Сибирский математический журнал
Ноябрь—декабрь, 2010. Том 51, № 6

УДК 517.53+517.518.86

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ НЕРАВЕНСТВА ДЛЯ ЦЕЛЫХ ФУНКЦИЙ КОНЕЧНОЙ СТЕПЕНИ И РАЦИОНАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ С ПРЕДПИСАННЫМИ ПОЛЮСАМИ

А. В. Олесов

Аннотация. Устанавливаются новые дифференциальные неравенства для целых функций конечной степени с мажорантой из класса целых функций, не имеющих нулей в нижней полуплоскости, для целых функций конечной степени с ограничениями на нули и как следствия для рациональных функций с предписанными полюсами. Определены все случаи равенства в основных результатах. Полученные оценки обобщают и улучшают некоторые неравенства Бернштейна, Гарднера и Говила для целых функций конечной степени; Смирнова, Азиза и Шаха для алгебраических полиномов; Борвейна и Эрдейи, Азиза и Шаха и др. для рациональных функций.

Ключевые слова: целая функция экспоненциального типа, рациональная функция с предписанными полюсами, дифференциальное неравенство, ограничения на нули.

Введение

Целой функцией конечной степени называется целая функция $f(z)$, для которой $\overline{\lim\limits_{z\to\infty}} \frac{\ln|f(z)|}{|z|} < \infty$. Указанный предел называется *степенью функции* $f(z)$. Функция $h_f(\theta) = \overline{\lim\limits_{r\to\infty}} \frac{\ln|f(re^{i\theta})|}{r}$, $-\pi \le \theta \le \pi$, называется *индикатрисой роста* функции $f(z)$ конечной степени.

Отметим, что

$$h_f(\theta+\pi) + h_f(\theta) \ge 0 \quad \text{при } -\pi \le \theta \le \pi. \tag{1}$$

Это свойство вытекает из того факта, что $h_f(\theta)$ является опорной функцией некоторого ограниченного выпуклого замкнутого множества, называемого *индикаторной диаграммой* функции $f(z)$ (см. [1, с. 51]). Индикаторная диаграмма целой функции конечной степени содержит индикаторную диаграмму ее производной (см. [1, с. 60]), т. е.

$$h_{f'}(\theta) \le h_f(\theta) \quad \text{при } -\pi \le \theta \le \pi. \tag{2}$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 08–01–00028), Совета по грантам президента РФ и государственной поддержке ведущих научных школ (код проекта НШ–2810.2008.1), а также гранта ДВО РАН (код проекта 09–I–П4–02).

Отметим также, что для индикатрисы суммы двух целых функций $f(z)$ и $g(z)$ конечной степени имеем $h_{f+g}(\theta) \le \max\{h_f(\theta), h_g(\theta)\}$ при любом $\theta \in \mathbb{R}$, причем если $h_f(\theta) \ne h_g(\theta)$, то имеет место равенство (см. [2, с. 73]).

Следуя Б. Я. Левину, назовем целую функцию $\omega(z)$ *конечной степени функцией класса* $\mathscr{P}$, если $\omega(z) \ne 0$ при $\operatorname{Im} z < 0$ и $h_\omega(-\pi/2) \ge h_\omega(\pi/2)$. Через $\mathscr{P}_\sigma$, $\sigma \ge 0$, обозначим совокупность функций $\omega(z)$ класса $\mathscr{P}$ таких, что $h_\omega(-\pi/2) = \sigma$.

Для функции $\omega(z) \in \mathscr{P}_\sigma$ обозначим через $\mathscr{E}_\tau(\omega)$, $\tau \in [h_\omega(\pi/2), \sigma]$, совокупность целых функций $f(z)$ конечной степени, не превосходящей степени функции $\omega(z)$, таких, что $|f(z)| \not\equiv |\omega(z)|$, $|f(x)| \le |\omega(x)|$ при $x \in \mathbb{R}$ и

$$\max\{h_\omega(\pi/2), h_f(\pi/2)\} = \tau. \tag{3}$$

В § 1 из результатов Б. Я. Левина выводится ряд лемм и дифференциальных неравенств для функций $\omega(z) \in \mathscr{P}_\sigma$ и $f(z) \in \mathscr{E}_\tau(\omega)$. В теореме 1 оценивается сверху модуль $|f'(x)|$ при $x \in \mathbb{R}$. Как следствие получено усиление в зависимости от $|f(x)|$ и $\min\{h_f(\pi/2), h_f(-\pi/2)\}$ неравенства С. Н. Бернштейна [3; 4, с. 194] $|f'(x)| \le \sigma \sup\limits_{x\in\mathbb{R}} |f(x)|$, $x \in \mathbb{R}$, для ограниченной на $\mathbb{R}$ целой функции $f(z)$ конечной степени σ (следствие 1). Теорема 2 дает оценку области $D(x, a)$, $x \in \mathbb{R}$, $0 < a \le |w(x)|$, значений функционала $f'(x)/f(x)$ на классе функций $f(z) \in \mathscr{E}_0(\omega)$, $|f(x)| = a$. Теорема 3 обобщает неравенство В. И. Смирнова [5, с. 356] для мажорантных алгебраических полиномов.

В § 2 рассматриваются целые функции конечной степени с ограничениями на нули. Пусть $\mathscr{A}_\sigma^\tau$ — множество целых функций $f(z)$ конечной степени таких, что $|f(x)| \le 1$ при $x \in \mathbb{R}$, $f(z) \ne 0$ при $\operatorname{Im} z > 0$, $h_f(\pi/2) = \tau$ и $h_f(-\pi/2) = \sigma$, $\tau \le \sigma$. Т. Г. Генчев [6] доказал, что в классе функций $f(z) \in \mathscr{A}_\sigma^\tau$

$$|\mathfrak{B}[f(z)]| \le \frac{|\mathfrak{B}(e^{i\sigma z})| + |\mathfrak{B}(e^{-i\tau z})|}{2} \quad \text{при } \operatorname{Im} z \le 0,$$

где $\mathfrak{B}$ — любой аддитивный однородный оператор над функциями конечной степени, переводящий функции класса $\mathscr{P}$ в функции класса $\mathscr{P}$. В случае $\mathfrak{B}[f(z)] = f(z)$ этот результат получен Боасом [7], а в случае $\mathfrak{B}[f(z)] = f'(z)$ и $\tau = 0$ — Боасом [7] и Рахманом [8]. Можно показать, что для $\mathfrak{B}[f(z)] = f'(z) - \alpha f(z)$, $\operatorname{Im} \alpha \le 0$, теорема Генчева эквивалентна следующей оценке Гарднера и Говила [9] «полярной производной», введенной Рахманом и Шмейссером [10]: в классе $\mathscr{A}_\sigma^0$

$$|\sigma f(z) + i(1-\zeta) f'(z)| \le \sigma(|\zeta||e^{i\sigma z}| + 1)/2 \quad \text{при } \operatorname{Im} z \le 0,\ |\zeta| \ge 1.$$

Теорема 4 данной статьи устанавливает справедливость этой оценки при $|\zeta| \ge |e^{-i\delta z}|$, где $\delta = \min\{\sigma - h_{f'(z) - i\sigma f(z)}(-\pi/2), -h_{f'}(\pi/2)\}$, и улучшает ее в зависимости от $\inf\limits_{x\in\mathbb{R}} |f(x)|$. Не составляет труда проверить, что отсюда следует результат Азиза [11, следствие 1]: если алгебраический полином $P(z)$ степени n отличен от нуля в круге $|z| < 1$, то

$$|nP(z) + (\alpha - z)P'(z)| \le n \frac{|\alpha z^{n-1}| + 1}{2} \max_{|z|=1} |P(z)| \quad \text{при } |z| \ge 1,\ |\alpha| \ge 1.$$

Теорема 5 для функции $\omega(z) \in \mathscr{P}_\sigma$, $h_\omega(\pi/2) = 0$, устанавливает неравенство

$$|\omega'(z)| \ge |e^{i\delta z}||\omega'(z) - i\sigma\omega(z)| + \sigma |e^{i\sigma z}| \inf_{x\in\mathbb{R}} |\omega(x)| \quad \text{при } \operatorname{Im} z \le 0,$$

где $\delta = \sigma - h_{\omega'(z)-i\sigma\omega(z)}(-\pi/2)$. Из теорем 2 и 5 вытекает оценка сверху величины $\sup\limits_{x\in\mathbb{R}} |\sigma f(x) + i(1-\zeta)f'(x)|$, $|\zeta| > 1$, для целой функции $f(z)$ конечной степени $\sigma > 0$, ограниченной на $\mathbb{R}$ и такой, что $h_f(\pi/2) = 0$ и $f(z) \neq 0$ при $\operatorname{Im} z > -k$, $k > 0$ (следствие 2). Данная оценка содержит следующий результат Азиза и Шаха [12]: если алгебраический полином $P(z)$ степени n отличен от нуля в круге $|z| < K$, $K \geq 1$, то

$$\max_{|z|=1} |nP(z) + (\alpha - z)P'(z)| \leq \frac{n}{K+1}\{(|\alpha| + K)\max_{|z|=1}|P(z)| - (|\alpha| - 1)\min_{|z|=K}|P(z)|\}$$

при $|\alpha| \geq 1$. Для целой функции $f(z)$ конечной степени такой, что $h_f(-\pi/2) = \sigma$, $h_f(\pi/2) = 0$ и $f(z) \neq 0$ при $\operatorname{Im} z < k$, $k \geq 0$, оценивается снизу модуль $|\sigma f(x) + i(1-\zeta)f'(x)|$ при $x \in \mathbb{R}$ и $|\zeta| > e^{-\delta k}$, где $\delta = \sigma - h_{f'(z)-i\sigma f(z)}(-\pi/2)$ (следствие 3). Эта оценка содержит и улучшает следующий результат Азиза и Шаха [13, теорема 3]: если алгебраический полином $P(z)$ степени n имеет все нули в круге $|z| \leq K \leq 1$ и нуль кратности s в начале координат, то

$$\max_{|z|=1}|P'(z)| \geq \frac{n + Ks}{1 + K}\max_{|z|=1}|P(z)|$$

(см. следствие 4).

В § 3 результаты предыдущих параграфов находят приложения к рациональным функциям с предписанными полюсами. Пусть $r(z)$ — рациональная функция, не имеющая полюсов на окружности $|z| = 1$, такая, что $r(\infty) \neq \infty$ и $\max\limits_{|z|=1}|r(z)| = 1$, $B_1(z)$ и $B_2(z)$ — произведения Бляшке, полюсами которых с учетом кратностей являются полюсы функции $r(z)$, лежащие соответственно внутри и вне единичного круга. Борвейн и Эрдейи [14, теорема 1] при помощи интерполяционной теоремы доказали, что $|r'(z)| \leq \max\{|B_2'(z)|, |B_1'(z)|\}$ при $|z| = 1$. Предложение 1 данной статьи устанавливает следующий более общий результат:

$$\left|\frac{zr'(z)}{r(z)} + |B_1'(z)|\right| + \left|\frac{zr'(z)}{r(z)} - |B_2'(z)|\right| \leq \frac{|B_2'(z)| + |B_1'(z)|}{|r(z)|} \quad \text{при } |z| = 1,\ r(z) \neq 0.$$

Если $r(z) \neq 0$ при $|z| < 1$, то согласно предложению 3 при $|z| = 1$, $r(z) \neq 0$, имеем

$$\left|\frac{\zeta r'(z)}{r(z)} - |B_2'(z)|\right| - \left|\frac{zr'(z)}{r(z)} + |B_1'(z)|\right| \geq \frac{|B_2'(z)| + |B_1'(z)|}{|r(z)|}\min_{|z|=1}|r(z)|.$$

Из геометрической интерпретации неравенств предложений 1 и 3 вытекает оценка модуля $|r'(z)|$ (следствие 8), обобщающая на случай общего расположения полюсов следующий результат Азиза и Шаха [15, теорема 2]: если все полюсы и нули рациональной функции $r(z)$ лежат в области $|z| > 1$, то

$$|r'(z)| \leq \frac{|B_2'(z)|}{2}\{1 - \min_{|z|=1}|r(z)|\} \quad \text{при } |z| = 1.$$

Если все полюсы рациональной функции $r(z)$ лежат в области $|z| > 1$, а нули в $|z| \geq k$, $k > 1$, то, как показано Азиз-Аль-Аузимом и Заргером [16, теорема 1],

$$|r'(z)| \leq \frac{|B_2'(z)|}{2} - |r(z)|^2\frac{n}{2}\frac{k-1}{k+1} \quad \text{при } |z| = 1.$$

Этот результат усиливается предложением 5, которое также позволяет уточнить неравенство Малика [17] $\max\limits_{|z|=1}|P'(z)| \leq \frac{n}{k+1}\max\limits_{|z|=1}|P(z)|$ для алгебраического полинома $P(z)$ степени n, отличного от нуля в круге $|z| < k$, $k > 1$ (см. следствие 9).

§ 1. К результатам Левина о целых функциях

Следующие три леммы принадлежат Б. Я. Левину [18, с. 48, 60; 2, с. 468].

Лемма 1. *Пусть $f(z)$ и $\omega(z)$ — целые функции конечной степени, $\omega(z) \neq 0$ при $\operatorname{Im} z < 0$, $|f(x)| \leq |\omega(x)|$ при $x \in \mathbb{R}$. Положим $\psi(z) = f(z)/\omega(z)$, $k = h_\psi(-\pi/2)$. Тогда*

$$h_f(\theta) = h_\omega(\theta) + k|\sin\theta| \text{ при } -\pi \leq \theta \leq 0, \quad |\psi(z)| \leq e^{k|y|} \text{ при } y = \operatorname{Im} z \leq 0.$$

Лемма 2. *Пусть $\omega(z) \in \mathscr{P}$, $f(z)$ — целая функция конечной степени, не превосходящей степени функции $\omega(z)$, такая, что $|f(x)| \leq |\omega(x)|$ при $x \in \mathbb{R}$. Тогда $|f(z)| \leq |\omega(z)|$ при $\operatorname{Im} z \leq 0$.*

Для целой функции $f(z)$ будем полагать по определению $\bar{f}(z) := \overline{f(\bar{z})}$.

Лемма 3. *В условиях леммы 2 $|f'(z)| \leq |\omega'(z)|$ при $\operatorname{Im} z \leq 0$. Если в какой-нибудь точке вещественной оси, не являющейся нулем функции $\omega(z)$, имеет место равенство, то $f(z) = c_1\omega(z) + c_2\overline{\omega}(z)$, $|c_1| + |c_2| = 1$.*

Лемма 4. *Если в условиях леммы 2 $f(x) = \nu\omega(x)$ и $f'(x) = \nu\omega'(x)$ при некоторых $x \in \mathbb{R}$, $\omega(x) \neq 0$, и ν, $|\nu| = 1$, то $|f(z)| \equiv |\omega(z)|$.*

Доказательство. В противном случае $f(z)/\omega(z) = \nu + (z-x)^2\theta(z)$, где $\theta(z)$ — регулярная в окрестности точки x функция. Функция $(z-x)^2\theta(z)$ многолистна в окрестности точки x, что противоречит лемме 2.

Лемма 5. *Если $g(z)$ — целая функция конечной степени, не имеющая нулей в полуплоскости $\operatorname{Im} z < 0$, то*

$$\operatorname{Im}\frac{g'(z)}{g(z)} \geq \frac{h_g(-\pi/2) - h_g(\pi/2)}{2} \quad \text{при } \operatorname{Im} z \leq 0,\ g(z) \neq 0. \tag{4}$$

Если в (4) имеет место равенство, то либо $z \in \mathbb{R}$ и все нули функции $g(z)$ вещественны, либо $g'(z)/g(z) \equiv \mathrm{const}$.

Доказательство. Положим $\delta = h_g(-\pi/2) - h_g(\pi/2)$, $U(z) = e^{i\delta z}\bar{g}(z)/g(z)$. Докажем (4) в фиксированной точке $x \in \mathbb{R}$, $g(x) \neq 0$. Очевидно, что

$$i\frac{U'(x)}{U(x)} = i\left[i\delta + \frac{\bar{g}'(x)}{\bar{g}(x)} - \frac{g'(x)}{g(x)}\right] = 2\operatorname{Im}\frac{g'(x)}{g(x)} - \delta. \tag{5}$$

В случае $|U(z)| \equiv 1$ все нули $g(z)$ вещественны. Тогда слева в (5) стоит нуль и в (4) имеет место равенство. Пусть $|U(z)| \not\equiv 1$. По лемме 1 $|U(z)| \leq 1$ при $\operatorname{Im} z \leq 1$. Отсюда и из того факта, что $|U(z)| = 1$ при $z \in \mathbb{R}$, имеем $U'(x) \neq 0$. Учитывая последнее равенство, из геометрического смысла $\arg U'(x)$ находим $\arg U'(x) = \arg U(x) - \pi/2$, т. е. $iU'(x)/U(x) > 0$. Отсюда и из (5) приходим к строгому неравенству (4).

Применяя доказанное к функции $g(z - ik)$, где $k > 0$, убеждаемся в справедливости (4) в нижней полуплоскости. По принципу максимума равенство в (4) при $\operatorname{Im} z < 0$ влечет тождество $g'(z)/g(z) \equiv \mathrm{const}$.

