Сибирский математический журнал
Сентябрь—октябрь, 2010. Том 51, № 5

УДК 517.55+512.761

ОБ ИЗОТОПИЯХ И ГОМОЛОГИЯХ ПОДМНОГООБРАЗИЙ В ТОРИЧЕСКИХ МНОГООБРАЗИЯХ

Н. А. Бушуева

Аннотация. В пространстве $\mathbb{C}^n$ рассматриваются алгебраическая поверхность Y и конечный набор гиперповерхностей $\{S_i\}$. Известная теорема Фруассара гласит, что если Y и $\{S_i\}$ находятся в общем положении в проективной компактификации $\mathbb{C}^n$ вместе с бесконечно удаленной гиперплоскостью, то для гомологий дополнения $Y \setminus \cup S_i$ имеет место специальное разложение через гомологии поверхности Y и всевозможных пересечений S_i в Y. Доказывается справедливость этого гомологического разложения при более слабом условии: существует гладкая торическая компактификация $\mathbb{C}^n$, в которой Y и $\{S_i\}$ находятся в общем положении со всеми бесконечно удаленными дивизорами. Одним из основных моментов доказательства является построение изотопии в Y, оставляющей инвариантными все гиперповерхности $Y \cap S_k$, кроме одной $Y \cap S_i$, которая сдвигается с любого наперед заданного компакта. Кроме того, рассматривается сугубо торический вариант теоремы о разложении, когда вместо аффинной поверхности Y берется дополнение поверхности в компактном торическом многообразии до набора гиперповерхностей в нем.

Ключевые слова: группа гомологий, торическое многообразие, когранrealный оператор.

Введение

Рассмотрим квазиаффинное многообразие $Y \setminus V$, представленное разностью двух алгебраических множеств в $\mathbb{C}^n$ (не исключая случай $Y = \mathbb{C}^n$). При этом Y представляет собой пересечение семейства гиперповерхностей $\{S^j\}_{j\in J}$, а V — объединение семейства гиперповерхностей $\{S_i\}_{i\in I}$, причем вся совокупность $S = \{S_i, S^j\}$ состоит из гладких гиперповерхностей общего положения в $\mathbb{C}^n$: в точках пересечения любого набора гиперповерхностей из S градиенты полиномов, определяющих эти поверхности, линейно независимы. Цель настоящей статьи состоит в исследовании структуры сингулярных гомологий $Y \setminus V$ с коэффициентами в поле.

Структуру групп гомологий $H_p(Y \setminus V)$ в некоторых ситуациях описывает теорема Фруассара [1], которая в обозначениях $V_i = S_i \cap Y$ гласит, что если в проективной компактификации $\mathbb{P}_n$ пространства $\mathbb{C}^n$ семейство гиперповерхностей S находится в общем положении вместе с бесконечно удаленной гиперплоскостью $S^\infty = \mathbb{P}_n \setminus \mathbb{C}^n$, то для $V = \bigcup_{i\in I} V_i$

$$H_p(Y \setminus V) \simeq H_p(Y) \oplus \Big[\bigoplus_i \delta H_{p-1}(V_i)\Big] \oplus \Big[\bigoplus_{i<j} \delta^2 H_{p-2}(V_i \cap V_j)\Big] \oplus \dots\ , \qquad (*)$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 08–01–00844), программы Рособразования «Развитие научного потенциала высшей школы» (код проекта 2.1.1/4620) и СФУ.

где прямая сумма справа распространяется по всевозможным пересечениям семейства $\{V_i\}_{i\in I}$, а $\delta, \delta^2, \dots$ — итерированные кограничные (трубочные) операторы [2, 3].

Напомним, что для комплексного аналитического многообразия M и аналитического подмногообразия $N \subset M$ коразмерности один кограница $\delta(\gamma)$ определяется следующим образом. Выбрав на Y риманову метрику, в качестве кограницы цикла γ примем объединение концов отрезков геодезических, исходящих из точек $a \in \gamma$ ортогонально V, причем длины $\rho(a)$ этих геодезических выбираются достаточно малыми и так, чтобы функция $\rho(a)$ была гладкой.

Отметим, что формула $(*)$ важна с точки зрения теории многомерных вычетов, поскольку кограничный гомоморфизм δ является двойственным к вычетному гомоморфизму Пуанкаре Res в когомологиях де Рама [2, 4].

Для произвольных квазиаффинных многообразий общего положения формула $(*)$, вообще говоря, не имеет места без дополнительных требований к семейству на бесконечности (см. §4). В то же время следующий простой пример показывает, что формула $(*)$ может сохраняться и при нарушении общего положения семейства $\{S, S^\infty\}$ в проективном пространстве $\mathbb{P}_n$. Так, если $S_1 = \{z_1 = 1\}$, $S_2 = \{z_1 = 2\}$ — две параллельные прямые в $\mathbb{C}^2$, то они пересекаются на бесконечности в $\mathbb{P}_2$ и потому не находятся в общем положении с бесконечно удаленной прямой S^∞ (рис. 1). Однако уже в компактификации $\mathbb{P}_1 \times \mathbb{P}_1 \supset \mathbb{C}^2$ прямые S_1 и S_2 находятся в общем положении с двумя бесконечно удаленными прямыми S_1^∞, S_2^∞ (рис. 2). При этом простые вычисления позволяют убедиться, что в данной ситуации при $Y = \mathbb{C}^2$ формула $(*)$ имеет место.

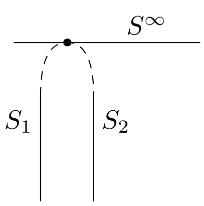

Рис. 1. Прямые в $\mathbb{P}_2$.

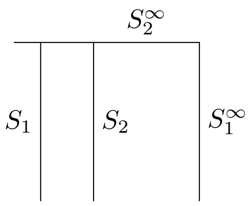

Рис. 2. Прямые в $\mathbb{P}_1 \times \mathbb{P}_1$.

Теорема 1 настоящей работы показывает, что факт справедливости разложения $(*)$ в этом примере оказывается неслучайным. А именно, проективные пространства и их прямые произведения являются примерами торических пространств (многообразий), характеризующихся мономиальностью функций перехода [5–7]. Компактные торические пространства размерности n получаются присоединением к $\mathbb{C}^n$ конечного числа компактных $(n-1)$-мерных подмногообразий, которые трактуются как бесконечно удаленные гиперповерхности. Точная формулировка теоремы 1 следующая.

Теорема 1. *Пусть $S = \{S^j, S_i\}_{j\in J, i\in I}$ — конечное семейство алгебраических гиперповерхностей в $\mathbb{C}^n$, определяющее квазиаффинное многообразие $Y \setminus V$, где*
$$Y = \bigcap_{j\in J} S^j, \quad V = \bigcup_{i\in I} V_i, \quad V_i = S_i \cap Y.$$
Если существует гладкая торическая компактификация X пространства $\mathbb{C}^n$, в которой семейство S находится в общем положении с набором всех бесконечно

удаленных гиперповерхностей X, то при любом $p \geqslant 0$ для группы гомологий $H_p(Y \setminus V)$ справедливо разложение $(*)$.

Условия существования и способы нахождения торической компактификации, в которой поверхность находится в общем положении со всеми бесконечно удаленными гиперповерхностями, рассматривались в работе [5].

Заметим, что если для семейства S гладких гиперповерхностей общего положения разложение $(*)$ не имеет места, то согласно теореме 1 не существует гладкой торической компактификации пространства $\mathbb{C}^n$, в которой это семейство пересекалось бы трансверсально со всеми бесконечно удаленными гиперповерхностями.

