overline{1,n}\}$, имеем $a_{11} = lqq_1 lqq_2 \dots lqq_{t-1}$, $q_i \in Q$.

Пусть $h_i = eqq_i e$. Видим, что $h_i h_j = -\bar{h}_j \bar{h}_i \pmod{J_1}$. Покажем последнее подробнее:

$$h_i h_j = eqq_i eeqq_j e = eqq_i qq_j e = 2e \underbrace{qq_i qq_j}_{\in J_1 + J_0} e - eg_j qq_i qe = -\bar{h}_j \bar{h}_i \pmod{J_1},$$

где знак $\bar{\ }$ означает то же, что и в основной лемме, а принадлежность $qq_i qq_j \in J_1 + J_0$ верна ввиду йордановости двучлена.

Имея это свойство для h_i, замечаем, что дальше работает техника леммы 3. Лемма 4 доказана. $\square$

§ 7. Доказательство пп. (c) и (d) теоремы 2

В случаях (c) и (d) в алгебре J имеется идеал I, у которого тривиальное пересечение с каждым из радикалов:

$$I \cap \mathfrak{L}(J_i) = 0, \quad i = 1, 0.$$

Это вытекает из леммы 3 и следствия 2 из нее. В силу тождества (16) имеем разложение

$$K^i = \operatorname{id}_J(\mathfrak{L}(J_i)) = \mathfrak{L}(J_i) \oplus \mathfrak{L}(J_i) U_{J_{1/2}} \oplus J_{1/2}(\mathfrak{L}(J_i) \oplus \mathfrak{L}(J_i) U_{J_{1/2}}).$$

Из леммы 4 следует, что включение $\mathfrak{L}(J_i) U_{J_{1/2}} \subset \mathfrak{L}(J_j)$, где $j = 1 - i$, влечет равенство $I \cap \mathfrak{L}(J_i) U_{J_{1/2}} = 0$, а тогда пересечение идеалов лежит в средней компоненте алгебры: $I \cap K^i \subset J_{1/2}$.

Для идеала $M = K^i \cap I$ имеем $M^2 = 0$. Выше отмечали, что $\mathfrak{L}$-полупростые йордановы алгебры полупервичны, так что $M = 0$. Тогда $IK^i \subset I \cap K^i = 0$. Поскольку $I \neq 0$, в силу первичности алгебры J имеем $K^i = 0$. Стало быть, $\mathfrak{L}(J_i) = 0$, и доказательство теоремы 2, а вместе с ней и теоремы 1, закончено. $\square$

Исследование выполнено в рамках дипломной работы (ММФ НГУ, 1984 г.) под руководством профессора И. П. Шестакова. Без его поддержки и наставлений, а также уверенности в положительном результате теоремы не были бы доказаны. Также неоценимую помощь оказали структурные теоремы Е. И. Зельманова, без них результат не был бы возможен.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Жевлаков К. А., Слинько А. М., Шестаков И. П., Ширшов А. И.* Кольца, близкие к ассоциативным. М.: Наука, 1978.

2. *Anderson T.* A note on strong radicals // Acta Math. Acad. Hungar. 1974. V. 25. P. 5–6.

3. *Rich M.* Some properties of the Levitzki radical in alternative rings // J. Austral. Math. Soc. (Ser. A). 1982. V. 82. P. 52–60.

4. *Зельманов Е. И.* О первичных йордановых алгебрах, II // Сиб. мат. журн. 1983. Т. 24, № 1. С. 89–104.

5. *McCrimmon K.* Peirce ideals in Jordan algebras // Pacific J. Math. 1978. V. 178, N 2. P. 397–415.

6. *Зельманов Е. И.* Абсолютные делители нуля и алгебраические йордановы алгебры // Сиб. мат. журн. 1982. Т. 23, № 6. С. 100–116.

Статья поступила 24 августа 2012 г.

Грибков Владимир Иванович
Кузбасский гос. технический университет,
ул. 50 лет Октября, 19, Кемерово 650099
gribkovvi@yandex.ru