Лемма 6. *Если $\omega(z) \in \mathscr{P}_\sigma$ и $f(z) \in \mathscr{E}_\tau(\omega)$, то при $\operatorname{Im} z \leq 0$, $\omega(z) \neq 0$, и $\operatorname{Im}\alpha < \frac{\sigma-\tau}{2}$ имеет место неравенство*

$$|f'(z) - \alpha f(z)| < |\omega'(z) - \alpha\omega(z)|\,. \tag{6}$$

Доказательство. Положим $\omega_0(z) = \omega(z)e^{-\alpha z}$, $f_0(z) = f(z)e^{-\alpha z}$, где $\operatorname{Im}\alpha < \frac{\sigma-\tau}{2}$. Очевидно, что

$$h_{\omega_0(z)}(-\pi/2) = \sigma - \operatorname{Im}\alpha > (\sigma+\tau)/2 \\ = \tau + (\sigma-\tau)/2 \geq h_{\omega(z)}(\pi/2) + \operatorname{Im}\alpha = h_{\omega_0(z)}(\pi/2).$$

Следовательно, $\omega_0(z) \in \mathscr{P}$. К функциям $\bar{f}_0(z)$ и $\omega_0(z)$ применима лемма 1. По данной лемме ввиду неравенства $h_{\bar{f}_0(z)}(-\pi/2) - h_{\omega_0}(-\pi/2) = h_f(\pi/2) - \sigma + 2\operatorname{Im}\alpha \leq \tau - \sigma + 2\operatorname{Im}\alpha \leq 0$ имеем $|\bar{f}_0(z)/\omega_0(z)| \leq 1$ при $\operatorname{Im} z \leq 0$. Применяя лемму 2 к функциям $\omega(z)$ и $f(z)$, получим $|f_0(z)/\omega_0(z)| = |f(z)/\omega(z)| \leq 1$ при $\operatorname{Im} z \leq 0$. Следовательно, степень функции $f_0(z)$ не превосходит степени функции $\omega_0(z)$. Применяя лемму 3 к функциям $\omega_0(z)$ и $f_0(z)$, получим (6). Докажем что неравенство строгое. Имеем

$$\operatorname{Im}\frac{\omega'(z)}{\omega(z)} \geq \frac{\sigma - h_\omega(\pi/2)}{2} \geq \frac{\sigma-\tau}{2} \quad \text{при } \operatorname{Im} z \leq 0,\ \omega(z) \neq 0, \tag{7}$$

где первое неравенство выполняется по лемме 5, а второе очевидно. Следовательно, правая часть (6) отлична от нуля. По принципу максимума модуля равенство в (6) при некоторых α, $\operatorname{Im}\alpha < \frac{\sigma-\tau}{2}$, и z, $\operatorname{Im} z \leq 0$, $\omega(z) \neq 0$, влечет равенство в (6) при любом комплексном α. Очевидно, в этом случае $f(z) = \nu\omega(z)$ и $f'(z) = \nu\omega'(z)$, где $|\nu| = 1$. В случае $z \in \mathbb{R}$ это противоречит лемме 4. В случае $\operatorname{Im} z < 0$ равенство $|f(z)| = |\omega(z)|$ в силу леммы 2 и принципа максимума модуля противоречит условию $|f(z)| \not\equiv |\omega(z)|$ класса $\mathscr{E}_\tau(\omega)$.

Лемма 7. *Пусть* $\omega(z) \in \mathscr{P}_\sigma$ *и* $f(z) \in \mathscr{E}_\tau(\omega)$. *Если* $\operatorname{Im}\frac{\omega'(\zeta)}{\omega(\zeta)} = \frac{\sigma-\tau}{2}$ *при некотором* ζ, $\operatorname{Im}\zeta \leq 0$, $\omega(\zeta) \neq 0$, *то* $|e^{i(\sigma-\tau)z}\overline{\omega}(z)| \equiv |\omega(z)|$ *и* $f(z)/\omega(z) \equiv \mathrm{const}$, $|\mathrm{const}| < 1$.

Доказательство. Обозначим $\omega_*(z) = e^{i(\sigma-\tau)z}\overline{\omega}(z)$. Пусть $\operatorname{Im}\frac{\omega'(\zeta)}{\omega(\zeta)} = \frac{\sigma-\tau}{2}$ при некотором ζ, $\operatorname{Im}\zeta \leq 0$, $\omega(\zeta) \neq 0$. Тогда в точке $z = \zeta$ неравенства (7) превращаются в равенства. По лемме 5 функция $\omega(z)$ может иметь только вещественные нули. Кроме того, $h_\omega(\pi/2) = \tau$, и, следовательно, $h_{\omega_*}(-\pi/2) = h_\omega(-\pi/2)$. В силу леммы 1 $|\omega_*(z)/\omega(z)| \leq 1$ и $|\omega(z)/\omega_*(z)| \leq 1$ при $\operatorname{Im} z \leq 0$, т. е. $|\omega_*(z)| \equiv |\omega(z)|$. К функциям $\bar{f}(z)$ и $\overline{\omega}(z)$ применима лемма 1. Согласно этой лемме ввиду неравенства $h_f(\pi/2) \leq \tau = h_\omega(\pi/2)$ имеем $|f(z)/\omega(z)| \leq 1$ при $\operatorname{Im} z > 0$. По лемме 2 это неравенство выполняется в нижней полуплоскости. Остается воспользоваться теоремой Лиувилля.

Покажем, что если $\omega(z) \in \mathscr{P}_\sigma$ и $\tau \in [h_\omega(\pi/2), \sigma]$, то функция вида

$$f(z) = c_1\omega(z) + c_2 e^{i(\sigma-\tau)z}\overline{\omega}(z), \quad |c_1| + |c_2| = 1, \tag{8}$$

такая, что $f(z) \not\equiv 0$ и $|f(z)| \not\equiv |\omega(z)|$, принадлежит классу $\mathscr{E}_\tau(\omega)$. Обозначим $\omega_*(z) = e^{i(\sigma-\tau)z}\overline{\omega}(z)$. Очевидно, что $|\omega_*(z)| \leq |\overline{\omega}(z)|$ при $\operatorname{Im} z > 0$. По лемме 1 $|\omega_*(z)| \leq |\omega(z)|$ при $\operatorname{Im} z \leq 0$. Следовательно, степень функции $f(z)$ не превосходит степени функции $\omega(z)$. Имеем $h_f(\pi/2) \leq \max\{h_\omega(\pi/2), h_{\omega_*}(\pi/2)\}$, причем если $h_\omega(\pi/2) \neq h_{\omega_*}(\pi/2)$, то имеет место равенство (см. [2, с. 73]). Ясно, что $h_{\omega_*}(\pi/2) = \tau$. Если $h_\omega(\pi/2) = \tau$, то $h_f(\pi/2) \leq \tau$ и равенство (3) выполняется. Если $h_\omega(\pi/2) < \tau$, то $h_f(\pi/2) = h_{\omega_*}(\pi/2) = \tau$, что также влечет (3).

Лемма 8. *Пусть* $\omega(z) \in \mathscr{P}_\sigma$ *и* $f(z) \in \mathscr{E}_\tau(\omega)$. *Если* $f'(x) - \alpha f(x) = \omega'(x) - \alpha\omega(x) \neq 0$ *при некоторых* $x \in \mathbb{R}$, $\omega(x) \neq 0$, *и* α, $\operatorname{Im}\alpha = \frac{\sigma-\tau}{2}$, *то* $f(z)$ *имеет вид* (8), *где* $c_1 \geq 0$ *и* $\arg c_2 = 2\arg[\omega'(x) - \alpha\omega(x)] - (\sigma - \tau)x$.

Доказательство. Докажем лемму сначала в случае $\tau = \sigma$. Положим

$$\omega_0(z) = \omega(z)e^{-\alpha z}, \quad f_0(z) = f(z)e^{-\alpha z}, \quad \text{где } \alpha \in \mathbb{R}.$$

В силу леммы 2 $|f(z)| \leq |\omega(z)|$ и $|\bar{f}(z)| \leq |\omega(z)|$ при $\operatorname{Im} z \leq 0$. Так как $\bar{f}_0(z) = \bar{f}(z)e^{-\alpha z}$, эти неравенства выполняются и для функций $\omega_0(z)$ и $f_0(z)$. Следовательно, степень функции $f_0(z)$ не превосходит степени $\omega_0(z)$. Пусть $f_0'(x) = \omega_0'(x) \neq 0$ при некотором $x \in \mathbb{R}$, $\omega(x) \neq 0$. По лемме 3 $f_0(z) = c_1\omega_0(z) + c_2\overline{\omega}_0(z)$, т. е. $f(z) = c_1\omega(z) + c_2\overline{\omega}(z)$, где $|c_1| + |c_2| = 1$, $c_2 \neq 0$, так как в противном случае нарушается условие $|f(z)| \not\equiv |\omega(z)|$ класса $\mathscr{E}_\tau(\omega)$. Остается заметить, что если $c_1\omega_0'(x) + c_2\overline{\omega}_0'(x) = \omega_0'(x) \neq 0$, где $|c_1| + |c_2| = 1$, $c_2 \neq 0$, то $c_1 \geq 0$ и $\arg c_2 = 2\arg[\omega_0'(x)]$.

Пусть $\sigma \neq \tau$. Обозначим $\omega_1(z) = \omega(z)e^{-i\frac{\sigma-\tau}{2}z}$, $f_1(z) = f(z)e^{-i\frac{\sigma-\tau}{2}z}$. Очевидно, что $\omega_1(z) \in \mathscr{P}_{\frac{\sigma+\tau}{2}}$ и

$$h_{\bar{f}_1}(-\pi/2) = h_{f_1}(\pi/2) = h_f(\pi/2) + (\sigma-\tau)/2 \leq \tau + (\sigma-\tau)/2 = (\sigma+\tau)/2.$$

По лемме 1 $|\bar{f}_1(z)/\omega_1(z)| \leq 1$ при $\operatorname{Im} z \leq 0$. По лемме 2 $|f_1(z)/\omega_1(z)| = |f(z)/\omega(z)| \leq 1$ при $\operatorname{Im} z \leq 0$. Следовательно, степень функции $f_1(z)$ не превосходит степени функции $\omega_1(z)$. Далее,

$$\max\{h_{\omega_1}(\pi/2),\, h_{f_1}(\pi/2)\} = \max\{h_\omega(\pi/2),\, h_f(\pi/2)\} + \frac{\sigma-\tau}{2} = \tau + \frac{\sigma-\tau}{2} = \frac{\sigma+\tau}{2}.$$

Таким образом, $f_1(z) \in \mathscr{E}_{\frac{\sigma+\tau}{2}}(\omega_1)$. Не составляет труда проверить, что доказанная часть леммы применительно к функциям $\omega_1(z)$ и $f_1(z)$ дает требуемое.

Целую функцию $f(z)$ будем называть *вещественной*, если $f(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}$. Отметим, что любая целая функция $\omega(z)$ может быть представлена в виде $\omega(z) = p(z) + iq(z)$, где $p(z)$ и $q(z)$ — вещественные целые функции, определяемые равенствами $p(z) = [\omega(z) + \overline{\omega}(z)]/2$, $q(z) = [\omega(z) - \overline{\omega}(z)]/(2i)$.

Лемма 9. *Пусть* $\omega(z) = p(z) + iq(z) \in \mathscr{P}$, *где* $p(z)$ *и* $q(z)$ — *вещественные целые функции, не равные тождественно нулю. Тогда* $p(z)$ *и* $q(z)$ *представимы в виде* $p(z) = R(z)p_1(z)$, $q(z) = R(z)q_1(z)$, *где* $R(z)$, $p_1(z)$, $q_1(z)$ — *целые функции, все нули которых вещественны, нули функций* $p_1(z)$ *и* $q_1(z)$ *простые и между каждыми двумя нулями* $p_1(z)$ *лежит нуль* $q_1(z)$, $h_p(\theta) \equiv h_q(\theta)$.

Доказательство. В случае $p(z)/q(z) \not\equiv \text{const}$ данная лемма непосредственно вытекает из результата Б. Я. Левина [2, с. 415, теорема 7]. В случае $q(z) \equiv Cp(z)$, $C = \text{const}$, полагаем $R(z) = p(z)$, $p_1(z) \equiv 1$, $q_1(z) \equiv C$.

Лемма 10. *Если* $\omega(z) \in \mathscr{P}_\sigma$ *и* $f(z) \in \mathscr{E}_\tau(\omega)$, *то функция* $g(z) = f(z) + \gamma\omega(z)$, *где* $|\gamma| \geq 1$, *принадлежит классу* $\mathscr{P}$, *причем* $h_g(-\pi/2) - h_g(\pi/2) \geq \sigma - \tau$.

Доказательство. Известно [18, с. 59, лемма 3], что в условиях леммы 2 $f(z) + \gamma\omega(z) \in \mathscr{P}$ при $|\gamma| \geq 1$. Функции $\omega(z)e^{-i\frac{\sigma-\tau}{2}z}$ и $f(z)e^{-i\frac{\sigma-\tau}{2}z}$ удовлетворяют условиям леммы 2 (см. доказательство леммы 8). Применяя данное выше утверждение к этим функциям, находим, что $g(z)e^{-i\frac{\sigma-\tau}{2}z} \in \mathscr{P}$. Следовательно, $h_g(-\pi/2) - \frac{\sigma-\tau}{2} \geq h_g(\pi/2) + \frac{\sigma-\tau}{2}$.

Теорема 1. *Если* $\omega(z) \in \mathscr{P}_\sigma$ *и* $f(z) \in \mathscr{E}_\tau(\omega)$, $\tau \neq \sigma$, *то*

$$|f'(x)| \leq |\omega'(x)| - \frac{\sigma - \tau}{2}(|\omega(x)| - |f(x)|) \quad \text{при } x \in \mathbb{R}. \tag{9}$$

Равенство в (9) *при заданном* $x \in \mathbb{R}$, $\omega(x) \neq 0$, *имеет место тогда и только тогда, когда*

$$\mathrm{Re}\{\omega'(x)/\omega(x)\} = 0 \tag{10}$$

и $f(z)$ — *функция вида* (8), *где* $|c_1| \geq |c_2|$, $\frac{c_1}{c_2}\frac{\omega(x)}{e^{i(\sigma-\tau)x}\overline{\omega}(x)} < 0$.

Доказательство. Зафиксируем произвольно $x \in \mathbb{R}$, $\omega(x) \neq 0$. В силу леммы 5 имеем $\mathrm{Im}\{\omega'(x)/\omega(x)\} \geq (\sigma - \tau)/2$. Значит, $|\omega'(x)| \geq \frac{\sigma-\tau}{2}|\omega(x)|$. Минимизируя левую и правую части неравенства (6) по α, $|\alpha| = \frac{\sigma-\tau}{2}$, получим (9). Пусть имеет место равенство в (9). Это влечет равенство в (6) при α, $|\alpha| = \frac{\sigma-\tau}{2}$, минимизирующем правую часть (6). На окружности $\left\{\alpha : |\alpha| = \frac{\sigma-\tau}{2}\right\}$ равенство в (6) может достигаться только в точке $\alpha = i\frac{\sigma-\tau}{2}$. Следовательно, $\arg\omega'(x) = \arg(i\omega(x))$, что доказывает (10). Если $\mathrm{Im}\,\frac{\omega'(x)}{\omega(x)} = \frac{\sigma-\tau}{2}$, то по лемме 7

$$\eta e^{i(\sigma-\tau)z}\overline{\omega}(z) \equiv \omega(z), \ |\eta| = 1, \quad f(z) \equiv \nu c\omega(z), \ |\nu| = 1, \ 0 < c < 1. \tag{11}$$

Отсюда приходим к представлению (8), где $c_1 = \nu\frac{1+c}{2}$, $c_2 = -\nu\frac{1-c}{2}\eta$. Пусть $\mathrm{Im}\,\frac{\omega'(x)}{\omega(x)} > \frac{\sigma-\tau}{2}$. Из леммы 8 и равенства в (6) при $\alpha = i\frac{\sigma-\tau}{2}$ находим, что $f(z)$ имеет вид (8), причем если $c_1 \neq 0$, то

$$\begin{aligned}\arg\frac{c_2}{c_1} &= 2\arg\left[\omega'(x) - i\frac{\sigma-\tau}{2}\omega(x)\right] - (\sigma-\tau)x \\ &= 2\arg\left\{\frac{\omega(x)}{i}\left[\frac{\omega'(x)}{i\omega(x)} - \frac{\sigma-\tau}{2}\right]\right\} - (\sigma-\tau)x = \arg\frac{\omega(x)}{e^{(\sigma-\tau)x}\overline{\omega}(x)} - \pi.\end{aligned}$$

Последнее равенство выполняется ввиду (10). Таким образом, $\frac{c_1}{c_2}\frac{\omega(x)}{e^{i(\sigma-\tau)x}\overline{\omega}(x)} \leq 0$. С учетом (10) непосредственно проверяется, что в этом случае равенство в (9) справедливо тогда и только тогда, когда $|c_1| \geq |c_2|$. Теорема доказана.

Следствие 1. *В классе целых функций* $f(z)$ *конечной степени* σ *таких, что* $|f(x)| \leq 1$ *при* $x \in \mathbb{R}$ *и* $\min\{h_f(\pi/2), h_f(-\pi/2)\} = \tau$, *где* $-\sigma < \tau \leq \sigma$, *имеет место неравенство*

$$|f'(x)| \leq \sigma(1 + |f(x)|)/2 + \tau(1 - |f(x)|)/2 \quad \text{при } x \in \mathbb{R}.$$

Равенство при заданном $x \in \mathbb{R}$ *имеет место для функций вида*

$$f(z) = c_1e^{i\sigma z} + c_2e^{-i\tau z}, \quad |c_1| + |c_2| = 1, \quad |c_1| \geq |c_2|, \quad e^{i(\sigma+\tau)x}c_1/c_2 < 0, \tag{12}$$

$$f(z) = c_1e^{i\tau z} + c_2e^{-i\sigma z}, \quad |c_1| + |c_2| = 1, \quad |c_1| \leq |c_2|, \quad e^{i(\sigma+\tau)x}c_1/c_2 < 0,$$

и только для них.