Как уже отмечалось, «правильное» строение вида $(*)$ для гомологических групп квазиаффинных многообразий общего положения в $\mathbb{C}^n$ не всегда имеет место. В теореме 1, как и в исходном утверждении Фруассара, для справедливости разложения $(*)$ требуется более жесткое свойство общего положения: гиперповерхности, задающие квазиаффинное многообразие, должны находиться в общем положении с «краем» пространства $\mathbb{C}^n$, который следует присоединить к $\mathbb{C}^n$ для получения компактного аналитического многообразия X. Здесь уместно заметить, что аналогичную ситуацию можно получить, заменяя $\mathbb{C}^n$ дополнением $X_D = X \setminus D$ гиперповерхности D в компактном аналитическом многообразии X и рассматривая в X_D семейство гиперповерхностей $S = \{S^j, S_i\}$. Например, если $X = \mathbb{P}_n$ — проективное пространство, то построенное по семейству S подмногообразие $Y \setminus V \subset X_D$, где $Y = \cap S^j$, $V = \cup(S_i \cap Y)$, будет квазипроективным.

Подобно квазиаффинным и квазипроективным многообразиям рассмотрим разность $U \setminus V$ двух аналитических подмногообразий в некотором компактном комплексном торическом многообразии X (не исключая случай $U = X$). Как и ранее, полагаем, что U представляет собой пересечение, а V — объединение семейств гиперповерхностей из X, находящихся в общем положении в X.

Если X — торическое многообразие, то определенное выше подмногообразие $Y \setminus V \subset X_D$ представляется разностью $\overline{Y} \setminus (D \cup V)$, где черта сверху означает замыкание в X; при этом вычитаемое множество $D \cup V$ является объединением гиперповерхностей $D = \bigcup\limits_{k\in K} D_k$ и $V = \bigcup (S_i \cap Y)$. Оказывается, свойства «общего положения» многообразия $Y \setminus V$ недостаточно для справедливости разложения $(*)$ (см. пример 2 из § 4), как это было в квазиаффинном случае в исходной теореме Фруассара и ее обобщении — теореме 1. Поэтому приходится накладывать дополнительное ограничение на классы рациональной эквивалентности гиперповерхностей (циклов), составляющих D и V. Гиперповерхности S_i и D_k, участвующие в определении V и D, будем рассматривать как эффективные дивизоры, а их классы рациональной эквивалентности будем обозначать через $[S_i]$ и $[D_k]$. Будем говорить, что класс $[S_i]$ *принадлежит полугруппе*, порожденной классами $[D_k]$, $k \in K$, если

$$[S_i] = \sum_{k\in K} m_k [D_k], \quad \text{где } m_k \in \mathbb{Z}_{\geqslant} \text{ целые неотрицательные.}$$

Теорема 2. *Пусть $S = \{S^j, S_i, D_k\}_{j\in J, i\in I, k\in K}$ — конечное семейство алгебраических гиперповерхностей, находящихся в общем положении в гладком компактном комплексном торическом многообразии X, и*

$$Y = \bigcap_{j\in J} S^j \setminus \bigcup_{k\in K} D_k, \quad V = \bigcup_{i\in I} V_i, \quad V_i = S_i \cap Y.$$

Если для каждого $i \in I$ класс $[S_i]$ принадлежит полугруппе, порожденной классами $[D_k]$, $k \in K$, то при любом $p \geqslant 0$ для группы гомологий $H_p(Y \setminus V)$ справедливо разложение $(*)$.

В основе доказательств сформулированных результатов лежит факт существования сдвигающей изотопии (леммы 3, 5), согласно которому для каждого компакта в $\mathbb{C}^n$ и любой поверхности V_i существует Y-окружающая изотопия, которая переводит V_i во внешность компакта, а все остальные поверхности V_k, $k \in I \setminus \{i\}$, оставляет инвариантными.

В § 1 описывается способ определения торического многообразия в терминах «обобщенных» однородных координат, используемых при доказательстве лемм об изотопии. В § 2, 3 доказывается серия лемм, комбинированное применение которых приводит к доказательствам теорем 1 и 2. Примеры, приведенные в § 4, показывают, какие условия теорем нельзя ослабить. А именно, пример 1 показывает, что в теореме 1 условие трансверсальности пересечения гиперповерхностей рассматриваемого семейства с бесконечно удаленными гиперповерхностями торической компактификации существенно, пример 2 подтверждает необходимость наличия дополнительного ограничения на классы рациональной эквивалентности гиперповерхностей (циклов), составляющих D и $\overline{V}$ в теореме 2. Согласно примеру 3 для гомологий с целыми коэффициентами теорема 2 неверна.

В § 4 рассматривается алгебраическая гиперповерхность общего положения F в комплексном торе $\mathbb{T}^n = (\mathbb{C} \setminus 0)^n$: в некоторой торической компактификации $X \supset \mathbb{C}^n \supset \mathbb{T}^n$ замыкание $\overline{F}$ трансверсально пересекает все бесконечно удаленные гиперповерхности X и координатные гиперплоскости $\mathbb{C}^n$. Исследуется структура циклов как на поверхности $F \subset \mathbb{T}^n$, так и в дополнении $\mathbb{T}^n \setminus F$. Выводится формула для вычисления числа образующих $H_p(F)$ для $p = 0, 1, \dots, n-2$. Для отдельного класса гиперповерхностей F найдено также число образующих $H_{n-1}(F)$.

Автор благодарит А. К. Циха за полезные обсуждения исследуемых вопросов, а также рецензента за ценные замечания, которые существенно улучшили качество статьи.

§ 1. Некоторые определения и понятия торической геометрии

Нам потребуется определение торического многообразия на языке «обобщенных» однородных координат (см. [6]). Напомним (см. [5]), что n-мерное компактное гладкое многообразие определяется по полному примитивному вееру (коническому полиэдру) $\triangle$ в $\mathbb{R}^n$.

Несократимые векторы из $\mathbb{Z}^n = N$, порождающие одномерные конусы $\triangle$, будем обозначать через $v_1, \dots, v_d$. Для каждого одномерного конуса из $\triangle$ (фактически для каждого вектора v_k) введем переменную ζ_k и рассмотрим так называемое координатное кольцо $\mathbb{C}\,[\xi] = \mathbb{C}\,[\xi_1, \dots, \xi_d]$. Для конуса $\sigma \in \triangle$ обозначим соответствующий моном из $\mathbb{C}\,[\xi]$ через

$$\xi_{\hat{\sigma}} = \prod_{j \notin I(\sigma)} \xi_j,$$

где $I(\sigma)$ — подмножество индексов $\{i_1, \dots, i_k\} \subset \{1, \dots, d\}$ таких, что векторы $v_{i_1}, \dots, v_{i_k}$ порождают конус σ. Введем следующее аналитическое множество в

$\mathbb{C}^d$:

$$Z = Z(\triangle) = \{\xi \in \mathbb{C}^d : \xi_{\hat{\sigma}} = 0 \text{ для всех } \sigma \in \triangle\}.$$

Торическое многообразие, соответствующее вееру $\triangle$, может быть определено (см. [6]) как фактор

$$X = X(\triangle) := (\mathbb{C}^d \setminus Z)/G.$$

Здесь G — группа $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(A_{n-1}, \mathbb{C}_*)$, где через A_{n-1} обозначена группа Чжоу, определенная точной последовательностью

$$0 \to M \to \mathbb{Z}^d \to A_{n-1} \to 0,$$

причем вложение $\mathbb{Z}^n \simeq M \to \mathbb{Z}^d$ определено линейным отображением V:

$$\mathbb{Z}^n \ni m \to V(m) = (\langle v_1, m\rangle, \dots, \langle v_d, m\rangle) \in \mathbb{Z}^d.$$

Таким образом, G состоит из элементов $g \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}^d, \mathbb{C}_*) \simeq (\mathbb{C}_*)^d$, действующих тривиально на подрешетке $V(M) \subset \mathbb{Z}^d$. Каждый такой элемент определяется вектором $\eta \in \mathbb{C}_*^d$, и результатом его действия на $a \in \mathbb{Z}^d$ является значение монома

$$g(a) = \eta^a = \eta_1^{a_1} \dots \eta_d^{a_d},$$

более того, $\eta^a = 1$, если $a = V(m)$. Следовательно, любая однопараметрическая подгруппа группы G, соответствующая кривой $\lambda^\mu = (\lambda^{\mu_1}, \dots, \lambda^{\mu_d})$, $\lambda \in \mathbb{C}_*$, характеризуется условием

$$1 \equiv (\lambda^\mu)^{V(m)} = \lambda^{\mu_1\langle v_1, m\rangle + \dots + \mu_d\langle v_d, m\rangle} = \lambda^{\langle \mu_1 v_1 + \dots + \mu_d v_d, m\rangle},$$

т. е. условием $\mu_1 v_1 + \dots + \mu_d v_d = 0$. Таким образом, к группе G можно относиться как к следующей k-параметрической поверхности:

$$G \simeq \left\{g = \left(\lambda_1^{\mu_1^1} \dots \lambda_k^{\mu_1^k}, \dots, \lambda_1^{\mu_d^1} \dots \lambda_k^{\mu_d^k}\right) : \lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_k) \in \mathbb{C}_*^k\right\},$$

где $k = d - n$ и векторы $\mu^j = \left(\mu_1^j, \dots, \mu_d^j\right)$, $j = 1, \dots, k$, порождают решетку соотношений между векторами $v_1, \dots, v_d$.