Доказательство. Если $\tau < \sigma = h_f(-\pi/2)$, то к функциям $f(z)$ и $\omega(z) = e^{i\sigma z}$ применима теорема 1. В силу данной теоремы выполняется доказываемое неравенство с равенством для функций вида (12) и только для них. В случае $\tau < \sigma = h_f(\pi/2)$ применяем доказанное к функции $\overline{f}(z)$. Если $\tau = \sigma$, то утверждение легко установить из леммы 3, где полагаем $\omega(z) = e^{i\sigma z}$.

Теорема 2. *Если $\omega(z) \in \mathscr{P}_\sigma$ и $f(z) \in \mathscr{E}_0(\omega)$, то при $x \in \mathbb{R}$, $f(x) \neq 0$, имеем*

$$\left|\frac{f'(x)}{f(x)} - \overline{\frac{\omega'(x)}{\omega(x)}} - i\sigma\right| + \left|\frac{f'(x)}{f(x)} - \frac{\omega'(x)}{\omega(x)}\right| \le 2\frac{|\omega(x)|}{|f(x)|}\left[\operatorname{Im}\frac{\omega'(x)}{\omega(x)} - \frac{\sigma}{2}\right], \tag{13}$$

$$|f(x)|\left|\operatorname{Im}\frac{f'(x)}{f(x)} - \frac{\sigma}{2}\right| \le |\omega(x)|\left[\operatorname{Im}\frac{\omega'(x)}{\omega(x)} - \frac{\sigma}{2}\right]. \tag{14}$$

При заданном $x \in \mathbb{R}$, $f(x) \neq 0$, равенство в (13) *имеет место тогда и только тогда, когда либо $|f(x)| = |\omega(x)|$, либо*

$$f(z) = c_1\omega(z) + c_2 e^{i\sigma z}\overline{\omega}(z), \quad |c_1| + |c_2| = 1. \tag{15}$$

Равенство в (14) *имеет место тогда и только тогда, когда $f(z)$ — функция вида* (15)*, где $|c_1| \neq |c_2|$, $\frac{c_1}{c_2}\frac{\omega(x)}{e^{i\sigma x}\overline{\omega}(x)} \le 0$.*

Доказательство. Зафиксируем произвольно $x \in \mathbb{R}$, $f(x) \neq 0$. В случае $\operatorname{Im}\frac{\omega'(x)}{\omega(x)} = \frac{\sigma}{2}$ доказательство тривиально ввиду леммы 7. Пусть $\operatorname{Im}\frac{\omega'(x)}{\omega(x)} > \frac{\sigma}{2}$. Не составляет труда доказать формулу

$$\sup_{\operatorname{Im}\alpha = a}\left|\frac{u-\alpha}{v-\alpha}\right| = \frac{|v - \bar{u} - i2a| + |u - v|}{2|\operatorname{Im} v - a|},$$

справедливую при любых $a \in \mathbb{R}$, u, $v \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Im} v \neq a$. По лемме 6 $\sup\limits_{\operatorname{Im}\alpha = \sigma/2} |f'(x) - \alpha f(x)|/|\omega'(x) - \alpha\omega(x)| \le 1$, что равносильно (13). Если $|f(x)| = |\omega(x)|$, то равенство в последнем неравенстве очевидно. Если $|f(x)| \neq |\omega(x)|$, то по лемме 8 для равенства в (13) необходимо, чтобы функция $f(z)$ имела вид (15). Достаточность проверяется непосредственно.

Обозначим $E_1 = \omega'(x)/\omega(x) - \overline{f'(x)/f(x)} - i\sigma$, $E_2 = f'(x)/f(x) - \omega'(x)/\omega(x)$. Ввиду (13)

$$\left|\operatorname{Im}\frac{f'(x)}{f(x)} - \frac{\sigma}{2}\right| = \frac{|E_1 + E_2|}{2} \le \frac{|E_1| + |E_2|}{2} \le \frac{|\omega(x)|}{|f(x)|}\left[\operatorname{Im}\frac{\omega'(x)}{\omega(x)} - \frac{\sigma}{2}\right],$$

что доказывает (14). В случае $|f(z)| \equiv |e^{i\sigma z}\overline{\omega}(z)|$ утверждение о равенстве очевидно. Пусть $|f(z)| \not\equiv |e^{i\sigma z}\overline{\omega}(z)|$. Равенство в (14) имеет место тогда и только тогда, когда выполняется равенство в (13) и одно из следующих условий: $E_1 = 0$, $E_2 = 0$,

$$\arg E_1 = \arg E_2 \quad (E_1 \neq 0,\ E_2 \neq 0). \tag{16}$$

Покажем, что в случае $|f(x)| = |\omega(x)|$ данные равенства невозможны. Для функции $f_*(z) = e^{i\sigma z}\bar{f}(z)$ имеем $h_{f_*}(\pi/2) = h_f(-\pi/2) - \sigma \le 0$, $h_{f_*}(-\pi/2) = \sigma + h_f(\pi/2) \le \sigma$, где первое неравенство вытекает из леммы 2, а второе очевидно. Применяя лемму 1 к функциям $f_*(z)$ и $\omega(z)$, а затем к $\bar{f}_*(z)$ и $\omega(z)$, находим, что степень $f_*(z)$ не превосходит степени $\omega(z)$. Таким образом, функции $f_*(z)$ и $\omega(z)$ удовлетворяют условиям леммы 2. Заметим, что $\frac{f_*'(x)}{f_*(x)} = \overline{\frac{f'(x)}{f(x)}} + i\sigma$. Если $|f(x)| = |\omega(x)|$, то равенство $E_1 = 0$, равносильное равенству $\frac{f_*'(x)}{f_*(x)} = \frac{\omega'(x)}{\omega(x)}$, противоречит лемме 4. Равенство $E_2 = 0$ также противоречит лемме 4 применительно к функциям $f(z)$ и $\omega(z)$. В случае $|f(x)| = |\omega(x)|$ невозможно и (16), ибо $\operatorname{Re} E_1 = -\operatorname{Re} E_2$, а в силу (14) $\operatorname{Im} E_1 \ge 0$ и $\operatorname{Im} E_2 \le 0$. Таким образом, для равенства в (14) необходимо, чтобы $f(z)$ имела вид (15). Для функции такого вида непосредственно находим, что

$$E_1\bar{f}(x) = i\bar{c}_1\overline{\omega}(x)\left[2\operatorname{Im}\frac{\omega'(x)}{\omega(x)} - \sigma\right], \quad E_2 f(x) = -ic_2 e^{i\sigma x}\overline{\omega}(x)\left[2\operatorname{Im}\frac{\omega'(x)}{\omega(x)} - \sigma\right].$$

Следовательно, $E_2 \neq 0$, $E_1 \neq 0$, $\overline{c}_1 f(x)E_2 = -c_2 e^{i\sigma x}\bar{f}(x)E_1$ и (16) равносильно условию $c_1c_2e^{i\sigma x}\bar{f}(x)/f(x) < 0$. Не составляет труда проверить, что данное условие можно записать в виде $|c_1| \neq |c_2|$, $\frac{c_1}{c_2}\frac{\omega(x)}{e^{i\sigma x}\overline{\omega}(x)} < 0$. Теорема доказана.

Лемма 11. *Пусть* $\omega(z) \in \mathscr{P}_\sigma$, $\sigma > 0$, $h_\omega(\pi/2) \leq 0$, $\omega(z)/e^{i\sigma z} \not\equiv \mathrm{const}$. *Обозначим* $\delta = \sigma - h_{\omega'(z)-i\sigma\omega(z)}(-\pi/2)$ $(\delta \geq 0)$. *Тогда*

$$|\omega'(z)| \geq |e^{i\delta z}||\omega'(z) - i\sigma\omega(z)| \quad \text{при } \operatorname{Im} z < 0. \tag{17}$$

Если в (17) *достигается равенство, то* $\delta > 0$ *и*

$$\omega(z) = C(e^{i\delta z} + \beta)^{\sigma/\delta}, \quad C = \mathrm{const}, \ |\beta| = 1 \ (\sigma/\delta \in \mathbb{N}). \tag{18}$$

Доказательство. В силу леммы 5 при $\operatorname{Im} z \leq 0$, $\omega(z) \neq 0$, справедливо неравенство $\operatorname{Im}\{\omega'(z)/\omega(z)\} \geq \sigma/2$, которое можно записать в виде $|\omega'(z)/\omega(z)| \geq |\omega'(z)/\omega(z) - i\sigma|$. Это доказывает (17) при $z \in \mathbb{R}$. Из (2) и соотношения $|\omega'(z)| \geq \frac{\sigma}{2}|\omega(z)|$ при $\operatorname{Im} z < 0$ следует, что $h_{\omega'}(-\pi/2) = \sigma$. Применение леммы 1 к функциям $f(z) = \omega'(z) - i\sigma\omega(z)$ и $\omega'(z)$ дает (17) в нижней полуплоскости. Равенство в (17) по принципу максимума модуля влечет тождество $\beta\omega'(z) + e^{i\delta z}[\omega'(z) - i\sigma\omega(z)] \equiv 0$ при некотором β, $|\beta| = 1$. Решая данное дифференциальное уравнение, получим (18).

Лемма 12. *Пусть* $\omega(z) \in \mathscr{P}_\sigma$, $\sigma > 0$, *и* $f(z) \in \mathscr{E}_0(\omega)$. *Обозначим* $\delta = \sigma - \max\{h_{\omega'(z)-i\sigma\omega(z)}(-\pi/2), h_{f'(z)-i\sigma f(z)}(-\pi/2)\}$ $(0 \leq \delta \leq \sigma)$, *если* $\omega(z)/e^{i\sigma z} \not\equiv \mathrm{const}$, $\delta = \sigma - h_{f'(z)-i\sigma f(z)}(-\pi/2)$, *если* $\omega(z)/e^{i\sigma z} \equiv \mathrm{const}$. *Тогда*

$$|\beta f'(z) + e^{i\delta z}[f'(z) - i\sigma f(z)]| < |\beta\omega'(z) + e^{i\delta z}[\omega'(z) - i\sigma\omega(z)]| \tag{19}$$

при $\operatorname{Im} z < 0$ *и* $|\beta| > 1$.

Доказательство. Соотношения $0 \leq \delta \leq \sigma$ вытекают из (1) и (2). Обозначим $f_0(z) = \beta f'(z) + e^{i\delta z}[f'(z) - i\sigma f(z)]$, $\omega_0(z) = \beta\omega'(z) + e^{i\delta z}[\omega'(z) - i\sigma\omega(z)]$. Из (6), где полагаем $\alpha = \frac{i\sigma}{\beta/e^{i\delta x}+1}$, следует неравенство $|f_0(x)| \leq |\omega_0(x)|$ при $x \in \mathbb{R}$. В силу леммы 2 и неравенства (2) $h_{f'}(-\pi/2) \leq \sigma$. Следовательно, $h_{f_0}(-\pi/2) \leq \sigma$. Ввиду леммы 11 $|\beta\omega'(z) + e^{i\delta z}[\omega'(z) - i\sigma\omega(z)]| \geq |\omega'(z)|(|\beta| - 1) \neq 0$ при $\operatorname{Im} z < 0$, $|\beta| > 1$. Отсюда в силу равенства $h_{\omega'}(-\pi/2) = \sigma$ находим, что $h_{\omega_0}(-\pi/2) = \sigma$. Применяя лемму 1 к функциям $f_0(z)$ и $\omega_0(z)$, получим (19). Докажем, что неравенство строгое. Предположим, что в (19) имеет место равенство при некоторых β, $|\beta| > 1$, и z, $\operatorname{Im} z < 0$. По принципу максимума модуля это влечет равенство в (19) при любом комплексном β. Нетрудно проверить, что в этом случае $|f(z)| = |\omega(z)|$. Данное равенство в силу леммы 2 и принципа максимума модуля противоречит условию $|f(z)| \not\equiv |\omega(z)|$ класса $\mathscr{E}_0(\omega)$.

Теорема 3. *Пусть выполняются условия леммы* 12, *где* $\delta > 0$, *и пусть* $k > 0$ — *произвольно фиксированное число. Тогда при* $\operatorname{Im} z \leq -k$ *и* α, $\left|\alpha - i\frac{\sigma e^{2k\delta}}{e^{2k\delta}-1}\right| \geq \frac{\sigma e^{k\delta}}{e^{2k\delta}-1}$, *имеет место неравенство* $|f'(z) - \alpha f(z)| \leq |\omega'(z) - \alpha\omega(z)|$.

Доказательство. Зафиксируем произвольно z, $\operatorname{Im} z \leq -k$. Введем функцию $\alpha(\zeta) = \frac{i\sigma}{1+\zeta}$. В силу леммы 12 $|f'(z) - \alpha(\zeta)f(z)| \leq |\omega'(z) - \alpha(\zeta)\omega(z)|$ при

$|\zeta| > |e^{-i\delta z}|$. Так как $e^{-k\delta} \geq |e^{-i\delta z}|$, это неравенство выполняется при $|\zeta| \geq e^{-k\delta}$. Доказательство завершает непосредственно проверяемое равенство

$$\alpha(|\zeta| \geq r^{-1}) = \{w : |w - i\sigma r^2/(r^2-1)| > \sigma r/(r^2-1)\} \quad \text{при } r > 1.$$

Лемма 13. *Если в условиях леммы 12* $\delta > 0$ *и*

$$\beta f'(z) + e^{i\delta z}[f'(z) - i\sigma f(z)] \equiv \beta\omega'(z) + e^{i\delta z}[\omega'(z) - i\sigma\omega(z)] \not\equiv 0 \qquad (20)$$

при некотором β, $|\beta| = 1$, *то функции* $\omega(z)$ *и* $f(z)$ *представляются в виде*

$$\omega(z) = Ce^{i\sigma z/2}\cos^{\sigma/\delta-1}\frac{\delta z - \arg\beta}{2}\left[s(z) + i\cos\frac{\delta z - \arg\beta}{2}\right], \qquad (21)$$

$$f(z) = Ce^{i\sigma z/2}\cos^{\sigma/\delta-1}\frac{\delta z - \arg\beta}{2}\left[s(z) + ic\cos\frac{\delta z - \arg\beta}{2}\right],$$

где $C = \mathrm{const}$, $-1 \leq c < 1$, $s(z)$ — *вещественная целая функция.*

Доказательство. Зафиксируем $x \in \mathbb{R}$, $e^{i\delta x} \neq -\beta$, для которого выражение справа в (20) при $z = x$ не равно нулю. В силу (20) $f'(x) - \alpha f(x) = \omega'(x) - \alpha\omega(x) \neq 0$, где $\alpha = \frac{i\sigma e^{i\delta x}}{\beta + e^{i\delta x}}$. Так как $\operatorname{Im}\alpha = \frac{\sigma}{2}$, по лемме 8

$$f(z) = \frac{1+c}{2}\omega(z) + \frac{1-c}{2}\nu^2 e^{i\sigma z}\overline{\omega}(z), \quad \text{где } -1 \leq c < 1,\ |\nu| = 1. \qquad (22)$$

Следовательно, $f(z) - \omega(z) \equiv \frac{1-c}{2}\nu e^{i\sigma z/2}[\nu e^{i\sigma z/2}\overline{\omega}(z) - \overline{\nu}e^{-i\sigma z/2}\omega(z)]$. С другой стороны, непосредственно из (20) находим, что $f(z) - \omega(z) \equiv C(e^{i\delta z} + \beta)^{\sigma/\delta}$, $C = \mathrm{const}$. Таким образом, полагая $\overline{\nu}e^{-i\sigma z/2}\omega(z) = p(z) + iq(z)$, где $p(z)$ и $q(z)$ — вещественные целые функции, имеем

$$q(z) = \mathrm{const}\, e^{-i\sigma z/2}(e^{i\delta z} + \beta)^{\sigma/\delta} = A\cos^{\sigma/\delta}\frac{\delta z - \arg\beta}{2}, \quad A \in \mathbb{R}\setminus\{0\}.$$

Отметим, что $p(z) \not\equiv 0$, ибо в противном случае $\omega(z)/(e^{i\delta z} + \beta)^{\sigma/\delta} \equiv \mathrm{const}$, что противоречит условию справа в (20). Так как $\overline{\nu}e^{-i\sigma z/2}\omega(z) \in \mathscr{P}$, по лемме 9 дробь $q(z)/p(z)$ имеет на вещественной оси лишь простые нули. Следовательно, функция $s(z) = p(z)/\cos^{\sigma/\delta-1}\frac{\delta z - \arg\beta}{2}$ целая. Таким образом, представление (21) доказано. Представление для функции $f(z)$ вытекает из (22).

Лемма 14. *Пусть* $\omega(z) \in \mathscr{P}_\sigma$, $f(z) \in \mathscr{E}_\tau(\omega)$, *и пусть* $|e^{i(\sigma-\tau)z}[\bar{f}(z) - \overline{\omega}(z)]| \equiv |f(z) - \omega(z)|$. *Тогда* $f(z)$ *имеет вид* (8).

Доказательство. Докажем лемму сначала в случае $\tau = \sigma$. Из данного тождества следует, что $\overline{\nu}f(z) + \nu\bar{f}(z) \equiv \overline{\nu}\omega(z) + \nu\overline{\omega}(z)$ при некотором ν, $|\nu| = 1$. Следовательно, $\overline{\nu}f(z) = s(z) + it_1(z)$ и $\overline{\nu}\omega(z) = s(z) + it_2(z)$, где $s(z)$, $t_1(z)$, $t_2(z)$ — вещественные целые функции. Согласно лемме 10 $\overline{\nu}[f(z) + \gamma\omega(z)] = (1+\gamma)s(z) + i[t_1(z) + \gamma t_2(z)] \in \mathscr{P}$ при любом $\gamma > 1$. По лемме 9 функции $t_2(z)$ и $t_1(z) + \gamma t_2(z)$ могут иметь только вещественные нули. Так как $|f(x)| \leq |\omega(x)|$ при $x \in \mathbb{R}$, то $|t_1(x)| \leq |t_2(x)|$ при $x \in \mathbb{R}$. Отсюда и из условия $|f(z)| \not\equiv |\omega(z)|$ следует, что $t_2(z) \not\equiv 0$. Таким образом, $t_1(z)/t_2(z) + \gamma$ — целая функция, не имеющая нулей при любом значении $\gamma > 1$. По теореме Пикара $t_1(z)/t_2(z) \equiv \mathrm{const}$. Отсюда $t_1(z) = ct_2(z)$, где $-1 \leq c < 1$. Таким образом, $2\overline{\nu}f(z) \equiv \overline{\nu}\omega(z) + \nu\overline{\omega}(z) + c[\overline{\nu}\omega(z) - \nu\overline{\omega}(z)]$, откуда приходим к (8).

В случае $\sigma \neq \tau$ применяем доказанную часть леммы к функциям $\omega_1(z) = \omega(z)e^{-i\frac{\sigma-\tau}{2}z} \in \mathscr{P}_{\frac{\sigma+\tau}{2}}$ и $f_1(z) = f(z)e^{-i\frac{\sigma-\tau}{2}z} \in \mathscr{E}_{\frac{\sigma+\tau}{2}}(\omega_1)$ (см. доказательство леммы 8).

Лемма 15. *Пусть* $\omega(z) \in \mathscr{P}_\sigma$ *и* $f(z) \in \mathscr{E}_\tau(\omega)$. *Если*

$$f'(z) - \alpha f(z) \equiv \omega'(z) - \alpha\omega(z) \not\equiv 0 \tag{23}$$

при некотором α, $\operatorname{Im}\alpha = \frac{\sigma-\tau}{2}$, *то* $\sigma = -\tau$ *и* $\omega(z) = Ce^{\alpha z}[az + b - i]$, $C = \mathrm{const}$, $a > 0$, $b \in \mathbb{R}$, $f(z) = Ce^{\alpha z}[az + b - ci]$,$-1 \le c < 1$.

Доказательство. Пусть $\tau = \sigma$ и выполняются условия (23), где $\alpha \in \mathbb{R}$. По лемме 8

$$f(z) = \frac{1+c}{2}\omega(z) + \frac{1-c}{2}\nu^2\overline{\omega}(z), \quad \text{где } -1 \le c < 1,\ |\nu| = 1. \tag{24}$$

Отсюда $f(z) - \omega(z) \equiv \frac{1-c}{2}[\nu^2\overline{\omega}(z) - \omega(z)]$. С другой стороны, из (23) находим, что $[f(z) - \omega(z)]e^{-\alpha z} \equiv \mathrm{const}$. Таким образом, $[\overline{\nu}\omega(z) - \nu\overline{\omega}(z)]e^{-\alpha z} \equiv \mathrm{const} \ne 0$. Следовательно, $\overline{\nu}e^{-\alpha z}\omega(z) = s(z) - Ai$, где $A \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $s(z)$ — вещественная целая функция. Ясно, что $s(z) \not\equiv \mathrm{const}$, ибо в противном случае нарушается условие справа в (23). По лемме 9 функция $s(z)$ либо не имеет нулей, либо имеет один простой вещественный нуль. В первом случае по теореме Адамара о каноническом представлении целой функции конечного порядка [2, с. 38] $s(z) = Ce^{dz}$, где C и d — константы, отличные от нуля. Но это противоречит последнему утверждению леммы 9, в силу которого $h_s(\theta) \equiv 0$. Во втором случае в силу теоремы Адамара и последнего условия $s(z) = a_1 z + b_1$, a_1, $b_1 \in \mathbb{R}$, $a_1 \ne 0$. Отсюда получаем представление для $\omega(z)$, где $a > 0$, так как $\omega(z) \ne 0$ при $\operatorname{Im} z < 0$. Для функции данного вида $h_\omega(-\pi/2) = \operatorname{Im}\alpha = 0$. Следовательно, $\sigma = 0 = -\tau$. Представление для $f(z)$ вытекает из (24).

Для доказательства леммы в случае $\sigma \ne \tau$ нужно применить доказанное утверждение к функциям $\omega_1(z) = \omega(z)e^{-i\frac{\sigma-\tau}{2}z} \in \mathscr{P}_{\frac{\sigma+\tau}{2}}$ и $f_1(z) = f(z)e^{-i\frac{\sigma-\tau}{2}z} \in \mathscr{E}_{\frac{\sigma+\tau}{2}}(\omega_1)$.

Лемма 16. *Пусть* $\omega(z) \in \mathscr{P}_\sigma$, $\sigma > 0$, $h_\omega(\pi/2) \le 0$, $|e^{i\sigma z}\overline{\omega}(z)| \not\equiv |\omega(z)|$. *Обозначим* $\omega_*(z) = e^{i\sigma z}\overline{\omega}(z)$. *Тогда при* $\operatorname{Im} z \le 0$, $\omega(z) \ne 0$, *и* $\operatorname{Im}\alpha \le \sigma/2$ *справедливо неравенство*

$$|\omega_*'(z) - \alpha\omega_*(z)| \le |\omega'(z) - \alpha\omega(z)| \tag{25}$$

с равенством только при $z \in \mathbb{R}$ *и* $\operatorname{Im}\alpha = \sigma/2$.

Доказательство. Очевидно, что $h_{\omega_*}(\pi/2) = 0$. В силу леммы 1 имеем $|\omega_*(z)/\omega(z)| \le 1$ при $\operatorname{Im} z \le 0$ и $|\omega_*(z)/\overline{\omega}(z)| = |e^{i\sigma z}| \le 1$ при $\operatorname{Im} z \ge 0$. Следовательно, степень функции $\omega_*(z)$ не превосходит степени $\omega(z)$. Таким образом, $\omega_*(z) \in \mathscr{E}_0(\omega)$. Лемма 6 влечет неравенство (25), строгое при $\operatorname{Im}\alpha < \sigma/2$. Зафиксируем произвольное α, $\operatorname{Im}\alpha = \sigma/2$. Правая часть (25) отлична от нуля в полуплоскости $\operatorname{Im} z < 0$. Действительно, в противном случае $\operatorname{Im}\frac{\omega'(z)}{\omega(z)} = \frac{\sigma}{2}$ при некотором z, $\operatorname{Im} z < 0$, и по лемме 7 $|\omega_*(z)| \equiv |\omega(z)|$. По принципу максимума модуля равенство в (25) при некотором z, $\operatorname{Im} z < 0$, влечет равенство в (25) при любом комплексном z. Согласно лемме 15 в этом случае $\sigma = 0$, что противоречит условию леммы. При $z \in \mathbb{R}$ и $\operatorname{Im}\alpha = \sigma/2$ (25) превращается в равенство, что проверяется непосредственно.

Лемма 17. *Пусть* $\omega(z) \in \mathscr{P}_\sigma$, $\sigma > 0$, *и* $f(z) \in \mathscr{E}_0(\omega)$. *Положим* $\omega_*(z) = e^{i\sigma z}\overline{\omega}(z)$, $f_*(z) = e^{i\sigma z}\bar{f}(z)$. *Тогда при* $\operatorname{Im} z \le 0$ *и* $\operatorname{Im}\alpha \le \sigma/2$ *имеем*

$$|f_*'(z) - \alpha f_*(z)| + |f'(z) - \alpha f(z)| \le |\omega'(z) - \alpha\omega(z)| + |\omega_*'(z) - \alpha\omega_*(z)|, \tag{26}$$

$$|f_*'(z)-\alpha f_*(z)|-|f'(z)-\alpha f(z)|\le|\omega'(z)-\alpha\omega(z)|-|\omega_*'(z)-\alpha\omega_*(z)|. \qquad (27)$$

Если при заданных $z=\zeta$, $\operatorname{Im}\zeta\le 0$, $\omega(\zeta)\ne 0$, *и* α, $\operatorname{Im}\alpha\le\sigma/2$, *имеет место равенство в* (26), *то либо* $\zeta\in\mathbb{R}$, $|f(\zeta)|=|\omega(\zeta)|$ *и* $\operatorname{Im}\alpha<\sigma/2$, *либо* $f(z)$ — *функция вида* (15). *Если имеет место равенство в* (27), *то либо* $\zeta\in\mathbb{R}$ *и* $\operatorname{Im}\alpha=\sigma/2$, *либо* $\zeta\in\mathbb{R}$, $|f(\zeta)|=|\omega(\zeta)|$, *либо* $f(z)$ — *функция вида* (15).

Доказательство. Зафиксируем ζ, $\operatorname{Im}\zeta\le 0$, и α, $\operatorname{Im}\alpha\le\sigma/2$. Положим

$$\omega_\gamma(z)=f(z)+\gamma\omega(z),\quad f_\gamma(z):=e^{i\sigma z}\overline{\omega}_\gamma(z)=f_*(z)+\bar\gamma\omega_*(z),\quad \text{где } |\gamma|=1.$$

По лемме 10 $\omega_\gamma(z)\in\mathscr{P}$ и $h_{\omega_\gamma}(-\pi/2)\ge\sigma+h_{\omega_\gamma}(\pi/2)=h_{f_\gamma}(-\pi/2)$. В силу леммы 1 $|f_\gamma(z)/\omega_\gamma(z)|\le 1$ при $\operatorname{Im}z\le 0$ и, очевидно, $|f_\gamma(z)/\overline{\omega}_\gamma(z)|=|e^{i\sigma z}|\le 1$ при $\operatorname{Im}z\ge 0$. Следовательно, степень функции $f_\gamma(z)$ не превосходит степени функции $\omega_\gamma(z)$. Таким образом, либо $|f_\gamma(z)|\equiv|\omega_\gamma(z)|$, либо $f_\gamma(z)\in\mathscr{E}_\tau(\omega_\gamma)$, где

$$\tau:=\max\{h_{\omega_\gamma}(\pi/2),\,h_{f_\gamma}(\pi/2)\}=\max\{h_{\omega_\gamma}(\pi/2),\,h_{\omega_\gamma}(-\pi/2)-\sigma\}=h_{\omega_\gamma}(-\pi/2)-\sigma.$$

Так как $h_{\omega_\gamma}(-\pi/2)-\tau=\sigma$, по лемме 6

$$|f_\gamma'(\zeta)-\alpha f_\gamma(\zeta)|\le|\omega_\gamma'(\zeta)-\alpha\omega_\gamma(\zeta)|, \qquad (28)$$

т. е. $|\gamma[f_*'(\zeta)-\alpha f_*(\zeta)]+\omega_*'(\zeta)-\alpha\omega_*(\zeta)|\le|f'(\zeta)-\alpha f(\zeta)+\gamma[\omega'(\zeta)-\alpha\omega(\zeta)]|$. Ввиду произвольности γ, $|\gamma|=1$, отсюда и из леммы 6 вытекают (26) и (27).

Непосредственно проверяется, что при $z=x\in\mathbb{R}$, $\omega(x)\ne 0$, и $\operatorname{Im}\alpha=\sigma/2$ (27) превращается в равенство, а (26) — в неравенство $|f'(x)-\alpha f(x)|\le|\omega'(x)-\alpha\omega(x)|$. Пусть $\operatorname{Im}\alpha=\sigma/2$ и выполняется равенство в последнем неравенстве при некотором $x\in\mathbb{R}$, $\omega(x)\ne 0$. Если $\omega'(x)-\alpha\omega(x)=0$, то $\operatorname{Im}\{\omega'(x)/\omega(x)\}=\sigma/2$. По лемме 7 справедливы тождества (11), где $\tau=0$, в силу которых $f(z)$ может быть представлена в виде (15). Если $\omega'(x)-\alpha\omega(x)\ne 0$, то представление (15) выполняется по лемме 8.

Пусть $\operatorname{Im}\zeta<0$ или $\operatorname{Im}\alpha<\sigma/2$, и пусть выполняется равенство в (26) или в (27). Тогда выполняется равенство в (28) при некотором γ, $|\gamma|=1$. Если $|f_\gamma(z)|\equiv|\omega_\gamma(z)|$, то по лемме 14 $f(z)$ имеет вид (15). Если $\omega_\gamma(\zeta)=0$, то $|f(\zeta)|=|\omega(\zeta)|$. Так как это возможно только при $\zeta\in\mathbb{R}$, то $\operatorname{Im}\alpha<\sigma/2$. Пусть $|f_\gamma(z)|\not\equiv|\omega_\gamma(z)|$ и $\omega_\gamma(\zeta)\ne 0$. По лемме 6 $\operatorname{Im}\alpha=\sigma/2$ и, следовательно, $\operatorname{Im}\zeta<0$. Правая часть (28) не равна нулю, ибо в противном случае $\operatorname{Im}\frac{\omega_\gamma'(\zeta)}{\omega_\gamma(\zeta)}=\frac{\sigma}{2}=\frac{h_{\omega_\gamma}(-\pi/2)-\tau}{2}$ и по лемме 7 $|f_\gamma(z)|\equiv|\omega_\gamma(z)|$. В силу принципа максимума модуля равенство в (28) имеет место при любом комплексном ζ. По лемме 15

$$f(z)+\gamma\omega(z)\equiv Ce^{\alpha z}[az+b-i],\quad \text{где } C=\text{const},\ a>0,\ b\in\mathbb{R}.$$

Докажем невозможность этого тождества. Предполагая противное, имеем $\{e^{-\alpha z}[f(z)+\gamma\omega(z)]\}'/C\equiv\{az+b-i\}'$, т. е. $\omega_0(z)-f_0(z)\equiv a$, где $\omega_0(z)=\{e^{-\alpha z}\omega(z)\}'\gamma/C$, $f_0(z)=-\{e^{-\alpha z}f(z)\}'/C$. Производная функции класса $\mathscr{P}$ принадлежит классу $\mathscr{P}$ [18, с. 61]. Следовательно, $\omega_0(z)\in\mathscr{P}$. Пусть $\omega_0(z)=s(z)+it(z)$, где $s(z)$ и $t(z)$ — вещественные целые функции. Очевидно, $f_0(z)=s(z)-a+it(z)$. По лемме 6 применительно к функциям $\omega(z)$ и $f(z)$ при $x\in\mathbb{R}$ имеем $|f_0(x)|\le|\omega_0(x)|$, т. е. $|s(x)-a|\le|s(x)|$. Отсюда следует, что $s(x)\ne 0$ при $x\in\mathbb{R}$. Но по лемме 9 $s(z)\ne 0$ при $z\notin\mathbb{R}$ и, значит, $s(z)$ не имеет нулей. По теореме Адамара о каноническом представлении целой функции конечного порядка [2, с. 38] $s(z)=Ce^{dz}$, где C и d — вещественные числа. Очевидно, для функции такого вида неравенство $|s(x)-a|\le|s(x)|$ при $x\in\mathbb{R}$ возможно только в случае $d = 0$, т. е. $s(z) \equiv \mathrm{const}$. Если $t(z) \not\equiv 0$, то по лемме 9 $t(z)$ либо не имеет нулей, либо имеет один простой нуль и $h_t(\theta) \equiv 0$. По теореме Адамара $t(z)$ либо линейная, либо постоянная функция. Таким образом, $e^{-\alpha z}\omega(z)$ — полином, что противоречит условию $h_\omega(-\pi/2) = \sigma > 0$. Лемма доказана.

Лемма 18. *В условиях леммы* 17 *при* $\operatorname{Im} z < 0$ *имеем*

$$|f_*(z)| + |f(z)| \le |\omega(z)| + |\omega_*(z)|, \quad |f_*(z)| - |f(z)| \le |\omega(z)| - |\omega_*(z)|.$$

Для равенства в любом из неравенств необходимо представление (15).

Доказательство. При доказательстве леммы 17 установлено, что $|f_*(z) + \bar{\gamma}\omega_*(z)| \le |f(z) + \gamma\omega(z)|$ при $\operatorname{Im} z < 0$, $|\gamma| = 1$ ($|f_\gamma(z)/\omega_\gamma(z)| \le 1$ при $\operatorname{Im} z \le 0$). Отсюда ввиду того, что $|f(z)| < |\omega(z)|$ при $\operatorname{Im} z < 0$, вытекают требуемые неравенства. Равенство в любом из неравенств влечет тождество $|f_*(z) + \bar{\gamma}\omega_*(z)| \equiv |f(z) + \gamma\omega(z)|$ при некотором γ, $|\gamma| = 1$. По лемме 14 для его справедливости необходимо представление (15).

§ 2. Целые функции конечной степени с ограничениями на нули

Лемма 19. *Если для целой функции* $\omega(z)$ *выполняется тождество*

$$\mu \equiv d_1\omega(z) + d_2 e^{i\sigma z}\overline{\omega}(z), \quad |d_1| + |d_2| = 1, \quad \mu, \sigma > 0, \tag{29}$$

то $|d_2| \ne |d_1|$ *и* $\omega(z) = \mu(d_2 e^{i\sigma z} - \bar{d}_1)/(|d_2| - |d_1|)$.