Действие $g \in G$ на $\xi \in \mathbb{C}^d \setminus Z$ определяется как

$$g \cdot \xi = (g_1\xi_1, \dots, g_d\xi_d).$$

В теореме 1 рассматриваются аффинное пространство $\mathbb{C}^n$ и его торическая компактификация с определенными свойствами. Для представления этой ситуации будем предполагать, что первые n векторов, порождающие веер $\triangle$, составляют стандартный базис $\mathbb{Z}^n$:

$$v_1 = e_1 = (1, 0, \dots, 0), \dots, v_n = e_n = (0, 0, \dots, 1).$$

В таком случае соотношения между аффинными координатами $z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n$ и однородными координатами $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_d)$ компактификации X следующие: $z = \xi^V$, что означает

$$z_1 = \xi_1 \xi_{n+1}^{v_{n+1,1}} \dots \xi_d^{v_{d,1}},\ z_2 = \xi_2 \xi_{n+1}^{v_{n+1,2}} \dots \xi_d^{v_{d,2}},\ \dots,\ z_n = \xi_n \xi_{n+1}^{v_{n+1,n}} \dots \xi_d^{v_{d,n}},$$

где $v_{n+k,j}$ — это j-я координата вектора v_{n+k}.

Пространство $\mathbb{C}^n$ будем называть *конечной частью* торического многообразия X, она характеризуется неравенствами $\xi_{n+1} \neq 0, \dots, \xi_d \neq 0$. Соответственно дивизоры $\xi_{n+1} = 0, \dots, \xi_d = 0$ будем называть *бесконечно удаленными* гиперповерхностями (дивизорами).

§ 2. Доказательство теоремы 1

Напомним (см. [8]), что для топологического пространства X и его подпространств S и S' гомеоморфизм пар

$$g : (X, S) \to (X, S')$$

называется X-*окружающей изотопией* подпространства S, если существует семейство непрерывно зависящих от t гомеоморфизмов

$$g_t : (X, S) \to (X, S^t), \quad t \in [0, 1],$$

таких, что $g_0 = 1_X$ — тождественное отображение, $g_1 = g$, $S^1 = S'$.

Следующие леммы 1 и 2 доказаны для когомологий в [1].

Лемма 1 (об исчезновении). *Пусть X — комплексное аналитическое многообразие, $S \subset X$ — аналитическое подмногообразие коразмерности* 1 *и*

$$\overline{\omega} : H_{p+2}(X) \longrightarrow H_p(S)$$

— гомоморфизм, индуцированный пересечением $(p + 2)$-мерных цепей в X с подмногообразием S. Если для каждого компакта $K \subset X$ существует X-окружающая изотопия g подмногообразия S, переводящая S во внешность K: $g(S) = S' \subset X \setminus K$, то $\overline{\omega}$ — нулевой гомоморфизм.

Доказательство. Рассмотрим диаграмму гомоморфизмов

$$\begin{array}{ccc} H_{p+2}(X) & \xrightarrow{\overline{\omega}} & H_p(S) \\ \Big\downarrow{\scriptstyle g_*} & & \Big\downarrow{\scriptstyle (g|_S)_*} \\ H_{p+2}(X) & \xrightarrow{\overline{\omega}'} & H_p(S'), \end{array}$$

где $\overline{\omega}'$ индуцирован пересечением цепей в X с подмногообразием S'. Здесь вертикальные гомоморфизмы реализуются гомотопированиями циклов посредством семейства g_t (см. определение X-окружающей изотопии). Поскольку операция гомотопирования перестановочна с операцией пересечения (для каждого сингулярного симплекса σ в X имеем $(g_t \circ \sigma) \cap S^t = g_t \circ (\gamma \cap S)$), справедливо равенство $(g \circ \sigma) \cap S = g \circ (\gamma \cap S)$. Это означает коммутативность приведенной диаграммы.

Далее, в этой диаграмме g_* является тождеством, а $(g|_S)_*$ — изоморфизмом, поскольку g гомотопно $g_0 = 1_X$ и гомеоморфно переводит S в S'.

Пусть γ — произвольный цикл из $Z_{p+2}(X)$. Для этого цикла существует компакт K со свойством $\operatorname{supp} \gamma \subset K$. По условию леммы найдется X-окружающая изотопия g, переводящая S во внешность K: $g(S) = S' \in X \setminus K$. Тем самым $\operatorname{supp} \gamma \cap S' = \varnothing$. В силу коммутативности диаграммы и тождественности g_* имеем равенства

$$(g|_S)_* \overline{\omega}[\gamma] = \overline{\omega}' g_*[\gamma] = \overline{\omega}'[\gamma].$$

Поскольку $\operatorname{supp} \gamma \cap S' = \varnothing$, получаем $\overline{\omega}'[\gamma] = 0$. Но ввиду того, что $(g|_S)_*$ — изоморфизм, из этих равенств получаем $\overline{\omega}[\gamma] = 0$, и лемма доказана.

Будем говорить, что изотопия g *оставляет инвариантным* множество V, если $g_t(V) \subset V$ для всех $t \in [0, 1]$.

Лемма 2 (о разложении). *Пусть Y — комплексное аналитическое многообразие и $\{V_1, \dots, V_r\}$ — семейство комплексных аналитических подмногообразий Y коразмерности 1, находящееся в общем положении в Y. Если для любого компакта $K \subset Y$ и любого $i \in I = \{1, \dots, r\}$ существует Y-окружающая изотопия g_i объединения $V = \bigcup\limits_{k=1}^{r} V_k$, которая*

(a) *отображает V_i во внешность K: $g_i(V_i) \subset Y \setminus K$,*

(b) *оставляет инвариантными все V_j, $j \neq i$,*

то справедливо гомологическое разложение

$$H_p\Big(Y \setminus \bigcup_{i \in I} V_i\Big) \simeq H_p(Y) \bigoplus_{h \subset I} \delta^{|h|} H_{p-|h|}\Big(Y \bigcap_{i \in h} V_i\Big), \tag{1}$$

здесь h — всевозможные подмножества I, $|h|$ — количество элементов в h.

Доказательство. Проведем доказательство индукцией по r.

Для $r = 0$ рассматриваемое разложение (1) имеет вид $H_p(Y) = H_p(Y)$ и, следовательно, справедливо.

Предположим, что утверждение леммы верно для $|I| = r - 1$. Обозначим $\widetilde{Y} = Y \setminus (V_1 \cup \dots \cup V_{r-1})$, $V = V_r \cap \widetilde{Y} = V_r \setminus (V_1 \cup \dots \cup V_{r-1})$.

Для пары $(\widetilde{Y}, V)$ напишем точную последовательность Лере [2]

$$\dots \longrightarrow H_{p+1}(\widetilde{Y}) \xrightarrow{\overline{\omega}} H_{p-1}(V) \xrightarrow{\delta} H_p(\widetilde{Y} \setminus V) \xrightarrow{i} H_p(\widetilde{Y}) \xrightarrow{\overline{\omega}} H_{p-2}(V) \longrightarrow \dots .$$

Здесь $\overline{\omega}$ — нулевое отображение в силу леммы 1 об исчезновении, примененной к паре $(\widetilde{Y}, V)$. В самом деле, по условиям (b) и (a) существует Y-окружающая изотопия g_r, оставляющая $V_1 \cup \dots \cup V_{r-1}$ инвариантным и переводящая V_r во внешность любого наперед заданного компакта $K \subset Y$. Следовательно, ограничение $g_r|_{\widetilde{Y}}$ является $\widetilde{Y}$-окружающей изотопией и переводит V во внешность любого наперед заданного компакта в $\widetilde{Y}$, что и требуется в условии леммы 1.

Итак по лемме 1 указанная последовательность Лере состоит из кусков коротких точных последовательностей

$$\xrightarrow{0} H_{p-1}(V_r \setminus (V_1 \cup \dots \cup V_{r-1})) \xrightarrow{\delta} H_p(Y \setminus (V_1 \cup \dots \cup V_r)) \xrightarrow{i} H_p(Y \setminus (V_1 \cup \dots \cup V_{r-1})) \xrightarrow{0},$$

откуда заключаем, что

$$H_p(Y \setminus (V_1 \cup \dots \cup V_r)) \simeq H_p(Y \setminus (V_1 \cup \dots \cup V_{r-1})) \oplus \delta H_{p-1}(V_r \setminus (V_1 \cup \dots \cup V_{r-1})). \tag{2}$$

Согласно предположению индукции

$$H_p(Y \setminus (V_1 \cup \dots \cup V_{r-1})) \simeq H_p(Y) \bigoplus_{h \subset \{1, \dots, r-1\}} \delta^{|h|} H_{p-|h|}\Big(\bigcap_{i \in h} V_i\Big).$$

Индукция также применима и ко второму слагаемому в (2):

$$H_{p-1}(V_r \setminus (V_1 \cup \dots \cup V_{r-1})) \simeq H_{p-1}(V_r) \bigoplus_{h \subset \{1, \dots, r-1\}} \delta^{|h|} H_{p-|h|-1}\Big(V_r \bigcap_{i \in h} V_i\Big).$$

Используя (2) и эти разложения, получаем истинность разложения (1). □

Для доказательства теоремы 1 достаточно установить существование изотопии со свойствами (a) и (b), сформулированными в лемме 2. Такое существование гарантируется в следующем утверждении.

Лемма 3 (о существовании сдвигающей изотопии). *В условиях теоремы* 1 *для каждого компакта $K \subset \mathbb{C}^n$ и любого $i \in I$ существует Y-окружающая изотопия g_i подмногообразия V_i, оставляющая инвариантными все V_k, $k \in I \backslash \{i\}$, которая переводит V_i во внешность K.*

Напомним, что алгебраическое многообразие Y представляет собой пересечение $\bigcap\limits_{j \in J} S^j$ гиперповерхностей в $\mathbb{C}^n$, а каждое V_i есть $Y \cap S_i$. Очевидно, искомая Y-окружающая изотопия в лемме 3 может быть получена сужением на Y изотопии в объемлющем пространстве $\mathbb{C}^n$, описанной в следующей лемме.

Лемма 3′. *В условиях теоремы* 1 *для каждого компакта $K \subset \mathbb{C}^n$ и любого $i \in I$ существует $\mathbb{C}^n$-окружающая изотопия g_i гиперповерхности S_i, оставляющая инвариантными все S_k, $k \in I \setminus \{i\}$, и все S^j, $j \in J$, которая переводит S_i во внешность K.*

Доказательство. Пусть X — торическая компактификация пространства $\mathbb{C}^n$, в которой семейства гиперповерхностей $\{S_i\}_{i\in I}$, $\{S^j\}_{j \in J}$ находятся в общем положении с бесконечно удаленными гиперповерхностями $S_1^\infty, \dots, S_{d-n}^\infty$. Предположим, что набор индексов I есть $\{1, 2, \dots, q\}$, и, взяв любое число $i \in I$, мы можем считать его равным 1. В однородных координатах $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_d)$ многообразия X гиперповерхность S_1 задается в виде

$$S_1 = \{[\xi] : P_1(\xi) = 0\},$$

где P_1 — однородный полином. Можно считать, что начало координат $z = 0$ пространства $\mathbb{C}^n$ не принадлежит S_1, чего можно достичь заменой координат, соответствующей параллельному переносу. Пространство $\mathbb{C}^n$ как аффинная часть определяется такими классами эквивалентности $[\xi]$, для которых $\xi_{n+1} = \dots = \xi_d = 1$ (см. [6]); таким образом, точка $z = 0$ соответствует классу точки $\xi^0 = (\underbrace{0, \dots, 0}_{n}, 1, \dots, 1)$.

Выберем шар $B(0, \rho) \subset \mathbb{C}^n$ с центром в точке 0 радиуса ρ так, чтобы он не пересекал S_1.

Покажем, что в решетке соотношений векторов $v_1, \dots, v_d$, определяющих веер $\triangle$ многообразия X, существует вектор $\bar\mu = (\mu_1, \dots, \mu_d)$, в котором первые n координат не меньше единицы: $\mu_1 \geqslant 1, \dots, \mu_n \geqslant 1$. В самом деле, в силу полноты веера $\triangle$ вектор $(-1, \dots, -1) \in \mathbb{R}^n$ лежит в некотором симплексе веера, порожденном векторами $v_{i_1}, \dots, v_{i_n}$, поэтому существует целое число $k \geqslant 1$ такое, что

$$(-k, \dots, -k) = \tilde\mu_{i_1} v_{i_1} + \dots + \tilde\mu_{i_n} v_{i_n},$$

где $\tilde\mu_{i_1}, \dots, \tilde\mu_{i_n}$ — целые неотрицательные числа. Разлагая вектор слева в виде $-kv_1 - \ldots - kv_n$ (напомним, что $v_1, \dots, v_n$ — стандартный базис решетки $\mathbb{Z}^n$) и перенося это разложение вправо, получим соотношение между векторами $v_1, \dots, v_n$, $v_{i_1}, \dots, v_{i_n}$ с натуральными коэффициентами, т. е. с искомым вектором коэффициентов $\bar\mu$.

Теперь для $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ определим деформацию многочлена P_1 по формуле

$$P_1^\lambda(\xi) = P_1(\xi_1, \dots, \xi_n, \lambda^{\mu_{n+1}} \xi_{n+1}, \dots, \lambda^{\mu_d} \xi_d),$$

где $\mu_{n+1}, \dots, \mu_d$ — часть координат построенного выше вектора $\bar\mu$ (обратим внимание на то, что $P_1(\xi)$ получается из $P_1^\lambda(\xi)$ при $\lambda = 1$).

Соответствующая деформация гиперповерхности S_1 — это

$$S_1^\lambda = \big\{[\xi] \in X : P_1^\lambda(\xi) = 0\big\}.$$

Ее сужение на конечную аффинную часть $\mathbb{C}^n$ задается в виде

$$S_1^\lambda \cap \mathbb{C}^n = \{z \in \mathbb{C}^n : P_1^\lambda(z_1, \dots, z_n, \lambda^{\mu_{n+1}}, \dots, \lambda^{\mu_d}) = 0\}.$$

Напомним, что S_1 не пересекается с шаром $B(0, \rho)$. Покажем, что ее деформация S_1^λ при $|\lambda| \geqslant 1$ не пересекается с шаром $B(0, |\lambda^k|\rho)$, где $k = \min\{\mu_1, \dots, \mu_n\} \geqslant 1$. Действительно, точка z принадлежит $S_1^\lambda \cap \mathbb{C}^n$, если

$$0 = P_1(z_1, \dots, z_n, \lambda^{\mu_{n+1}}, \dots, \lambda^{\mu_d}) = P_1\left(\lambda^{\mu_1}\frac{z_1}{\lambda^{\mu_1}}, \dots, \lambda^{\mu_n}\frac{z_n}{\lambda^{\mu_n}}, \lambda^{\mu_{n+1}}, \dots, \lambda^{\mu_d}\right)$$
$$= \lambda^{\langle \bar{a}, \bar{\mu}\rangle} P_1\left(\frac{z_1}{\lambda^{\mu_1}}, \dots, \frac{z_n}{\lambda^{\mu_n}}, 1, \dots, 1\right),$$

где $[\bar{a}]$ — степень P_1, т. е. если точка $\left(\frac{z_1}{\lambda^{\mu_1}}, \dots, \frac{z_n}{\lambda^{\mu_n}}\right)$ принадлежит S_1. Но в случае принадлежности S_1 последняя точка не может лежать в шаре $B(0, \rho)$. В таком случае при $|\lambda| \geqslant 1$ точка $|\lambda^{-k}| \cdot z$ также не может принадлежать этому шару, следовательно, $z \notin B(0, |\lambda^k|\rho)$.