Доказательство. В силу (29) $\mu \equiv \bar{d}_1\overline{\omega}(z) + \bar{d}_2 e^{-i\sigma z}\omega(z)$. Остается сложить левые и правые части последнего тождества и (29), умноженные соответственно на $d_2 e^{i\sigma z}$ и $-\bar{d}_1$.

Лемма 20. *Пусть* $f(z)$ — *целая функция конечной степени* $\sigma > 0$ *такая, что* $h_f(\pi/2) = 0$, $|f(x)| \le 1$ *при* $x \in \mathbb{R}$ *и* $f(z) \ne 0$ *при* $\operatorname{Im} z > 0$. *Обозначим* $\mu = \inf\limits_{x \in \mathbb{R}} |f(x)|$. *Тогда при* $\operatorname{Im} z \le 0$ *и* $\operatorname{Im} \alpha \le \sigma/2$ *имеем*

$$|f'(z) - \alpha f(z)| \le \frac{|e^{i\sigma z}||i\sigma - \alpha| + |\alpha|}{2} - \mu\frac{|e^{i\sigma z}||i\sigma - \alpha| - |\alpha|}{2}. \tag{30}$$

Если при заданных $z = \zeta$, $\operatorname{Im} \zeta \le 0$, *и* α, $\operatorname{Im} \alpha \le \sigma/2$, *имеет место равенство в* (30), *то либо* 1) $f(z)$ — *функция вида*

$$f(z) = c_1 e^{i\sigma z} + c_2, \quad |c_1| + |c_2| = 1, \quad |c_1| \le |c_2|, \tag{31}$$

либо 2) *все нули функции* $f(z)$ *вещественны,* $\zeta \in \mathbb{R}$ *и* $|f(\zeta)| = 1$.

Доказательство. Зафиксируем произвольно ζ, $\operatorname{Im} \zeta \le 0$, и α, $\operatorname{Im} \alpha \le \sigma/2$. Обозначим $f_*(z) = e^{i\sigma z}\bar{f}(z)$. Очевидно, функции $\omega(z) = e^{i\sigma z}$ и $f(z)$ удовлетворяют условиям леммы 17. В силу (26)

$$|f'(\zeta) - \alpha f(\zeta)| + |f_*'(\zeta) - \alpha f_*(\zeta)| \le |e^{i\sigma\zeta}||i\sigma - \alpha| + |\alpha|. \tag{32}$$

По лемме 17 равенство в (32) влечет либо условия $\zeta \in \mathbb{R}$, $|f(\zeta)| = 1$, $\operatorname{Im} \alpha < \sigma/2$, либо представление (31), где неравенство $|c_1| \le |c_2|$ вытекает из ограничения на нули. В силу леммы 1 $|f(z)| \le 1$ при $\operatorname{Im} z > 0$ и $|f(z)| \le |e^{ih_f(-\pi/2)z}|$ при $\operatorname{Im} z \le 0$. Из этих неравенств и из равенства степени функции $f(z)$ числу σ

следует, что $h_f(-\pi/2)=\sigma$. Значит, $f_*(z)\in\mathscr{P}_\sigma$ и $h_{f_*}(\pi/2)=0$. Если $\mu>0$, то функция, тождественно равная μ, принадлежит классу $\mathscr{E}_0(f_*)$. В силу (27)

$$|f'(\zeta)-\alpha f(\zeta)|-|f_*'(\zeta)-\alpha f_*(\zeta)|\le-\mu[|e^{i\sigma\zeta}||i\sigma-\alpha|-|\alpha|]. \tag{33}$$

Если в (33) имеет место равенство при $\zeta\in\mathbb{R}$, $|f(\zeta)|=1$, и $\operatorname{Im}\alpha<\sigma/2$, то по лемме 17 $\mu\equiv d_1f(z)+d_2e^{i\sigma z}\bar{f}(z)$, $|d_1|+|d_2|=1$. По лемме 19 $f(z)=c_1e^{i\sigma z}+c_2$, где c_1 и c_2 — постоянные. Из условия $\sup\limits_{x\in\mathbb{R}}|f(x)|=|f(\zeta)|=1$ находим, что $|c_1|+|c_2|=1$. Если $\mu=0$, то (33) выполняется по лемме 16, в силу которой равенство при $\zeta\in\mathbb{R}$, $|f(\zeta)|=1$ и $\operatorname{Im}\alpha<\sigma/2$ возможно только в случае тождества $|f(z)|\equiv|f_*(z)|$. Данное тождество означает вещественность всех нулей функции $f(z)$. Остается сложить неравенства (32) и (33).

Лемма 21. *В условиях леммы* 20

$$|f(z)|\le\frac{(|e^{i\sigma z}|+1)}{2}-\mu\frac{(|e^{i\sigma z}|-1)}{2}\quad \textit{при } \operatorname{Im}z<0.$$

Равенство влечет представление (31).

Доказательство аналогично доказательству леммы 20 с привлечением леммы 18.

Теорема 4. *Пусть выполнены условия леммы* 20. *Обозначим* $\delta=\min\{\sigma-h_{f'(z)-i\sigma f(z)}(-\pi/2),-h_{f'}(\pi/2)\}$ $(0\le\delta\le\sigma)$. *Тогда при* $\operatorname{Im}z\le0$ *и* $\rho\ge1$ *имеем*

$$\frac{\rho|f'(z)|+|e^{i\delta z}||f'(z)-i\sigma f(z)|}{\sigma}\le\frac{\rho|e^{i\sigma z}|+|e^{i\delta z}|}{2}-\mu\frac{\rho|e^{i\sigma z}|-|e^{i\delta z}|}{2}. \tag{34}$$

Равенство в (34) *при заданных* $z=\zeta$, $\operatorname{Im}\zeta\le0$, *и* $\rho\ge1$ *имеет место тогда и только тогда, когда либо* 1) *все нули функции* $f(z)$ *вещественны,* $\zeta\in\mathbb{R}$ *и* $|f(\zeta)|=1$, *либо* 2) $\zeta\in\mathbb{R}$, $|f(\zeta)|=1$, $\rho=1$, *либо* 3) $f(z)$ *— функция вида* (31), *либо* 4) $\rho=1$, $f(z)$ *с точностью до преобразования поворота имеет вид*

$$f(z)=A\left[\frac{e^{i\sigma z/2}+\beta}{2}\right]^2-\frac{e^{i\sigma z}+\beta^2}{2},\quad 0<A\le1,\ |\beta|=1, \tag{35}$$

$e^{i\sigma\zeta/2}/\beta<0$.

Доказательство. Зафиксируем произвольно ζ, $\operatorname{Im}\zeta\le0$, и $\rho\ge1$. Пусть $|e^{i\delta\zeta}|=1$, т. е. $\zeta\in\mathbb{R}$ или $\delta=0$. Полагая в (30) $\alpha=i\frac{\sigma}{\beta+1}$, $|\beta|\ge1$, $\beta\ne-1$, получим неравенство

$$\frac{|\beta f'(\zeta)+f'(\zeta)-i\sigma f(\zeta)|}{\sigma}\le\frac{|e^{i\sigma\zeta}||\beta|+1}{2}-\mu\frac{|e^{i\sigma\zeta}||\beta|-1}{2}. \tag{36}$$

При β, $|\beta|=\rho$, максимизирующем левую часть (36), получаем (34). Заметим, что при $\beta=-1$ и $\operatorname{Im}\zeta<0$ (36) совпадает с неравенством леммы 21. Очевидно, для равенства в (36) при $\beta=-1$ и $\zeta\in\mathbb{R}$ необходимо, чтобы $|f(\zeta)|=1$. Таким образом, ввиду лемм 20 и 21 для равенства в (34) необходимо выполнение хотя бы одного из условий 1–3 утверждения о равенстве. Достаточность условий 1 и 3 проверяется непосредственно. Пусть выполняются условия 2. Из леммы 1 следует, что $|f(z)|\le1$ при $\operatorname{Im}z\ge0$, т. е. $f(z)$ переводит верхнюю полуплоскость в единичный круг. Отсюда и из условия $|f(\zeta)|=1$ легко находим, что $f'(\zeta)\ne0$ и $\arg f'(\zeta)=\arg f(\zeta)+\pi/2$. Далее, имеем $\operatorname{Im}\frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)}\le\frac{\sigma}{2}$, что вытекает из леммы 5 применительно к $g(z) = \bar{f}(z)$. Таким образом, $0 < -if'(\zeta)/f(\zeta) \le \sigma/2$. Теперь достаточность условий 2 для равенства в (34) проверяется непосредственно. Для завершения доказательства теоремы в случае $\zeta \in \mathbb{R}$ или $\delta = 0$ остается заметить, что для функции вида (35) $\delta = \sigma/2 \ne 0$, а условия 4 при $\zeta \in \mathbb{R}$ влекут выполнение условия 2.

Пусть $\operatorname{Im}\zeta < 0$ и $\delta > 0$. Положим $f_*(z) = e^{i\sigma z}\bar{f}(z)$, $\omega(z) = f(z) + \gamma e^{i\sigma z}$, $\omega_*(z) := e^{i\sigma z}\overline{\omega}(z) = f_*(z) + \bar{\gamma}$, где $|\gamma| = 1$. Очевидно, что $h_\omega(\pi/2) = 0$. Так как $f(z) \in \mathscr{E}_0(e^{i\sigma z})$, по лемме 10 $\omega(z) \in \mathscr{P}_\sigma$. Используя лемму 1, не составляет труда показать, что степень функции $\omega_*(z)$ не превосходит степени функции $\omega(z)$. Таким образом, либо $\omega_*(z) \in \mathscr{E}_0(\omega)$, либо $|\omega_*(z)| \equiv |\omega(z)|$. Непосредственно находим, что $\omega_*'(z) - i\sigma\omega_*(z) = e^{i\sigma z}\bar{f}'(z) - i\sigma\bar{\gamma}$. Отсюда в случае $\sigma + h_{f'}(\pi/2) > 0$ следует равенство $h_{\omega_*'(z)-i\sigma\omega_*(z)}(-\pi/2) = \sigma + h_{f'}(\pi/2)$. Оно справедливо и в случае $\sigma + h_{f'}(\pi/2) = 0$ ввиду (1) и очевидного соотношения $h_{e^{i\sigma z}\bar{f}'(z)-i\sigma\bar{\gamma}}(\pi/2) \le 0$. Кроме того, $h_{\omega'(z)-i\sigma\omega(z)}(-\pi/2) = h_{f'(z)-i\sigma f(z)}(-\pi/2)$. Следовательно,

$$\delta = \sigma - \max\{h_{\omega'(z)-i\sigma\omega(z)}(-\pi/2),\, h_{\omega_*'(z)-i\sigma\omega_*(z)}(-\pi/2)\}.$$

Зафиксируем произвольно β, $|\beta| \ge 1$. Если $|\omega_*(z)| \not\equiv |\omega(z)|$, то к функциям $\omega(z)$ и $\omega_*(z)$ применима лемма 12, в силу которой

$$|\beta f_*'(\zeta) + e^{i\delta\zeta}[f_*'(\zeta) - i\sigma f_*(\zeta)] - \bar{\gamma}e^{i\delta\zeta}i\sigma| \le |\beta f'(\zeta) + e^{i\delta\zeta}[f'(\zeta) - i\sigma f(\zeta)] + \gamma\beta i\sigma e^{i\sigma\zeta}|. \tag{37}$$

Данное неравенство, очевидно, имеет место и в случае $|\omega_*(z)| \equiv |\omega(z)|$. Положим $\widetilde{\omega}(z) = \mu + \nu f_*(z)$, $\widetilde{\omega}_*(z) := e^{i\sigma z}\overline{\widetilde{\omega}}(z) = \mu e^{i\sigma z} + \overline{\nu} f(z)$, где $|\nu| = 1$ ($\mu \ge 0$). Ввиду леммы 1 $|\mu/f_*(z)| < 1$ при $\operatorname{Im} z < 0$, поэтому $\widetilde{\omega}(z) \ne 0$ при $\operatorname{Im} z < 0$. Очевидно, что $h_{\widetilde{\omega}(z)}(-\pi/2) = \sigma$ и $h_{\widetilde{\omega}(z)}(\pi/2) \le 0$. Следовательно, $\widetilde{\omega}(z) \in \mathscr{P}_\sigma$. Используя лемму 1, не составляет труда показать, что степень функции $\widetilde{\omega}_*(z)$ не превосходит степени функции $\widetilde{\omega}(z)$. Ясно, что $h_{\widetilde{\omega}_*(z)}(\pi/2) = 0$. Таким образом, либо $\widetilde{\omega}_*(z) \in \mathscr{E}_0(\widetilde{\omega})$, либо $|\widetilde{\omega}_*(z)| \equiv |\widetilde{\omega}(z)|$. Нетрудно проверить, что $h_{\widetilde{\omega}'(z)-i\sigma\widetilde{\omega}(z)}(-\pi/2) = h_{\nu e^{i\sigma z}\bar{f}'(z)-i\sigma\mu}(-\pi/2) = \sigma + h_{f'}(\pi/2)$, $h_{\widetilde{\omega}_*'(z)-i\sigma\widetilde{\omega}_*(z)}(-\pi/2) = h_{f'(z)-i\sigma f(z)}(-\pi/2)$. Следовательно,

$$\delta = \sigma - \max\{h_{\widetilde{\omega}'(z)-i\sigma\widetilde{\omega}(z)}(-\pi/2),\, h_{\widetilde{\omega}_*'(z)-i\sigma\widetilde{\omega}_*(z)}(-\pi/2)\}.$$

Если $|\widetilde{\omega}_*(z)| \not\equiv |\widetilde{\omega}(z)|$, то к функциям $\widetilde{\omega}(z)$ и $\widetilde{\omega}_*(z)$ применима лемма 12, в силу которой

$$|\beta f'(\zeta) + e^{i\delta\zeta}[f'(\zeta) - i\sigma f(\zeta)] + \nu\beta\mu i\sigma e^{i\sigma\zeta}| \le |\beta f_*'(\zeta) + e^{i\delta\zeta}[f_*'(\zeta) - i\sigma f_*(\zeta)] - \overline{\nu}e^{i\delta\zeta}i\sigma\mu|. \tag{38}$$

Данное неравенство, очевидно, имеет место и в случае $|\widetilde{\omega}_*(z)| \equiv |\widetilde{\omega}(z)|$. Применяя лемму 12 к функциям $e^{i\sigma z}$ и $f(z)$ и учитывая, что $\delta \le \sigma - h_{f'(z)-i\sigma f(z)}(-\pi/2)$, имеем

$$|\beta f'(\zeta) + e^{i\delta\zeta}[f'(\zeta) - i\sigma f(\zeta)]| \le \sigma|\beta e^{i\sigma\zeta}|. \tag{39}$$

В силу леммы 12 для равенства в (39) необходимо, чтобы $\delta = \sigma - h_{f'(z)-i\sigma f(z)}(-\pi/2)$ и $|\beta| = 1$. Кроме того, по принципу максимума модуля равенство в (39) при данном ζ, $\operatorname{Im}\zeta < 0$, влечет равенство в (39) при любом комплексном ζ. Легко проверить, что в этом случае $|f'(x) - \alpha f(x)| = |\{e^{i\sigma x}\}' - \alpha e^{i\sigma x}|$ при любом $x \in \mathbb{R}$ таком, что $e^{i\delta x} \ne -\beta$ и $\alpha = i\sigma e^{i\delta x}/(\beta + e^{i\delta x})$ ($\operatorname{Im}\alpha = \sigma/2$). Применяя лемму 8, заключаем, что для равенства в (39) необходимо представление (31).

Пусть γ реализует минимум правой части (37) при $|\gamma| = 1$ и ν реализует максимум левой части (38) при $|\nu| = 1$. Из (37) и (38) вытекает, что

$$|\beta f'(\zeta) + e^{i\delta\zeta}[f'(\zeta) - i\sigma f(\zeta)]| + |\beta f_*'(\zeta) + e^{i\delta\zeta}[f_*'(\zeta) - i\sigma f_*(\zeta)]| \le \sigma[|\beta||e^{i\sigma\zeta}| + |e^{i\delta\zeta}|],$$

$|\beta f'(\zeta)+e^{i\delta\zeta}[f'(\zeta)-i\sigma f(\zeta)]|-|\beta f'_*(\zeta)+e^{i\delta\zeta}[f'_*(\zeta)-i\sigma f_*(\zeta)]| \le -\mu\sigma[|\beta||e^{i\sigma\zeta}|-|e^{i\delta\zeta}|]$.
Складывая эти неравенства, получим

$$\frac{|\beta f'(\zeta)+e^{i\delta\zeta}[f'(\zeta)-i\sigma f(\zeta)]|}{\sigma} \le \frac{|\beta||e^{i\sigma\zeta}|+|e^{i\delta\zeta}|}{2} - \mu\frac{|\beta||e^{i\sigma\zeta}|-|e^{i\delta\zeta}|}{2}, \qquad (40)$$

что доказывает (34).