Итак, при $|\lambda| \geqslant 1$ гиперповерхность S_1^λ не пересекается с шаром радиуса $|\lambda^k|\rho$. Следовательно, выбирая $|\lambda|$ достаточно большим, мы можем поместить S_1^λ вне любого наперед заданного компакта $K \subset \mathbb{C}^n$. Это обстоятельство будет использовано при построении $\mathbb{C}^n$-окружающей изотопии в лемме $3'$.

Рассмотрим следующее семейство гиперповерхностей в X:

$$\mathfrak{S}^\lambda = \{S_1^\lambda; \{S_i\}_{i \in I \setminus \{1\}}; \{S^j\}_{j \in J}; S_1^\infty, \dots, S_{d-n}^\infty\}.$$

Справедлива

Лемма 4. *Множество $M \subset \mathbb{C}$ таких λ, для которых семейство $\mathfrak{S}^\lambda$ не находится в общем положении, комплексно аналитическое и потому не разбивает $\mathbb{C}$.*

Доказательство. Справедливость этого утверждения следует из теоремы Реммерта: при собственном голоморфном отображении многообразий комплексно аналитическое множество переходит в такое же множество. В данном случае мы рассматриваем отображение $\pi : X \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, осуществляющее проекцию, и комплексное аналитическое множество $A \subset X \times \mathbb{C}$, состоящее из таких $(x, \lambda) \in X \times \mathbb{C}$, для которых в точке x семейство $\mathfrak{S}^\lambda$ не находится в общем положении. Аналитичность множества A следует из того, что в каждой точке оно задается нулями системы голоморфных функций, среди которых участвуют $p \leqslant n$ функций, определяющих соответствующие гиперповерхности семейства $\mathfrak{S}^\lambda$, и все миноры порядка p матрицы Якоби для этой системы.

Итак, по теореме Реммерта указанное в лемме 4 множество M аналитическое, следовательно, дополнение $\mathbb{C} \setminus M$ линейно связное. $\square$

Продолжим доказательство леммы $3'$. Пусть $K \subset \mathbb{C}^n$ — произвольный компакт. Согласно сказанному выше можно указать такое $\lambda_1 \in \mathbb{C} \setminus M$, что гиперповерхность $S_1^{\lambda_1}$ не пересекает K. Соединим точки $\lambda_0 = 1$ и λ_1 гладким путем γ и в произведении $X \times \gamma$ рассмотрим подмножество

$$\mathit{\Gamma} = \{(x, \lambda) : \lambda \in \gamma, x \in |\mathfrak{S}^\lambda|\} = \bigcup_{\lambda \in \gamma} (|\mathfrak{S}^\lambda| \times \{\lambda\}),$$

где $|\mathfrak{S}^\lambda|$ — объединение гиперповерхностей (носитель) семейства $\mathfrak{S}^\lambda$. Подмножество $\mathit{\Gamma}$ представляет собой семейство поверхностей в общем положении (поскольку путь γ выбран в $\mathbb{C} \setminus M$) и поэтому допускает естественную стратификацию: страты максимальной размерности — это отдельные поверхности с удаленными точками попарных пересечений, страты следующей размерности — это попарные пересечения с удаленными точками тройных пересечений, и т. д. Такая стратификация удовлетворяет условиям Уитни регулярного примыкания стратов (см. [8, гл. IV, п. 3] или [1]). Отображение проекции $\pi : X \times \gamma \to \gamma$ является собственным (напомним, что X — компактификация $\mathbb{C}^n$), и его сужение на каждый страт из Γ есть субмерсия. Следовательно, по теореме Тома [9, п. 8] π является локально тривиальным расслоением пары $(X \times \gamma, \Gamma)$, а ввиду стягиваемости γ — и тривиальным расслоением. Это означает, что существует гомеоморфизм $\psi : X \times \gamma \to X \times \gamma$, переводящий слой в слой: $\psi(x, \lambda) = (\psi_\lambda(x), \lambda)$, и такой, что

$$\psi|_\Gamma : \Gamma \to |\mathfrak{S}^{\lambda_0}| \times \gamma.$$

Таким образом, теорема Тома обеспечивает существование семейства гомеоморфизмов $g_\lambda(x) = \psi_\lambda^{-1}(x) : X \to X$ со свойством $g_\lambda(|\mathfrak{S}^{\lambda_0}|) = |\mathfrak{S}^\lambda|$, т. е. X-окружающую изотопию, переводящую $|\mathfrak{S}^{\lambda_0}|$ в $|\mathfrak{S}^{\lambda_1}|$. Но поскольку в семействе $\mathfrak{S}^\lambda$ от λ зависит лишь одна гиперповерхность S_1^λ, а бесконечно удаленные относительно $\mathbb{C}^n$ гиперповерхности S_k^∞ и гиперповерхности S^j, участвующие в определении Y, от λ не зависят, эту изотопию можно сузить на $\mathbb{C}^n$, а также на Y. Указанное сужение обладает требуемым свойством инвариантности и переводит S_1^λ во внешность K. Доказательство лемм $3'$ и 3 закончено. □

Доказательство теоремы 1 заключается в последовательном применении лемм 3 и 2.

§ 3. Доказательство теоремы 2

Нам потребуются в неизменном виде леммы 1 и 2, а аналог леммы 3 докажем в ситуации теоремы 2.

Лемма 5. *В условиях теоремы 2 для каждого $i \in I$ и любого компакта $K \subset Y$ существует Y-окружающая изотопия, переводящая $V_i = S_i \cap Y$ во внешность K и оставляющая инвариантными все $V_k = S_k \cap Y$, $k \neq i$.*

Для того чтобы построить Y-окружающую изотопию с указанным в лемме 5 свойством, достаточно построить X_D-окружающую изотопию с подобными свойствами и такую, которая сохраняет Y. Иными словами, утверждение леммы 5 вытекает из следующей леммы.

Лемма $5'$. *В условиях теоремы 2 для каждого $i \in I$ и любого компакта $K \subset X_D$ существует X_D-окружающая изотопия, переводящая S_i во внешность K и оставляющая инвариантными все S_k, $k \neq i$, и все S^j, $j \in J$.*

Доказательство. Пусть $P_i(\xi) = 0$ — уравнение для S_i в однородных координатах и $Q_k(\xi) = 0$, $k \in K$, — уравнение для D_k. По условиям теоремы 2 существуют $m_k \in \mathbb{Z}_\geqslant$ такие, что P_i и $\prod\limits_{k \in K} Q_k^{m_k}$ имеют одинаковые степени. Следовательно, в X можно определить семейство гиперповерхностей

$$S_i^\lambda = \Big\{[\xi] : P_i(\xi) + \lambda \cdot \prod_{k \in K} Q_k^{m_k}(\xi) = 0\Big\}, \quad \lambda \in \mathbb{C}.$$

Ясно, что $S_i^0 = S_i$ и если λ достаточно велико: $|\lambda| \gg 1$, то S_i^λ расположено в малой окрестности множества $\big\{\prod\limits_{k \in K} Q_k^{m_i} = 0\big\} \subset D$, т. е. вне любого наперед заданного компакта из $X_D = X \setminus D$. Теперь, как и в доказательстве леммы 4, с помощью теоремы Реммерта заключаем, что, за исключением тех λ, которые образуют аналитическое подмножество в $\mathbb{C}$, семейство

$$\mathfrak{S}^{\lambda} = \left\{S^j, j \in J;\ S_l, l \in I \setminus \{i\};\ S_i^{\lambda},\ D_k, k \in K\right\}$$

находится в общем положении в X. Поэтому по теореме об изотопии существует изотопия с необходимым свойством.

Доказательство теоремы 2 вытекает из лемм 2 и $5'$.

§ 4. Примеры

1. Покажем, что в теореме 1 условие трансверсальности пересечения гиперповерхностей рассматриваемого семейства с бесконечно удаленными гиперповерхностями торической компактификации существенно. Рассмотрим в $\mathbb{C}^3$ две гиперповерхности

$$S_1 = \left\{z \in \mathbb{C}^3 : z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = 1\right\}, \quad S_2 = \{z \in \mathbb{C}^3 : z_1 + iz_2 = 0\},$$

находящиеся в общем положении в $\mathbb{C}^3$ и пересекающиеся по паре параллельных прямых $L_\pm = \{z_1 + iz_2 = 0,\ z_3 = \pm 1\}$. Для $J = \varnothing$ разложение $(*)$ при $p = 3$ имеет вид

$$H_3(\mathbb{C}^3 \setminus S_1 \cup S_2) \simeq H_3(\mathbb{C}^3) \oplus \delta H_2(S_1) \oplus \delta H_2(S_2) \oplus \delta^2 H_1(S_1 \cap S_2). \tag{3}$$

Как и в предыдущем примере, будем предполагать, что коэффициенты групп гомологий берутся в $\mathbb{R}$.

Вычислим $\delta H_2(S_1)$. Для пары S_1, $\mathbb{C}^3$ точная последовательность Лере [2] имеет вид

$$H_4(\mathbb{C}^3) \xrightarrow{\overline{\omega}} H_2(S_1) \xrightarrow{\delta} H_3(\mathbb{C}^3 \setminus S_1) \xrightarrow{i} H_3(\mathbb{C}^3),$$

где крайние группы тривиальные. Поэтому δ — изоморфизм. Но хорошо известно, что в комплексной квадрике вещественная сфера S^2 представляет единственную образующую группы $H_2(S_1)$, поэтому $\delta H_2(S_1) \simeq H_3(\mathbb{C}^3 \setminus S_1) \simeq H_2(S^2) \simeq \mathbb{R}$.

Таким образом, поскольку S_2 — двумерная комплексная плоскость, а $S_1 \cap S_2$ — пара параллельных прямых, разложение (3) должно быть следующим:

$$H_3(\mathbb{C}^3 \setminus S_1 \cup S_2) \simeq 0 \oplus \mathbb{R} \oplus 0 \oplus 0.$$

Однако, как мы сейчас покажем, группа слева тривиальна. В самом деле, применим к паре $\mathbb{C}^3 \setminus S_1$, $\mathbb{C}^3 \setminus S_2$ точную последовательность Майера — Вьеториса:

$$H_4(\mathbb{C}^3 \setminus S_1 \cap S_2) \xrightarrow{\partial_*} H_3(\mathbb{C}^3 \setminus S_1 \cup S_2) \xrightarrow{i} H_3(\mathbb{C}^3 \setminus S_1) \oplus H_3(\mathbb{C}^3 \setminus S_2) \xrightarrow{j} H_3(\mathbb{C}^3 \setminus S_1 \cap S_2).$$

Заметим, что $\mathbb{C}^3 \setminus S_1 \cap S_2 = \mathbb{C}^3 \setminus L_+ \cup L_-$ представляет собой прямое произведение $(\mathbb{C}^2 \setminus \{a, b\}) \times \mathbb{C}$, поэтому по формуле Кюннета крайняя левая группа тривиальна, а крайняя правая — изоморфна $\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$, причем определяющими являются классы гомологий S_a^3 и S_b^3 трехмерных вещественных сфер, окружающих в $\mathbb{C}^2$ точки a и b. Группа $H_3(\mathbb{C}^3 \setminus S_1)$ порождена трубкой над вещественной сферой

$$\left\{x \in \mathbb{R}^3 = \operatorname{Re} \mathbb{C}^3 : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\right\} \subset S_1.$$

Эта трубка зацепляется с каждой из комплексных прямых $L_\pm$, поэтому по двойственности Александера — Понтрягина гомоморфизм j переводит трубку в нетривиальный элемент группы $H_3(\mathbb{C}^3 \setminus S_1 \cap S_2)$. Следовательно, j — инъекция, а i — нулевой гомоморфизм. Отсюда $H_3(\mathbb{C}^3 \setminus S_1 \cup S_2) \simeq 0$, что и требовалось обосновать.

Поскольку формула (3) неверна, заключаем, что не существует гладкой торической компактификации пространства $\mathbb{C}^3$, в которой рассматриваемое семейство $\{S_1, S_2\}$ находилось бы в общем положении с бесконечно удаленными гиперповерхностями.

2. Пусть $X = \mathbb{P}_1 \times \mathbb{P}_1$ — произведение двух комплексных проективных прямых, причем в первом экземпляре $\mathbb{P}_1$ действуют однородные координаты $\xi_0 : \xi_1$, а во втором — координаты $\eta_0 : \eta_1$. Соответственно введем локальные координаты

$$z = \frac{\xi_1}{\xi_0}, \quad w = \frac{\eta_1}{\eta_0}.$$

Рассмотрим в X две кривые

$$D = \{[\xi, \eta] : \xi_0 = 0\}, \quad S = \{[\xi, \eta] : \xi_1\eta_0 = \xi_0\eta_1\},$$

находящиеся в общем положении. В локальных координатах первая кривая задается условием $z = \infty$, а вторая — условием $z = w$. В $\mathbb{P}_1 \times \mathbb{P}_1$ класс рациональной эквивалентности дивизоров определяется бистепенью уравнения, определяющего кривую, поэтому $[D] = (1, 0)$, $[S] = (1, 1)$ и, следовательно, $[S]$ не принадлежит подполугруппе, порожденной $[D]$. Таким образом, для $D = D_1$, $S = S_1$ не выполняются условия теоремы 2. Покажем, что в данном примере разложение $(*)$, принимающее при $p = 2$ вид

$$H_2(X_D \setminus S) \simeq H_2(X_D) \oplus \delta H_1(S \setminus D),$$

также не имеет места. Для этого убедимся, что для гомологий с коэффициентами в $\mathbb{R}$

$$H_2(X_D \setminus S) \simeq 0, \quad H_2(X_D) \simeq \mathbb{R}.$$

В самом деле, $X_D = \mathbb{C} \times \mathbb{P}_1$, поэтому по формуле Кюннета [10] $H_2(X_D) \simeq \mathbb{R}$, причем образующей в $H_2(X_D)$ является комплексная прямая бистепени (1,0).

Для вычисления группы $H_2(X_D \setminus S) \simeq H_2(X \setminus D \cup S)$ применим точную последовательность Майера — Вьеториса [10] к паре открытых множеств $X \setminus D$ и $X \setminus S$:

$$H_3(X \setminus D \cap S) \xrightarrow{\partial_*} H_2(X \setminus D \cup S) \xrightarrow{i} H_2(X \setminus D) \oplus H_2(X \setminus S) \xrightarrow{j} H_2(X \setminus D \cap S).$$

Пересечение $D \cap S$ состоит из одной точки, поэтому крайние группы в этой последовательности такие же, как у X, т. е. группа слева тривиальная, а $H_2(X \setminus D \cap S) \simeq \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$. Далее, в $H_2(X \setminus D)$ и $H_2(X \setminus S)$ можно выбрать образующие бистепеней $(1, 0)$ и $(1, -1)$ соответственно (для $X \setminus S$ таковым является цикл $\{z\overline{w} = i\}$). Поскольку такая пара циклов порождает $H_2(X \setminus D \cap S)$, а гомоморфизм j индуцирован вложениями, j является инъекцией и поэтому i — нулевой гомоморфизм. Отсюда вытекает тривиальность группы $H_2(X \setminus D \cup S)$, что и требовалось обосновать.