Для функции вида (31) равенство в (34) проверяется непосредственно. Пусть представление (31) не имеет места. Тогда в силу леммы 14 $|\omega_*(z)| \not\equiv |\omega(z)|$, поэтому $\omega_*(z) \in \mathscr{E}_0(\omega)$. Пусть имеет место равенство в (34), а значит, и в (40) при некотором β, $|\beta| = \rho$. Очевидно, при данном β имеют место равенства в (37) и (38). Функции $\omega(z)$ и $\omega_*(z)$ удовлетворяют условиям леммы 12, в силу которой для равенства в (37) необходимо, чтобы $|\beta| = 1$. Далее, имеем $\delta \ne \sigma$. Действительно, при $\delta = \sigma$ равенство в (40) означает равенство в (39), для которого необходимо представление (31). В силу строгости (39) правая часть (37) не равна нулю. По принципу максимума модуля равенство в (37) имеет место при любом комплексном ζ. По лемме 13 $\omega(z)$ имеет вид (21). Покажем, что $|\widetilde{\omega}_*(z)| \equiv |\widetilde{\omega}(z)|$. Предположим противное, т. е. что $\widetilde{\omega}_*(z) \in \mathscr{E}_0(\widetilde{\omega})$. Если правая часть (38) равна нулю, то из леммы 11 и принципа максимума модуля легко установить, что $\widetilde{\omega}(z)$ имеет вид (18). Если правая часть (38) отлична от нуля, то, как и для функции $\omega(z)$, доказывается, что $\widetilde{\omega}(z)$ имеет вид (21). Но тогда при x, $e^{i\delta x} = -\beta$, выполняются противоречащие друг другу равенства $|f(x)| = 1$ и $|f(x)| = \mu$. Итак, $|\widetilde{\omega}_*(z)| \equiv |\widetilde{\omega}(z)|$. Тогда $\mu = 0$, ибо в противном случае лемма 14 для функций $f_*(z)$ и $\mu \in \mathscr{E}_0(f_*)$ и лемма 19 влекут (31). Таким образом, $|f(z)| \equiv |f_*(z)|$. Будем полагать для определенности, что $f(z) \equiv f_*(z)$. Обозначим $n = \sigma/\delta$, $\psi(z) = (\delta z - \arg\beta)/2$. Представление (21) для функции $\omega(z)$ означает, что $f(z)+\gamma e^{i\sigma z} = Ce^{i\sigma z/2}\cos^{n-1}\psi(z)[s(z)+i\cos\psi(z)]$, $C = \mathrm{const}$. Отсюда и из тождества $f(z) \equiv f_*(z)$ имеем $f(z)+\bar{\gamma} = \overline{C}e^{i\sigma z/2}\cos^{n-1}\psi(z)[s(z)-i\cos\psi(z)]$. Исключая $s(z)$, получим $f(z)(1/C - 1/\overline{C}) + \gamma e^{i\sigma z}/C - \bar{\gamma}/\overline{C} \equiv 2ie^{i\sigma z/2}\cos^n\psi(z)$. Отсюда и из равенства $f(x) = -\bar{\gamma}$ для $x \in \mathbb{R}$ такого, что $\psi(x) = \pi/2$, следует равенство $\gamma e^{i\sigma x} = \bar{\gamma}$. Легко находим, что $\gamma^2 = e^{-in(\arg\beta+\pi)}$. Отметим, что $C \notin \mathbb{R}$, ибо в противном случае функция слева в последнем тождестве имеет только простые нули, а нули функции справа порядка $n \ge 2$. Следовательно,

$$f(z) = [-A2ie^{i\sigma z/2}\cos^n\psi(z) + \gamma\bar{\eta}e^{i\sigma z} - \bar{\gamma}\eta]/(\eta-\bar{\eta}),$$

где $\eta = C/|C|$, $A = |C|$. Отсюда непосредственно находим, что

$$\beta f'(\zeta)+e^{i\delta\zeta}[f'(\zeta)-i\sigma f(\zeta)] = i\sigma\beta\gamma e^{i\sigma\zeta}\frac{\bar{\eta}-\eta a}{\eta-\bar{\eta}}, \quad \text{где } a = -\frac{\bar{\gamma}e^{i\delta\zeta}}{\beta\gamma e^{i\sigma\zeta}}.$$

Так как γ реализует минимум левой и правой частей (37), ввиду тождества $f(z) \equiv f_*(z)$ имеем $a > 0$, $\frac{\beta f'(\zeta)+e^{i\delta\zeta}[f'(\zeta)-i\sigma f(\zeta)]}{i\sigma\beta\gamma e^{i\sigma\zeta}} < 0$, т. е. $\frac{\bar{\eta}-\eta a}{\eta-\bar{\eta}} < 0$. Отсюда легко находим, что $\eta^2 = -1$. Следовательно, $f(z)$ с точностью до знака имеет вид $f(z) = e^{i\sigma z/2}[A\cos^n\psi(z) \pm \cos(n\psi(z)-n\pi/2)]$, $A > 0$. Подставляя значения $\psi(x) = \pm\pi/n$, если n четное, и $\psi(x) = \pm\pi/(2n)$, если n нечетное, убеждаемся, что для функций данного вида неравенство $|f(x)| \le 1$ при $x \in \mathbb{R}$ возможно только в случае $n = 2$. Нетрудно проверить, что в этом случае указанное неравенство и условие $f(z) \ne 0$ при $\operatorname{Im} z > 0$ выполняются тогда и только тогда, когда $f(z) = e^{i\sigma z/2}[A\cos^2\psi(z) - \cos(2\psi(z))]$, $0 < A \le 1$. Отсюда приходим к (35). Из условий $a > 0$ и $\gamma^2 = \beta^{-2}$ находим, что $e^{i\sigma\zeta/2}/\beta < 0$. Достаточность условий 4 для равенства в (34) проверяется непосредственно. Теорема доказана.

Теорема 5. *Пусть* $\omega(z) \in \mathscr{P}_\sigma$, $\sigma > 0$, $h_\omega(\pi/2) = 0$. *Обозначим* $\mu = \inf\limits_{x\in\mathbb{R}} |\omega(x)|$, $\delta = \sigma - h_{\omega'(z)-i\sigma\omega(z)}(-\pi/2)$ $(0 \le \delta \le \sigma)$. *Тогда*

$$|\omega'(z)| \ge |e^{i\delta z}||\omega'(z) - i\sigma\omega(z)| + \mu\sigma|e^{i\sigma z}| \quad \text{при } \operatorname{Im} z \le 0. \tag{41}$$

Равенство в (41) *при* $z = \zeta$, $\operatorname{Im}\zeta \le 0$, $\omega(\zeta) \ne 0$, *имеет место тогда и только тогда, когда либо* $\zeta \in \mathbb{R}$ *и все нули функции* $\omega(z)$ *вещественны, либо*

$$\omega(z) = C(e^{i\sigma z/n} + \eta)^n, \quad C = \text{const}, \ |\eta| = 1, \ n \in \mathbb{N}, \tag{42}$$

либо $\zeta \in \mathbb{R}$ *и* $|\omega(\zeta)| = \mu$, *либо*

$$\omega(z) = c_1 e^{i\sigma z} + c_2, \quad |c_1| > |c_2|. \tag{43}$$

Доказательство. Пусть $\mu = 0$. Не составляет труда проверить, что (41) при $z \in \mathbb{R}$, $\omega(z) \ne 0$, эквивалентно неравенству $\operatorname{Im}\{\omega'(z)/\omega(z)\} \ge \sigma/2$. Это неравенство выполняется по лемме 5, в силу которой для равенства необходимо, чтобы все нули $\omega(z)$ были вещественны. Из леммы 1 легко установить, что если все нули $\omega(z)$ вещественны, то $|e^{i\sigma z}\overline{\omega}(z)| \equiv |\omega(z)|$. Отсюда $\omega(z) = Ce^{i\sigma z/2}s(z)$, где $C = \text{const}$, $s(z)$ — вещественная функция. Непосредственно проверяется, что для функции данного вида неравенство (41) при $z \in \mathbb{R}$ превращается в равенство. В силу леммы 11 неравенство (41) справедливо при $\operatorname{Im} z < 0$, причем для равенства необходимо представление (42). Непосредственно проверяется, что для функции вида (42) неравенство (41) превращается в равенство.

Пусть $\mu > 0$. Непосредственно проверяется, что

$$\operatorname{Im}\frac{\omega'(z)}{\omega(z)} - \frac{\sigma}{2} \equiv \frac{|\omega'(z)/\omega(z)|^2 - |\omega'(z)/\omega(z) - i\sigma|^2}{2\sigma}.$$

Применяя к функциям $\omega(z)$ и $f(z) \equiv \mu \in \mathscr{E}_0(\omega)$ неравенство (13) и сокращая левую и правую его части на $|\omega'(x)/\omega(x)| + |\omega'(x)/\omega(x) - i\sigma|$, получим

$$|\omega'(x)| \ge |\omega'(x) - i\sigma\omega(x)| + \mu\sigma \quad \text{при } x \in \mathbb{R}. \tag{44}$$

По теореме 2 равенство в (44) имеет место тогда и только тогда, когда $|\omega(x)| = \mu$ или выполняется тождество вида (29). В силу леммы 19 тождество (29) влечет (43). Обозначим $f_\nu(z) = e^{i\delta z}[\omega'(z) - i\sigma\omega(z)] + \nu\mu\sigma e^{i\sigma z}$, где $|\nu| = 1$. В силу (44) $|f_\nu(x)| \le |\omega'(x)|$ при $x \in \mathbb{R}$. Отметим, что $\omega'(z) \ne 0$ при $\operatorname{Im} z < 0$ и $h_{\omega'}(-\pi/2) = \sigma$ (см. доказательство леммы 11). Очевидно, $h_{f_\nu}(-\pi/2) \le \sigma$. Применяя лемму 1 к функциям $f_\nu(z)$ и $\omega'(z)$, получим неравенство $|f_\nu(z)| \le |\omega'(z)|$ при $\operatorname{Im} z < 0$. Ввиду произвольности ν, $|\nu| = 1$, отсюда следует (41). Пусть в (41) имеет место равенство при некотором z, $\operatorname{Im} z < 0$. По принципу максимума модуля $|\omega'(z)| \equiv |f_\nu(z)|$ при некотором ν, $|\nu| = 1$. Следовательно, (44) превращается в равенство. По доказанному $\omega(z)$ имеет вид (43). Для функции вида (43) неравенство (41) превращается в равенство, что проверяется непосредственно. Теорема доказана.

Следствие 2. *Пусть* $f(z)$ — *целая функция конечной степени* $\sigma > 0$ *такая, что* $h_f(\pi/2) = 0$, $|f(x)| \le 1$ *при* $x \in \mathbb{R}$ *и* $f(z) \ne 0$ *при* $\operatorname{Im} z > -k$, $k > 0$. *Обозначим* $\mu = \inf\limits_{x\in\mathbb{R}} |f(x - ik)|$, $\delta = -h_{f'}(\pi/2)$ $(0 \le \delta \le \sigma)$. *Тогда при* $|\zeta| > 1$ *имеет место неравенство*

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |\sigma f(x) + i(1-\zeta)f'(x)| \le \sigma\frac{|\zeta| + e^{\delta k} - \mu(|\zeta| - 1)}{e^{\delta k} + 1}.$$

Доказательство. Зафиксируем $x \in \mathbb{R}$, ζ, $|\zeta| > 1$, и обозначим $E = f'(x)/[i\sigma f(x)]$. Очевидно, что $f(z) \in \mathscr{E}_0(e^{i\sigma z})$. Теорема 2 для функций $\omega(z) = e^{i\sigma z}$ и $f(z)$ дает неравенство $|E| + |E-1| \le 1/|f(x)|$. Легко видеть, что функция $\omega(z) = e^{i\sigma z}\bar{f}(z+ik)$ удовлетворяет условиям теоремы 5. Применяя к этой функции неравенство (41) при $z = x - ik$, получим $|E-1| \ge e^{\delta k}|E| + \mu/|f(x)|$. Ясно, что $|(1-\zeta)E - 1| \le |\zeta||E| + |E-1|$. Остается найти максимум функции $z(u, v) = |\zeta|u + v$ в треугольнике $0 \le v \le 1/|f(x)| - u$, $0 \le e^{\delta k}u \le v - \mu/|f(x)|$.

Следствие 3. *Пусть $f(z)$ — целая функция конечной степени такая, что $h_f(-\pi/2) = \sigma > 0$, $h_f(\pi/2) = 0$ и $f(z) \ne 0$ при $\operatorname{Im} z < k$, $k \ge 0$. Обозначим $\mu = \inf\limits_{x\in\mathbb{R}} |f(x+ik)|$, $\delta = \sigma - h_{f'(z)-i\sigma f(z)}(-\pi/2)$ $(0 \le \delta \le \sigma)$. Тогда при $x \in \mathbb{R}$ и $|\zeta| > e^{-\delta k}$ имеют место неравенства*

$$\begin{gathered}\frac{|\sigma f(x) + i(1-\zeta)f'(x)|}{\sigma} \ge \frac{(e^{2\delta k}|\zeta|^2 - 1)|f(x)|}{|\zeta e^{2\delta k} - 1| + e^{\delta k}|\zeta - 1|} + \mu e^{\sigma k}\frac{|\zeta - 1|}{e^{\delta k} + 1}, \\ \frac{|\zeta||f'(x)| - |f'(x) - i\sigma f(x)|}{\sigma} \ge \frac{e^{\delta k}|\zeta| - 1}{e^{\delta k} + 1}|f(x)| + \mu e^{\sigma k}\frac{|\zeta| + 1}{e^{\delta k} + 1}.\end{gathered} \tag{45}$$

Доказательство. Зафиксируем $x \in \mathbb{R}$, $\zeta \in \mathbb{C}$, ν, $|\nu| = 1$, и обозначим $F = i(1-\zeta)\frac{f'(x)}{\sigma f(x)} + 1$, $\varepsilon = |\zeta - 1|\mu\frac{e^{(\sigma-\delta)k}}{|f(x)|}$, $\beta = \zeta - \nu\varepsilon$. Функция $\omega(z) = f(z+ik)$ удовлетворяет условиям теоремы 5. Применяя к этой функции неравенство (41) при $z = x - ik$, получим

$$|f'(x)| \ge e^{i\delta k}|f'(x) - i\sigma f(x)| + \mu\sigma e^{\sigma k}. \tag{46}$$

Данное неравенство можно записать в виде $|F - 1| \ge e^{\delta k}(|F - \zeta| + \varepsilon)$. Отсюда следует, что $|F-1| \ge e^{\delta k}|F - \beta|$. Последнее неравенство, как легко проверить, означает, что F принадлежит образу круга $|w| \le e^{-\delta k}$ при отображении функцией $\frac{w-\beta}{w-1}$. Поэтому если $|\beta| > e^{-\delta k}$, то $|F| \ge \min\limits_{|w|=e^{-\delta k}} \left|\frac{w-\beta}{w-1}\right|$. Нетрудно показать, что

$$\min_{|w|=e^{-\delta k}} \left|\frac{w-\beta}{w-1}\right| = \frac{e^{2\delta k}|\beta|^2 - 1}{|e^{2\delta k}\beta - 1| + e^{\delta k}|\beta - 1|} = \lim_{\substack{d\to e^{\delta k},\\ d>1}} \frac{|d^2\beta - 1| - d|\beta - 1|}{d^2 - 1},$$

если $|\beta| > e^{-\delta k}$. Здесь второе равенство справедливо и при $|\beta| \le e^{-\delta k}$. Следовательно, при $|\beta| \le e^{-\delta k}$ правая часть этого равенства неположительна. Таким образом,

$$\begin{aligned}|F| &\ge \max_{|\nu|=1} \lim_{\substack{d\to e^{\delta k},\\ d>1}} \frac{|d^2(\zeta - \nu\varepsilon) - 1| - d|\zeta - \nu\varepsilon - 1|}{d^2 - 1} \\ &\ge \lim_{\substack{d\to e^{\delta k},\\ d>1}} \frac{|d^2\zeta - 1| - d|\zeta - 1| + (d^2 - d)\varepsilon}{d^2 - 1} = \frac{e^{2\delta k}|\zeta|^2 - 1}{|e^{2\delta k}\zeta - 1| + e^{\delta k}|\zeta - 1|} + \frac{e^{\delta k}\varepsilon}{e^{\delta k} + 1},\end{aligned}$$

что доказывает (45).

В силу (46) при любом $r \ge 1$

$$r|f'(x)| - e^{i\delta k}|f'(x) - i\sigma f(x)| \ge (r-1)e^{i\delta k}|f'(x) - i\sigma f(x)| + r\mu\sigma e^{\sigma k}.$$

Полагая $r = (|\zeta|+1)/(1+e^{-\delta k})$ и оценивая правую часть последнего неравенства с помощью очевидной оценки $|f'(x) - i\sigma f(x)| \ge \sigma|f(x)| - |f'(x)|$, приходим ко второму доказываемому неравенству.

Следствие 4. *Пусть $f(z)$ — целая функция конечной степени такая, что $h_f(-\pi/2) = \sigma$, $h_f(\pi/2) = \tau \le 0$ и $f(z) \ne 0$ при $\operatorname{Im} z < k$, $k \ge 0$. Обозначим $\mu = \inf\limits_{x\in\mathbb{R}} |f(x+ik)|$, $\delta = \sigma - h_{f'(z)-i\sigma f(z)}(-\pi/2)$ $(0 \le \delta \le \sigma - |\tau|)$. Тогда*

$$|f'(x)| \ge \frac{e^{\delta k}\sigma + |\tau|}{e^{\delta k}+1}|f(x)| + \mu e^{\sigma k}\frac{\sigma - |\tau|}{e^{\delta k}+1} \quad \text{при } x \in \mathbb{R}.$$

Доказательство. Обозначим $f_0(z) = f(z)e^{i\tau z}$. Очевидно, $h_{f_0}(\pi/2) = 0$, $h_{f_0}(-\pi/2) = \sigma+\tau$, $\sigma+\tau-h_{f_0'(z)-i(\sigma+\tau)f_0(z)}(-\pi/2) = \sigma+\tau-h_{e^{i\tau z}[f'(z)-i\sigma f(z)]}(-\pi/2) = \delta$. В случае $\sigma+\tau > 0$ функция $f_0(z)$ удовлетворяет условиям следствия 3. Непосредственно проверяется, что для данной функции неравенство (45) при $\zeta = -\sigma/\tau$ превращается в доказываемое неравенство. В силу (1) и (2) если $\sigma+\tau = 0$, то $\delta = 0$. В этом случае доказываемое неравенство вытекает из леммы 5.