3. Покажем, что для гомологий с целыми коэффициентами теорема 2 неверна. Пусть $D = \left\{\xi_0^2 + \xi_1^2 + \xi_2^2 = 0\right\}$ — квадрика в $\mathbb{P}_2$, а $S = \{\xi_0 = 0\}$ — прямая, находящаяся с квадрикой в общем положении. Для квазипроективного многообразия $Y = \mathbb{P}_2 \setminus D$ разложение $(*)$ принимает при $p = 1$ вид

$$H_1(\mathbb{P}_2 \setminus D \cup S, \mathbb{Z}) \simeq H_1(\mathbb{P}_2 \setminus D, \mathbb{Z}) \oplus \delta H_0(S \setminus D, \mathbb{Z}). \tag{4}$$

Поскольку $\mathbb{P}_2 \setminus D \cup S = \mathbb{C}^2 \setminus D$, а D гомеоморфно вещественной двумерной сфере, по двойственности Александера — Понтрягина $H_1(\mathbb{P}_2 \setminus D \cup S, \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}$ и, в частности, группа слева в (4) свободна. В то же самое время группа $H_1(\mathbb{P}_2 \setminus D, \mathbb{Z})$ является циклической группой $\mathbb{Z}_2$. В самом деле, применим к паре многообразий $(\mathbb{P}_2, D)$ точную последовательность Лере

$$H_2(\mathbb{P}_2, \mathbb{Z}) \xrightarrow{\overline{\omega}} H_0(D, \mathbb{Z}) \xrightarrow{\delta} H_1(\mathbb{P}_2 \setminus D, \mathbb{Z}) \longrightarrow 0,$$

которая фактически такова:

$$\mathbb{Z} \xrightarrow{\overline{\omega}} \mathbb{Z} \xrightarrow{\delta} H_1(\mathbb{P}_2 \setminus D, \mathbb{Z}) \longrightarrow 0,$$

где $\overline{\omega}$ переводит $\mathbb{Z}$ в $2\mathbb{Z}$ (поскольку образующая в $H_2(\mathbb{P}_2, \mathbb{Z})$ — комплексная прямая, пересекающая квадрику D в двух точках с одинаковой кратностью $+1$). Отсюда получаем

$$H_1(\mathbb{P}_2 \setminus D, \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}/\operatorname{Im} w = \mathbb{Z}_2.$$

Сказанное означает, что разложение (4) не имеет места.

§ 5. Гомологии гиперповерхности в комплексном торе

Рассмотрим комплексный тор $\mathbb{T}^n = \mathbb{C}^n \setminus \bigcup\limits_{i=1}^{n} T_i$, где $T_i = \{z \in \mathbb{C}^n : z_i = 0\}$, $i = \overline{1, n}$, и в нем алгебраическую гиперповерхность $F = \{z \in \mathbb{T}^n : P(z) = 0\}$, определяемую полиномом Лорана

$$P(z) = \sum_{\alpha \in A} a_\alpha z^\alpha. \tag{5}$$

Назовем F *гиперповерхностью общего положения*, если в некоторой торической компактификации $X \supset \mathbb{T}^n$ замыкание $\overline{F}$ трансверсально пересекает все бесконечно удаленные гиперповерхности, а также все T_i, $i = \overline{1, n}$.

Это равносильно тому (см. [5]), что для любого целочисленного направления $a \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0\}$ система уравнений $P_a = 0$, $\operatorname{grad} P_a = 0$ не имеет корней в торе $\mathbb{T}^n$, где P_a — срезка полинома P на грань Δ_a многогранника Ньютона полинома P.

Напомним, что *многогранником Ньютона* Δ полинома Лорана (5) называется выпуклая оболочка в $\mathbb{R}^n$ подмножества $A \subset \mathbb{Z}^n$, а грань Δ_a определяется как

$$\Delta_a = \{x \in \Delta : \langle a, x \rangle = \min_{y \in \Delta} \langle a, y \rangle\},$$

тогда $P_a = \sum\limits_{\alpha \in \Delta_a} a_\alpha z^\alpha$ — *срезка* .

Теорема 3. *Пусть F — алгебраическая гиперповерхность общего положения в комплексном торе $\mathbb{T}^n$. Тогда для всех $p = 0, 1, \ldots, n-2$*

$$\dim H_p(F) = \binom{n}{p}.$$

Этот факт можно обосновать с помощью теоремы Бернштейна — Данилова — Хованского для когомологий [11], но мы приведем доказательство с помощью теоремы 1, которое позволяет проследить конструкцию базисных циклов.

Доказательство. Обозначим через $\widehat{F}$ пересечение замыкания $\overline{F}$ в подходящей торической компактификации с конечной частью $\mathbb{C}^n = \mathbb{T}^n \bigcup\limits_{i=1}^{n} T_i$, и пусть $F_i = \widehat{F} \cap T_i$, $i = \overline{1,n}$.

Поверхности $\widehat{F}$, $T_1, \dots, T_n$ находятся в общем положении с набором всех бесконечно удаленных гиперповерхностей, следовательно, по теореме 1 имеет место следующее разложение:

$$H_p(F) = H_p\left(\widehat{F} \setminus \bigcup_{j=1}^{n} F_j\right) \simeq H_p(\widehat{F}) \bigoplus_{k=1}^{p} \delta^k H_{p-k}(\widehat{F} \cap T_{i_1} \cap \dots \cap T_{i_k}), \qquad (6)$$

где суммирование ведется по всем упорядоченным наборам целых чисел $1 \leqslant i_1 < \dots < i_k \leqslant n$ и δ^k — кратная кограница Лере.

Для алгебраической гиперповерхности $\widehat{F} \subset \mathbb{C}^n$ дополнение $\mathbb{C}^n \setminus \widehat{F}$ является многообразием Штейна, поэтому (см. [12]) $H_{n+k-1}(\mathbb{C}^n \setminus \widehat{F}) = 0$ для $k > 1$.

Согласно двойственности Александера — Понтрягина (см. [13])

$$H_{n+k-1}(\mathbb{C}^n \setminus \widehat{F}) \simeq H_{n-k}(\overset{\bullet}{F})$$

для $k = 2, \dots, n-1$ и $n > 1$, где $\overset{\bullet}{F}$ — замыкание $\widehat{F}$ в сферической (одноточечной) компактификации $S^{2n} = \mathbb{C}^n \cup \{\infty\}$ пространства $\mathbb{C}^n$.

Таким образом, $H_p(\overset{\bullet}{F}) \simeq 0$ для $p = 1, \dots, n-2$.

Покажем, что при переходе от $\overset{\bullet}{F}$ к $\widehat{F}$, т. е. при выбрасывании из $\overset{\bullet}{F}$ бесконечно удаленной точки $\{\infty\}$, на $\widehat{F}$ не могут возникнуть новые нетривиальные циклы размерности, меньшей $2n-3$. Действительно, рассмотрим замкнутый шар $D_\infty \subset S^{2n}$ с центром на бесконечности. Его можно представить как

$$D_\infty = \{z \in \mathbb{C}^n : |z_1|^2 + \dots + |z_n|^2 > R\} \cup \{\infty\}.$$

Замыкание алгебраического множества $\widehat{F}$ в сферической компактификации S^{2n} пространства $\mathbb{C}^n$ можно рассматривать как замыкание вещественного алгебраического многообразия из $\mathbb{R}^{2n}$. Топология окрестности простой или изолированной сингулярной точки z_0 алгебраического множества описана в [14, теорема 2.10], откуда следует, что пересечение алгебраического многообразия с замкнутым шаром достаточно малого радиуса с центром в точке z^0 гомеоморфно конусу с вершиной в z^0 над пересечением этого многообразия с границей диска. Таким образом, в нашей ситуации для достаточно больших R пересечение $\overset{\bullet}{F}$ с D_∞ гомеоморфно конусу над $\widehat{F} \cap \partial D_\infty$ с вершиной в бесконечно удаленной точке, а $\widehat{F} \cap D_\infty$ — соответствующему цилиндру, поэтому при выбрасывании из $\overset{\bullet}{F}$ бесконечно удаленной точки не может возникнуть нетривиальных циклов размерности, меньшей $2n-3$, и

$$H_p(\widehat{F}) = 0 \qquad (7)$$

для $p = 1, \dots, n-2$ и $n > 1$.

Заметим, что пересечение $\widehat{F} \cap T_{i_1} \cap \dots \cap T_{i_k}$ является алгебраической гиперповерхностью в пространстве $\mathbb{C}^{n-k}$, поэтому по (7)

$$\dim H_{p-k}(\widehat{F} \cap T_{i_1} \cap \dots \cap T_{i_k}) = \begin{cases} 0, & k < p < n-1, \\ 1, & k = p < n-1. \end{cases}$$

Отсюда и из (7) имеем

$$\dim H_p(F) = \dim H_p(\widehat{F} \cap \mathbb{T}^n) = \dim \bigoplus_{1 \leqslant i_1 < \dots < i_p \leqslant n} \delta^p H_0(\widehat{F} \cap T_{i_1} \cap \dots \cap T_{i_p}) = \binom{n}{p},$$

условие на суммирование прежнее. □

Выясним структуру $(n-1)$-мерных гомологий гиперповерхности F в торе $\mathbb{T}^n$ и n-мерных гомологий дополнения $\mathbb{T}^n \backslash F$ при выполнении условий теоремы 3.

Представление о группе $H_{n-1}(F)$ дает формула (6) для $p = n-1$:

$$H_{n-1}(F) \simeq H_{n-1}(\widehat{F}) \bigoplus_{k=1}^{n-1} \delta^k H_{n-k-1}(\widehat{F} \cap T_{i_1} \cap \dots \cap T_{i_k}), \tag{8}$$

где суммирование ведется по всем упорядоченным наборам целых чисел $1 \leqslant i_1 < \dots < i_k \leqslant n$.

Для дополнения к F в $\mathbb{T}^n$ имеем

$$\mathbb{T}^n \setminus F = \mathbb{C}^n \setminus (\widehat{F} \cup T_1 \cup \dots \cup T_n).$$

Общность положения $\overline{F}$ позволяет применить теорему 1. Исключая из рассмотрения тривиальные группы $H_n(\mathbb{C}^n)$, $H_{n-k}(T_{i_1} \cap \dots \cap T_{i_k})$, $k \neq n$, получаем следующее разложение:

$$H_n(\mathbb{T}^n \backslash F) \simeq \delta H_{n-1}(\widehat{F}) \bigoplus_{k=1}^{n-1} \delta^{k+1} H_{n-k-1}(\widehat{F} \cap T_{i_1} \cap \dots \cap T_{i_k}) \oplus \delta^n H_0(T_1 \cap \dots \cap T_n), \tag{9}$$

условие на суммирование прежнее.

Сравнение формул (8) и (9) позволяет заключить, что все n-мерные циклы дополнения $\mathbb{T}^n \backslash F$, кроме одного, являются трубками (простыми или кратными) над циклами, лежащими на поверхности $\widehat{F}$, и только один цикл является n-кратной кограницей Лере начала координат.

В заключение рассмотрим пример гиперповерхности

$$F = F(d_1, \dots, d_n) = \left\{ z \in \mathbb{T}^n : z_1^{d_1} + \dots + z_n^{d_n} = 1 \right\},$$

очевидно, являющейся гиперповерхностью общего положения.

Гомологии $\widehat{F} = \left\{ z \in \mathbb{C}^n : z_1^{d_1} + \dots + z_n^{d_n} = 1 \right\}$ соответствующей гиперповерхности в $\mathbb{C}^n$ были вычислены Фамом в работе [15]:

$$\dim H_{n-1}(\widehat{F}) = (d_1 - 1)(d_2 - 1) \dots (d_n - 1),$$

$$\dim H_{n-k-1}(\widehat{F} \cap T_{i_1} \cap \dots \cap T_{i_k}) = (d_{i_{k+1}} - 1) \dots (d_{i_n} - 1),$$

где $(i_1, \dots, i_n)$ — перестановка элементов $(1, \dots, n)$ и $k = 1, \dots, n-2$. Также отметим, что

$$\dim H_0(\widehat{F} \cap T_{i_1} \cap \dots \cap T_{i_{n-1}}) = d_{i_n}.$$

Таким образом, формула (8) приводит к равенству

$$\dim H_{n-1}(F(d_1, \dots, d_n)) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{1 \leqslant i_1 < \dots < i_k \leqslant n} \prod_{j=1}^{k} (d_{i_j} - 1) + n. \tag{10}$$

Частным случаем $F(d_1, \dots, d_n)$ является пересечение тора с поверхностью Ферма $z_1^d + \dots + z_n^d = 1$, $d \in \mathbb{N}$. Для этой гиперповерхности формула (10) упрощается:

$$\dim H_{n-1}(F(d, \dots, d)) = d^n + n - 1. \tag{11}$$

Поскольку любая общая гиперповерхность изотопна поверхности Ферма, формула (11) будет иметь место и для произвольной общей гиперповерхности степени d.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Fotiadi D., Froissart M., Lascoux J., Pham F.* Applications of an isotopy theorem // Topology. 1965. V. 4, N 2. P. 159–191.
2. *Лере Ж.* Дифференциальное и интегральное исчисление на комплексном аналитическом многообразии. М.: Изд-во иностр. лит., 1961.
3. *Tsikh A.* Multidimensional residues and their applications. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1992. (Transl. Amer. Math. Soc.; V. 103).
4. *Aleksandrov A. G., Tsikh A. K.* Multi-logarithmic differential forms on complete intersections // Журн. Сибирского федерального университета. Математика и физика. 2008. V. 1, N 2. P. 105–124.
5. *Хованский А. Г.* Многогранники Ньютона (разрешение особенностей) // Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. М.: ВИНИТИ, 1985. Т. 22. С. 207–239. (Итоги науки и техники.)
6. *Cox D. A.* The homogeneous coordinate ring of a toric variety // J. Algebr. Geom. 1995. V. 4, N 1. P. 17–50.
7. *Shchuplev A., Tsikh A., Yger A.* Residual kernels with singularities on coordinate planes // Proc. Steklov Institute of Math. 2006. V. 253, N 2. P. 256–274.
8. *Фам Ф.* Введение в топологическое исследование особенностей Ландау. М.: Мир, 1970.
9. *Mather J. N.* Stratifications and mappings // Dynamical systems. New York; London: Acad. Press, 1973. P. 195–232.
10. *Спеньер Э.* Алгебраическая топология. М.: Мир, 1971.
11. *Данилов В. И., Хованский А. Г.* Многогранники Ньютона и алгоритм вычисления чисел Ходжа — Делиня // Изв. РАН. Сер. мат. 1986. Т. 50, № 5. С. 925–945.
12. *Грауэрт Г., Реммерт Р.* Теория пространств Штейна. М.: Наука, 1989.
13. *Александров П. С.* Комбинаторная топология. М.; Л.: Гостехиздат, 1947.
14. *Милнор Дж.* Особые точки комплексных гиперповерхностей. М.: Мир, 1971.
15. *Фам Ф.* Обобщенные формулы Пикара — Лефшеца и ветвление интегралов // Математика. 1969. Т. 13, № 4. С. 61–93.

Статья поступила 7 июля 2009 г., окончательный вариант — 25 февраля 2010 г.

Бушуева Наталья Александровна
Сибирский федеральный университет,
пр. Свободный, 79, Красноярск 660041
bushueva@lan.krasu.ru