Следствие 5. *Пусть выполняются условия теоремы* 5 *и в ее обозначениях* $\delta > 0$. *Положим* $\varepsilon(z) = \mu|e^{i\sigma z}/\omega(z)|$. *Тогда*

$$\left|\frac{\omega'(z)}{\omega(z)} - i\sigma\frac{|e^{i\delta z}|^2 - \varepsilon(z)}{|e^{i\delta z}|^2 - 1}\right| \le \sigma|e^{i\delta z}|\frac{1-\varepsilon(z)}{|e^{i\delta z}|^2 - 1} \quad \text{при } \operatorname{Im} z < 0.$$

Равенство при $z = \zeta$, $\operatorname{Im}\zeta < 0$, *имеет место тогда и только тогда, когда либо* 1) $\omega(z)$ *имеет вид* (42), *либо* 2) $\omega(z)$ *имеет вид* (43), *где* $e^{i\sigma\zeta}c_1/c_2 \in \mathbb{R}$.

Доказательство. Зафиксируем z, $\operatorname{Im} z < 0$, и обозначим $R = \operatorname{Re}\frac{\omega'(z)}{i\sigma\omega(z)}$, $I = \operatorname{Im}\frac{\omega'(z)}{i\sigma\omega(z)}$, $u = |e^{i\delta z}|$, $\varepsilon = \varepsilon(z)$. Согласно (41) $u^2|R-1+iI|^2 \le (|R+iI| - \varepsilon)^2$. Следовательно,

$$(u^2-1)(R^2+I^2) + (u^2-\varepsilon^2) \le 2(u^2R - \varepsilon|R+iI|) \le 2(u^2-\varepsilon)R,$$

$$R^2 - 2R\frac{u^2-\varepsilon}{u^2-1} + \left[\frac{u^2-\varepsilon}{u^2-1}\right]^2 + I^2 \le \left[u\frac{1-\varepsilon}{u^2-1}\right]^2,$$

что доказывает неравенство. Равенство имеет место тогда и только тогда, когда выполняется равенство в (41), а если $\mu > 0$, то — и условие $I = 0$. Непосредственно проверяется, что для функции вида (43) условие $I = 0$ означает, что $e^{i\sigma z}c_1/c_2 \in \mathbb{R}$.

Следствие 6. *В условиях теоремы* 5 *при* $\operatorname{Im} z \le 0$ *и* $|\beta| > 1$

$$|\beta\omega'(z) + e^{i\delta z}[\omega'(z) - i\sigma\omega(z)]| \ge |\bar\beta e^{i\delta z}[\omega'(z) - i\sigma\omega(z)] + \omega'(z)| + \mu\sigma(|\beta|-1)|e^{i\sigma z}|.$$

Доказательство. Если $\mu > 0$, то к функциям $f(z) \equiv \mu$ и $\omega(z)$ применимо неравенство (27), в силу которого

$$|\omega'(x) - \alpha\omega(x)| \ge |\omega'(x) - (\bar\alpha + i\sigma)\omega(x)| + \mu(|i\sigma - \alpha| - |\alpha|) \quad \text{при } x \in \mathbb{R},\ \operatorname{Im}\alpha < \sigma/2.$$

В случае $\mu = 0$ данное неравенство выполняется ввиду леммы 16. Отсюда, полагая $\alpha = i\sigma/(\beta/e^{i\delta x} + 1)$, приходим к доказываемому неравенству при $z \in \mathbb{R}$. Положим

$$F(z) = \beta\omega'(z) + e^{i\delta z}[\omega'(z) - i\sigma\omega(z)],$$
$$f(z) = \bar\beta e^{i\delta z}[\omega'(z) - i\sigma\omega(z)] + \omega'(z) + \nu\mu\sigma(|\beta|-1)e^{i\sigma z},$$

где ν, $|\nu| = 1$, произвольно фиксировано. По доказанному $|f(x)| \le |F(x)|$ при $x \in \mathbb{R}$. Очевидно, что $h_f(-\pi/2) \le \sigma$. В силу теоремы 5 $|F(z)| \ge |\omega'(z)|(|\beta|-1)$ при $\operatorname{Im} z < 0$. Следовательно, $F(z) \ne 0$ при $\operatorname{Im} z < 0$, и $h_F(-\pi/2) = \sigma$. Остается применить лемму 1 к функциям $f(z)$ и $F(z)$.

§ 3. Приложения к рациональным функциям

Пусть $a = \{a_j\}_{j=1}^n$, $n \ge 1$, $|a_j| \ne 1$, $j = 1, \dots, n$, — произвольно фиксированная конечная последовательность,

$$Q(z) = \prod_{j=1}^n (z - a_j), \quad U(z) = \prod_{|a_j|<1} (z - a_j), \quad V(z) = \prod_{|a_j|>1} (z - a_j),$$

$U(z) \equiv 1$, если $a \subset \{|z| > 1\}$, $V(z) \equiv 1$, если $a \subset \{|z| < 1\}$, n_1 и n_2 — степени полиномов $U(z)$ и $V(z)$ соответственно, $B_1(z) = z^{n_1}\overline{U(1/\bar z)}/U(z)$, $B_2(z) = z^{n_2}\overline{V(1/\bar z)}/V(z)$ — произведения Бляшке, полюсами которых с учетом кратностей являются члены последовательности a, лежащие соответственно внутри и вне единичного круга, $B(z) = B_1(z)B_2(z)$, $\mathscr{R}_a$ и $\mathscr{R}_a^m$ — классы рациональных функций вида $r(z) = P(z)/Q(z)$, где $P(z)$ — алгебраический полином степени соответственно $\le n$ и m такой, что $P(a_j) \ne 0$, $j = 1, \dots, n$, и $\max\limits_{|z|=1} |r(z)| = 1$.

Непосредственно проверяется, что

$$\frac{zB'(z)}{B(z)} = \sum_{j=1}^n \frac{|a_j|^2 - 1}{|z - a_j|^2} = |B_2'(z)| - |B_1'(z)| \quad \text{при } |z| = 1.$$

С другой стороны,

$$\frac{zB'(z)}{B(z)} = n - \frac{\overline{Q'(1/\bar z)}}{\overline{zQ(1/\bar z)}} - \frac{zQ'(z)}{Q(z)} = n - 2\operatorname{Re}\frac{zQ'(z)}{Q(z)} \quad \text{при } |z| = 1.$$

Следовательно,

$$\operatorname{Re}\frac{zQ'(z)}{Q(z)} = \frac{n - |B_2'(z)| + |B_1'(z)|}{2} \quad \text{при } |z| = 1. \tag{47}$$

Предложение 1. *Если $r(z) \in \mathscr{R}_a$, то при z, $|z| = 1$, $r(z) \ne 0$, имеем*

$$\left|\frac{zr'(z)}{r(z)} + |B_1'(z)|\right| + \left|\frac{zr'(z)}{r(z)} - |B_2'(z)|\right| \le \frac{|B_2'(z)| + |B_1'(z)|}{|r(z)|}.$$

Равенство при заданном $z = \zeta$, $|\zeta| = 1$, $r(\zeta) \ne 0$, имеет место тогда и только тогда, когда либо $|r(\zeta)| = 1$, либо

$$r(z) = c_1 B_2(z) + c_2 B_1(z), \quad |c_1| + |c_2| = 1. \tag{48}$$

Доказательство. Можно считать, что $|r(z)| \not\equiv |B_2(z)|$ (в противном случае доказательство тривиально). Положим $f(t) = P(e^{it})$, где $P(z) = r(z)Q(z)$, $\omega(t) = H(e^{it})$, где $H(z) := U(z)z^{n_2}\overline{V(1/\bar z)} = B_2(z)Q(z)$. Легко видеть, что $\omega(t) \in \mathscr{P}_n$ и $f(t) \in \mathscr{E}_0(\omega)$. С использованием (47) непосредственно проверяется равенство

$$\operatorname{Im}\frac{\omega'(t)}{\omega(t)} - \frac{n}{2} = \frac{|B_2'(e^{it})| + |B_1'(e^{it})|}{2} \quad \text{при } t \in \mathbb{R}.$$

Нетрудно показать, что $e^{int}\overline{\omega}(t) = B_1(e^{it})Q(e^{it})$,

$$\frac{zB_1'(z)}{B_1(z)} = -|B_1'(z)| \quad \text{и} \quad \frac{zB_2'(z)}{B_2(z)} = |B_2'(z)| \quad \text{при } |z| = 1.$$

Ввиду этих равенств предложение вытекает из теоремы 2 применительно к функциям $\omega(t)$ и $f(t)$.

Следствие 7. *Если $r(z) \in \mathscr{R}_a^m$, $m < n$, то при любом z, $|z| = 1$, $r(z) \neq 0$, точка $w = zr'(z)/r(z)$ принадлежит пересечению множеств*

$$\{w : |w + |B_1'(z)|| + |w - |B_2'(z)|| \leq (|B_2'(z)| + |B_1'(z)|)/|r(z)|\}, \tag{49}$$

$$\{w : |w + |B_1'(z)| + n - m| + |w - |B_2'(z)| + n - m| \leq (|B_2'(z)| + |B_1'(z)|)/|r(z)|\}.$$

Доказательство. Неравенство в (49) выполняется в силу предложения 1. Если $U(0) \neq 0$, то к функции $z^{n-m}r(z)$ применимо предложение 1, которое обеспечивает неравенство во втором множестве. Случай $U(0) = 0$ доказывается при помощи предельного перехода.

Предложение 2. *Если $r(z) \in \mathscr{R}_a$, то*

$$|r'(z)| \leq \frac{|B_2'(z)| + |B_1'(z)|}{2} + |r(z)|\frac{||B_2'(z)| - |B_1'(z)||}{2} \quad \text{при } |z| = 1. \tag{50}$$

Равенство при заданном $z = \zeta$, $|\zeta| = 1$, имеет место тогда и только тогда, когда $r(z)$ — функция вида (48), где

$$c_1\bar{c}_2 B_2(\zeta)/B_1(\zeta) \leq 0 \tag{51}$$

и $|c_2|[|B_2'(\zeta)| - |B_1'(\zeta)|] \leq |c_1|[|B_2'(\zeta)| - |B_1'(\zeta)|]$.

Доказательство. Можно считать, что $|r(z)| \not\equiv |B_2(z)|$. Пусть $\omega(t)$ и $f(t)$ — функции из доказательства предложения 1. Отметим, что $\omega(t) \in \mathscr{P}_n$ и $f(t) \in \mathscr{E}_0(\omega)$. Зафиксируем произвольно $t \in \mathbb{R}$ и обозначим $\zeta = e^{it}$. С использованием (47) не составляет труда проверить, что $\omega'(t)/\omega(t) - \alpha = i[|B_2'(\zeta)| + |B_1'(\zeta)|]/2$. Применяя к $\omega(t)$ и $f(t)$ неравенство (6) при $z = t$ и $\alpha = -\operatorname{Im}\frac{\zeta Q'(\zeta)}{Q(\zeta)} + i\frac{n}{2}$, получим

$$\left|r'(\zeta) - r(\zeta)\frac{|B_2'(\zeta)| - |B_1'(\zeta)|}{2}\right| \leq \frac{|B_2'(\zeta)| + |B_1'(\zeta)|}{2},$$

откуда вытекает (50). Ввиду леммы 8 для равенства в последнем неравенстве необходимо представление (48), причем если $c_1 \neq 0$, то $\arg c_2/c_1 = 2\arg[\omega'(t) - \alpha\omega(t)] - nt$. Тем самым приходим к условию $\frac{c_1}{c_2}\frac{\omega(t)}{e^{int}\overline{\omega}(t)} \leq 0$, т. е. к (51). Непосредственно проверяется, что для функции вида (48) при условии (51) равенство в (50) имеет место тогда и только тогда, когда $|c_2|[|B_2'(\zeta)| - |B_1'(\zeta)|] \leq |c_1|[|B_2'(\zeta)| - |B_1'(\zeta)|]$.

Предложение 3. *Пусть $r(z) \in \mathscr{R}_a$, $r(z) \neq 0$ при $|z| < 1$. Обозначим $\mu = \min\limits_{|z|=1}|r(z)|$. Тогда при z, $|z| = 1$, $r(z) \neq 0$, имеем*

$$\left|\frac{\zeta r'(z)}{r(z)} - |B_2'(z)|\right| - \left|\frac{zr'(z)}{r(z)} + |B_1'(z)|\right| \geq \mu\frac{|B_2'(z)| + |B_1'(z)|}{|r(z)|}. \tag{52}$$

Равенство в (52) при заданном $z = \zeta$, $|\zeta| = 1$, $r(\zeta) \neq 0$, имеет место тогда и только тогда, когда либо 1) $|r(\zeta)| = \mu$, либо 2) $r(z)$ — функция вида (48), где $|c_1| < |c_2|$, либо 3) $r(z) \in \mathscr{R}_a^n$, и все нули $r(z)$ лежат на окружности $|z| = 1$.

Доказательство. Зафиксируем произвольно ζ, $|\zeta| = 1$, $r(\zeta) \neq 0$. Обозначим $P(z) = r(z)Q(z)$, m — степень полинома $P(z)$. Функция $g(t) = z^m\overline{P(1/\bar{z})}$, $z = e^{it}$, удовлетворяет условиям леммы 5, в силу которой

$$\operatorname{Im}\frac{g'(t)}{g(t)} = m - \operatorname{Re}\frac{e^{it}P'(e^{it})}{P(e^{it})} \geq \frac{m}{2}, \quad t \in \mathbb{R},\ P(e^{it}) \neq 0,$$

поэтому $\operatorname{Re}\frac{\zeta P'(\zeta)}{P(\zeta)} \le \frac{n}{2}$. Ввиду леммы 5 равенство имеет место тогда и только тогда, когда степень полинома $P(z)$ равна n, а его нули лежат на окружности $|z| = 1$. Последнее неравенство равносильно неравенству

$$\left|\operatorname{Re}\frac{\zeta r'(\zeta)}{r(\zeta)} - |B_2'(\zeta)|\right| \ge \left|\operatorname{Re}\frac{\zeta r'(\zeta)}{r(\zeta)} + |B_1'(\zeta)|\right|,$$

что легко проверить с помощью (47). Данное неравенство совпадает с (52) в случае $\mu = 0$.

Пусть $\mu > 0$. Положим $\widetilde{\omega}(t) = P_*(e^{it})$, где $P_*(z) = z^n\overline{P(1/\bar{z})}$, $\tilde{f}(t) = h(e^{it})$, где $h(z) := \mu z^{n_1}\overline{U(1/\bar{z})}V(z) = \mu B_1(z)Q(z)$. $P_*(z)$ — полином степени n, все нули которого лежат в круге $|z| \le 1$. Так как $h(z) \ne 0$ при $|z| \le 1$, то $|P_*(z)| \not\equiv |h(z)|$. Очевидно, $\widetilde{\omega}(t) \in \mathscr{P}_n$ и $\tilde{f}(t) \in \mathscr{E}_0(\widetilde{\omega})$. Нетрудно проверить, что

$$\operatorname{Re}\frac{\zeta P_*'(\zeta)}{P_*(\zeta)} - \frac{n}{2} = \frac{n}{2} - \operatorname{Re}\frac{\zeta P'(\zeta)}{P(\zeta)} = \frac{|\zeta r'(\zeta)/r(\zeta) - |B_2'(\zeta)||^2 - |\zeta r'(\zeta)/r(\zeta) + |B_1'(\zeta)||^2}{2[|B_2'(\zeta)| + |B_1'(\zeta)|]}.$$

Ввиду этого равенства и (47), применяя неравенство (13) к функциям $\widetilde{\omega}(t)$ и $\tilde{f}(t)$ и сокращая левую и правую его части на $|\zeta r'(\zeta)/r(\zeta) - |B_2'(\zeta)|| + |\zeta r'(\zeta)/r(\zeta) + |B_1'(\zeta)||$, получим (52). По теореме 2 равенство в (52) имеет место тогда и только тогда, когда либо $|r(z)| = \mu$, либо

$$h(z) \equiv d_1P_*(z) + d_2P(z), \quad |d_1| + |d_2| = 1. \tag{53}$$

Пусть выполняется (53). Обозначим $h_*(z) := z^n\overline{h(1/\bar{z})} = \mu B_2(z)Q(z)$. В силу (53) $h_*(z) \equiv \bar{d}_1P(z) + \bar{d}_2P_*(z)$. Отсюда и из (53) находим, что $(|d_2| - |d_1|)P(z) \equiv \bar{d}_2h(z) - d_1h_*(z)$. Очевидно, $h(z)/h_*(z) \not\equiv \mathrm{const}$. Следовательно, $|d_2| \ne |d_1|$ и $r(z) = \mu[\bar{d}_2B_1(z) - d_1B_2(z)]/(|d_2| - |d_1|)$, откуда ввиду равенства $\max\limits_{|z|=1}|r(z)| = 1$ приходим к представлению (48). Непосредственно проверяется, что (48) влечет (53), где $d_2 = -c_2$, $d_1 = \bar{c}_1$.

Следствие 8. *Пусть выполняются условия предложения* 3. *Обозначим*

$$M_1(z) = \left[\frac{|B_2'(z)| + |B_1'(z)|}{2} - \mu\frac{|B_2'(z)| - |B_1'(z)|}{2}\right]^2 - [|r(z)|^2 - \mu^2]|B_1'(z)||B_2'(z)|,$$

$$M_2(z) = \frac{|B_2'(z)| + |B_1'(z)|}{2} - |r(z)|\frac{|B_2'(z)| - |B_1'(z)|}{2}.$$

Тогда $|r'(z)| \le \max\{\sqrt{M_1(z)}, M_2(z)\}$ *при* $|z| = 1$.

Доказательство. В силу предложений 1 и 3 при любом z, $|z| = 1$, $r(z) \ne 0$, точка $w = zr'(z)/r(z)$ принадлежит пересечению множества (49) и множества

$$\left\{w : |w - |B_2'(z)|| - |w + |B_1'(z)|| \ge \mu\frac{|B_2'(z)| + |B_1'(z)|}{|r(z)|}\right\}. \tag{54}$$

Множество (54) — это либо область, лежащая слева от левой ветви гиперболы с фокусами в точках $-|B_1'(z)|$, $|B_2'(z)|$ и действительной полуосью $\mu\frac{|B_2'(z)|+|B_1'(z)|}{2|r(z)|}$, если $|r(z)| > \mu \ne 0$; либо промежуток $(-\infty, -|B_1'(z)|]$, если $|r(z)| = \mu \ne 0$; либо полуплоскость $\operatorname{Re} w \le \frac{|B_2'(z)|-|B_1'(z)|}{2}$, если $\mu = 0$. Множество (49) — это либо эллипс с фокусами в точках $-|B_1'(z)|$, $|B_2'(z)|$ и большой полуосью $\frac{|B_2'(z)|+|B_1'(z)|}{2|r(z)|}$ и его внутренность, если $|r(z)|<1$; либо отрезок $[-|B_1'(z)|,|B_2'(z)|]$, если $|r(z)|=1$. Для любого эллипса $\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, $a>b$, квадрат расстояния от точки $N=x+iy$ на нем до начала координат $|N|^2=x^2+b^2-(x-x_0)^2b^2/a^2$ — выпуклая функция от x. Ввиду этого максимально удаленной от начала координат точкой пересечения множеств (49) и (54) является либо точка M пересечения их границ, либо точка $N=\frac{|B_2'(z)|-|B_1'(z)|}{2}-\frac{|B_2'(z)|+|B_1'(z)|}{2|r(z)|}$. Для точки $w=M$ имеют место равенства в (49) и (54). Следовательно, $|M-|B_2'(z)||=a(1+\mu)$ и $|M+|B_1'(z)||=a(1-\mu)$, где $a=\frac{|B_2'(z)|+|B_1'(z)|}{2|r(z)|}$. Отсюда легко находим, что $|M|=\sqrt{M_1(z)}/|r(z)|$.

Предложение 4. *В условиях предложения* 3 *при любом* z, $|z|=1$, *и любом* α, $\operatorname{Re}\alpha\le\frac{|B_2'(z)|-|B_1'(z)|}{2}$, *имеет место неравенство*

$$|zr'(z)-\alpha r(z)|\le\frac{||B_2'(z)|-\alpha|+||B_1'(z)|+\alpha|}{2}-\mu\frac{||B_2'(z)|-\alpha|-||B_1'(z)|+\alpha|}{2}.$$

Доказательство. Очевидно, что $|r(z)|\not\equiv|B_2(z)|$. Можно считать, что $\mu\ne0$ (случай $\mu=0$ доказывается при помощи предельного перехода). Обозначим $r_*(z)=z^n\overline{P(1/\bar z)}/Q(z)$, где $P(z)=r(z)Q(z)$. Зафиксируем произвольно ζ, $|\zeta|=1$, и β, $\operatorname{Re}\beta\le\frac{|B_2'(\zeta)|-|B_1'(\zeta)|}{2}$. В силу (47) $\operatorname{Im}\{i\beta+i\zeta Q'(\zeta)/Q(\zeta)\}\le n/2$. Пусть $\omega(t)$ и $f(t)$ — функции из доказательства предложения 1, $\widetilde\omega(t)$ и $\tilde f(t)$ — функции из доказательства предложения 3. Отметим, что $\omega(t)\in\mathscr{P}_n$, $f(t)\in\mathscr{E}_0(\omega)$ и $\widetilde\omega(t)\in\mathscr{P}_n$, $\tilde f(t)\in\mathscr{E}_0(\widetilde\omega)$. Нетрудно проверить, что, применяя к функциям $\omega(t)$ и $f(t)$ неравенство (26), а к функциям $\widetilde\omega(t)$ и $\tilde f(t)$ неравенство (27) при $\alpha=i\beta+i\frac{\zeta Q'(\zeta)}{Q(\zeta)}$, получим соответственно неравенства

$$|\zeta r'(\zeta)-\beta r(\zeta)|+|\zeta r_*'(\zeta)-\beta r_*(\zeta)|\le||B_2'(\zeta)|-\beta|+||B_1'(\zeta)|+\beta|,$$

$$|zr'(z)-\beta r(z)|-|zr_*'(z)-\beta r_*(z)|\le-\mu[||B_2'(z)|-\beta|-||B_1'(z)|+\beta|].$$

Остается их сложить.

Предложение 5. *Пусть* $a\subset\{|z|>1\}$, $r(z)\in\mathscr{R}_a^n$, $r(z)\ne0$ *при* $|z|<k$, $k>1$. *Обозначим*

$$M(z)=\left[\frac{zQ'(z)}{Q(z)}+\frac{n}{k^2-1}\right]\left(1+\frac{nk}{k^2-1}\Big/\left|\frac{zQ'(z)}{Q(z)}+\frac{n}{k^2-1}\right|\right),$$

$$\Lambda(z)=|r(z)|\left|\operatorname{Im}\frac{zQ'(z)}{Q(z)}\right|-\sqrt{1-|r(z)|^2}\sqrt{\frac{|B'(z)|^2}{4}-\left[|r(z)|\frac{n}{2}\frac{k-1}{k+1}\right]^2}.$$

Тогда $|r'(z)|\le|M(z)||r(z)|$ *при* $|z|=1$. *В точках* z, $|z|=1$, *таких, что* $|r(z)|>\frac{|B'(z)|}{|M(z)+|B'(z)||+|M(z)|}$, *имеем*

$$|r'(z)|\le\frac{|B'(z)|}{2}-\frac{n}{2}\frac{k^2+1}{k^2-1}+\sqrt{\frac{n^2}{4}\left[\frac{k^2+1}{k^2-1}-|r(z)|^2\frac{k-1}{k+1}\right]^2-\Lambda^2(z)}.\qquad(55)$$

Доказательство. Зафиксируем произвольно ζ, $|\zeta|=1$. Обозначим $P(z)=r(z)Q(z)$. Очевидно, что функция $\omega(t)=e^{int}P(ke^{-it})$ принадлежит классу $\mathscr{P}_n$ и удовлетворяет условиям теоремы 5. Для нее имеем $h_{\omega'(t)-i\sigma\omega(t)}(-\pi/2)=h_{-ike^{i(n-1)t}P'(ke^{-it})}(-\pi/2)\le n-1$. Следовательно, в обозначениях теоремы 5

$\delta \geq 1$. В силу теоремы 5 $|\omega'(t)| \geq |e^{it}||\omega'(t) - in\omega(t)|$ при $\operatorname{Im} t \leq 0$. Полагая $e^{-it} = \zeta/k$, получим неравенство $|nP(\zeta) - \zeta P'(\zeta)| \geq k|P'(\zeta)|$. Не составляет труда показать, что данное неравенство равносильно оценке

$$|\zeta P'(\zeta)/P(\zeta) + n/(k^2-1)| \leq nk/(k^2-1).$$

Обозначим $D = \zeta Q'(\zeta)/Q(\zeta)$,

$$K = \left\{ w : \left| w + D + \frac{n}{k^2-1} \right| \leq \frac{nk}{k^2-1} \right\},\ E = \left\{ w : |w| + |w - |B'(\zeta)|| \leq \frac{|B'(\zeta)|}{|r(\zeta)|} \right\}.$$

Замечая, что $\frac{\zeta P'(\zeta)}{P(\zeta)} = \frac{\zeta r'(\zeta)}{r(\zeta)} + D$, имеем $\frac{\zeta r'(\zeta)}{r(\zeta)} \in K$. Следовательно, $|r'(\zeta)/r(\zeta)|$ не превосходит максимума $\max\limits_{w\in K} |w|$, который достигается в точке $-M(\zeta)$. Этим завершается доказательство первого неравенства. В силу предложения 1 $\frac{\zeta r'(\zeta)}{r(\zeta)} \in E$. Следовательно, $\frac{\zeta r'(\zeta)}{r(\zeta)} \in E \cap K$. Пусть $-M(\zeta) \notin E$, что равносильно неравенству $|r(\zeta)| > \frac{|B'(\zeta)|}{|M(\zeta)+|B'(\zeta)||+|M(\zeta)|}$. Для доказательства неравенства (55) оценим $\max\limits_{w\in E\cap K} |w|$. Обозначим через N точку, в которой достигается этот максимум. Заметим, что

$$K \subset \left\{ \operatorname{Re} w \leq \frac{n}{k+1} - \operatorname{Re} D \right\} = \left\{ \operatorname{Re} w \leq \frac{|B'(\zeta)|}{2} - \frac{n}{2}\frac{k-1}{k+1} \right\}, \tag{56}$$

∂E — либо эллипс с фокусами в точках 0 и $|B'(\zeta)|$, если $|r(\zeta)| < 1$, либо отрезок $[0, |B'(\zeta)|]$, если $|r(\zeta)| = 1$. Не составляет труда проверить, что расстояние от точки множества ∂E до начала координат возрастает с увеличением абсциссы этой точки. Отсюда и из (56) $N \in \partial E \cap \partial K$. Ввиду (56) точка N лежит в той же полуплоскости ($\operatorname{Im} w \geq 0$ или $\operatorname{Im} w \leq 0$), что и центр круга K. Следовательно, $\operatorname{Im} D \operatorname{Im} N \leq 0$. В силу равенства $\left|N + D + \frac{n}{k^2-1}\right| = \frac{nk}{k^2-1}$ имеем

$$|N|^2 + 2\operatorname{Re} N \left(\operatorname{Re} D + \frac{n}{k^2-1} \right) + \left| D + \frac{n}{k^2-1} \right|^2 - 2|\operatorname{Im} N \operatorname{Im} D| = \frac{n^2k^2}{(k^2-1)^2}. \tag{57}$$

Так как $N \in \partial E$, то $|N - |B'(\zeta)|| = |B'(\zeta)|/|r(\zeta)| - |N|$. Возведя обе части этого равенства в квадрат, получим

$$\operatorname{Re} N = \frac{|N|}{|r(\zeta)|} - \frac{|B'(\zeta)|}{2|r(\zeta)|^2} + \frac{|B'(\zeta)|}{2}. \tag{58}$$

Заменяя в (57) $\operatorname{Re} N$ выражением из правой части (58), после простых арифметических преобразований получим

$$\begin{aligned} &\left(|N| - \frac{|B'(\zeta)|}{2|r(\zeta)|} + \frac{n}{2|r(\zeta)|}\frac{k^2+1}{k^2-1} \right)^2 \\ &\quad = \frac{n^2k^2}{(k^2-1)^2}|r(\zeta)|^{-2} + (|r(\zeta)|^{-2} - 1)\operatorname{Re} D(n - \operatorname{Re} D) - \operatorname{Im}^2 D + 2|\operatorname{Im} N \operatorname{Im} D|. \end{aligned} \tag{59}$$

Не составляет труда проверить равенство

$$\max\left\{ |w| : w \in E \cap \left\{ \operatorname{Re} w \leq \frac{|B'(\zeta)|}{2} - \frac{n}{2}\frac{k-1}{k+1} \right\} \right\} = \frac{|B'(\zeta)|}{2|r(\zeta)|} - |r(\zeta)|\frac{n}{2}\frac{k-1}{k+1}.$$

В силу (56) $|N|$ не превосходит данного максимума, т. е.

$$\frac{|B'(\zeta)|}{2|r(\zeta)|} - |N| \geq |r(\zeta)|\frac{n}{2}\frac{k-1}{k+1}.$$

Ввиду этого из (58) получим

$$\begin{aligned}|\operatorname{Im} N| = \sqrt{|N|^2 - \operatorname{Re}^2 N} &= \sqrt{|r(\zeta)|^{-2} - 1}\sqrt{\frac{|B'(\zeta)|^2}{4} - \left(\frac{|B'(\zeta)|}{2|r(\zeta)|} - |N|\right)^2} \\ &\leq \sqrt{|r(\zeta)|^{-2} - 1}\sqrt{\frac{|B'(\zeta)|^2}{4} - \left(|r(\zeta)|\frac{n}{2}\frac{k-1}{k+1}\right)^2}.\end{aligned}$$

Остается оценить правую часть (59) при помощи этого соотношения.

Следствие 9. *Если алгебраический полином $P(z)$ степени n отличен от нуля в круге $|z| < k$, $k > 1$, то*

$$|P'(z)| \leq \min\left\{\frac{n}{k-1}|P(z)|, \frac{n}{k+1}\max_{|z|=1}|P(z)|\right\} \quad \textit{при } |z| = 1.$$

Доказательство. Можно считать, что $\max\limits_{|z|=1}|P(z)| = 1$. Зафиксируем произвольно ζ, $|\zeta| = 1$. Применяя предложение 5 к функции $r(z) = P(z)(d-1)^n/(z-d)^n$, $d > 1$, и устремляя d к $+\infty$, получим $|P'(\zeta)| \leq \frac{n}{k-1}|P(\zeta)|$, а если $|P(\zeta)| > \frac{k-1}{k+1}$, то $|P'(\zeta)| \leq \frac{n}{k+1}$. Остается заметить, что если $\frac{n}{k+1} < \frac{n}{k-1}|P(\zeta)|$, то $|P(\zeta)| > \frac{k-1}{k+1}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Леонтьев А. Ф.* Целые функции. Ряды экспонент. М.: Наука, 1983.
2. *Левин Б. Я.* Распределение корней целых функций. М.: ГИТТЛ, 1956.
3. *Bernstein S. N.* Leçons sur les propriétés extremales et la meilleure approximation des fonctions analytiques d'une variable reelle. Paris: Gauthier Vilar, 1926.
4. *Бернштейн С. Н.* Экстремальные свойства полиномов и наилучшее приближение непрерывных функций одной вещественной переменной. М.; Л.: ОНТИ, 1937. Ч. 1.
5. *Смирнов В. И., Лебедев Н. А.* Конструктивная теория функций комплексного переменного. М.: Наука, 1964.
6. *Генчев Т. Г.* Неравенства для асимметрических целых функций экспоненциального типа // Докл. АН СССР. 1978. Т. 241, № 6. С. 1261–1264.
7. *Boas R.* Inequalities for asymmetric entire functions // Illinois J. Math. 1957. V. 1. P. 94–97.
8. *Rahman Q. I.* Functions of exponential type // Trans. Amer. Math. Soc. 1969. V. 135, N 1. P. 295–309.
9. *Gardner R. B., Govil N. K.* Some inequalities for entire functions of exponential type // Proc. Amer. Math. Soc. 1995. V. 123, N 9. P. 2757–2761.
10. *Rahman Q. I., Schmeisser G.* Extension of a theorem of Laguerre to entire functions of exponential type // J. Math. Anal. Appl. 1987. V. 122. P. 463–468.
11. *Aziz A.* Inequalities for the polar derivative of a polynomial // J. Approx. Theory. 1988. V. 55. P. 183–193.
12. *Aziz A., Shah W. M.* Inequalities for the polar derivative of a polynomial // Indian J. Pure Appl. Math. 1998. V. 29, N 2. P. 163–173.
13. *Aziz A., Shah W. M.* Inequalities for a polynomial and its derivative // Math. Ineq. Appl. 2004. V. 7, N 3. P. 379–391.
14. *Borwein P., Erdelyi T.* Sharp extensions of Bernstein's inequality to rational spaces // Mathematika. 1996. V. 43, N 2. P. 413–423.
15. *Aziz A., Shah W. M.* Some refinements of Bernstein-type inequalities for rational functions // Glas. Mat. 1997. V. 32, N 1. P. 29–37.

16. *Aziz-Ul-Auzeem A., Zarger B. A.* Some properties of rational functions with prescribed poles // Canad. Math. Bull. 1999. V. 42, N 4. P. 417–426.

17. *Malik M. A.* On the derivative of a polynomial // J. London. Math. Soc. 1969. V. 1. P. 57–60.

18. *Левин Б. Я.* Об одном специальном классе целых функций и связанных с ним экстремальных свойствах целых функций конечной степени // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1950. Т. 14, № 1. С. 45–84.

Статья поступила 21 августа 2009 г.

Олесов Александр Викторович
ФГОУ ВПО «Морской гос. университет имени адмирала Г. И. Невельского»,
ул. Верхне-Портовая, 50а, Владивосток 690059
olesov1@iam.dvo.ru