Сибирский математический журнал
Июль—август, 2010. Том 51, № 4

УДК 510.5+510.6

О РАЗРЕШИМОСТИ ПРОБЛЕМЫ РАЗЛОЖИМОСТИ ДЛЯ КОНЕЧНЫХ ТЕОРИЙ

А. С. Морозов, Д. К. Пономарев

Аннотация. Рассматривается проблема разложимости элементарных теорий — алгоритмическая проблема нетривиального представления теории в виде объединения двух (или более) теорий дизъюнктных сигнатур. Доказаны Σ_1^0-полнота и, как следствие, алгоритмическая неразрешимость проблемы разложимости конечных хорновых универсальных теорий, а также разрешимость проблемы разложимости для конечных теорий в сигнатуре, содержащей только одноместные предикаты и символы констант.

Ключевые слова: разложимая теория, декомпозиция теорий, хорновы теории, логическое программирование, монадическая логика.

Интерес к изучению разбиений теорий обусловлен практическими задачами и связан с развитием компонентных методов в автоматическом доказательстве теорем [1] и сопровождении терминологических систем [2–5]. Исследование свойства разложимости элементарных теорий начато в [6], где установлена однозначность разложения элементарной теории на неразложимые компоненты и сформулирован критерий разложимости. В дальнейшем эти результаты были расширены на более общее свойство Δ-разложимости теорий в широком классе логических исчислений [7].

Естественным вопросом для изучения является эффективность распознавания свойства разложимости. Для ряда конечных сигнатур проблема разложимости конечно аксиоматизируемых элементарных теорий оказывается Σ_1^0-полной и, следовательно, алгоритмически неразрешимой; в частности, это верно уже для конечных универсальных хорновских теорий. Однако в случае, когда сигнатура теории состоит из одноместных предикатных и константных символов, проблема разложимости оказывается алгоритмически разрешимой. Доказательству этих результатов посвящена данная статья. Все основные определения, используемые в статье, достаточно стандартны, и их можно найти, например, в [8–10].

Введем сначала некоторые обозначения. Через ω будем, как обычно, обозначать множество всех натуральных чисел, через $\{0,1\}^n$ — множество кортежей длины n, состоящих из нулей и единиц. Если Σ — сигнатура, то язык первого порядка этой сигнатуры будем обозначать через L_Σ. Пусть $\mathscr{T}$ — множество формул первого порядка. Через $\mathtt{sig}(\mathscr{T})$ будем обозначать множество всех сигнатурных символов, входящих в формулы из $\mathscr{T}$. Если Σ — некоторая сигнатура, то под теорией сигнатуры Σ мы понимаем любое множество предложений этой сигнатуры.

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ № 05–01–04003–ННИО_а (DFG project COMO, GZ: 436 RUS 113/829/0–1).

Напомним определение разложимой теории.

Определение 1 [6]. Пусть $\mathscr{T}$, $\mathscr{S}_0$ и $\mathscr{S}_1$ — теории такие, что
1) $\mathtt{sig}\ (\mathscr{S}_0) \neq \varnothing \neq \mathtt{sig}(\mathscr{S}_1)$;
2) $\mathtt{sig}(\mathscr{S}_0) \cap \mathtt{sig}(\mathscr{S}_1) = \varnothing$, $\mathtt{sig}(\mathscr{S}_0) \cup \mathtt{sig}(\mathscr{S}_1) = \mathtt{sig}(\mathscr{T})$;
3) теория $\mathscr{T}$ эквивалентна теории $\mathscr{S}_0 \cup \mathscr{S}_1$.

Тогда будем говорить, что $\mathscr{T}$ *разложима на теории* $\mathscr{S}_0$ и $\mathscr{S}_1$. Пару $\langle \mathscr{S}_0, \mathscr{S}_1 \rangle$ назовем *разложением теории* $\mathscr{T}$. Этот факт будет записываться как $T = \mathscr{S}_0 \uplus \mathscr{S}_1$. При этом теории $\mathscr{S}_0$ и $\mathscr{S}_1$ будем называть *компонентами* этого разложения, а сигнатуры $\mathtt{sig}(\mathscr{S}_0)$ и $\mathtt{sig}(\mathscr{S}_1)$ — *сигнатурными компонентами разложения.* Теория называется *разложимой*, если у нее существует хотя бы одно разложение. Предложение φ называется *разложимым*, если разложима определяемая им теория.

Отметим один простой теоретико-модельный критерий разложимости теорий.

Предложение 1. *Пусть сигнатура Σ является объединением непустых непересекающихся сигнатур Σ_0 и Σ_1. Обозначим через $\mathscr{T}_i$ множество следствий из теории $\mathscr{T}$ в сигнатуре Σ_i, $i = 0, 1$. Тогда следующие условия эквивалентны:*

1) *$\mathscr{T}$ разложима на компоненты сигнатур Σ_0 и Σ_1;*

2) *любая модель сигнатуры Σ, обеднения которой на сигнатуры Σ_0 и Σ_1 являются моделями теорий $\mathscr{T}_0$ и $\mathscr{T}_1$ соответственно, является также моделью теории $\mathscr{T}$.*

Мы будем рассматривать только *эффективные сигнатуры*, т. е. такие сигнатуры, у которых каждому символу естественным образом присвоен его номер — натуральное число, все номера образуют начальный (конечный или бесконечный) отрезок ω и по номеру символа можно эффективно вычислить число его аргументов. Если Σ — произвольная эффективная сигнатура, то можно определить естественную (так называемую гёделеву) нумерацию γ всех формул этой сигнатуры таким образом, что по произвольному натуральному числу эффективно определяется формула γ_n с этим номером, и по произвольной формуле φ можно эффективно определить ее некоторый номер n, т. е. такое натуральное число, что $\varphi = \gamma_n$. На основе этой гёделевой нумерации формул можно определить естественную нумерацию всех конечных множеств формул. Для этого сначала определим обычную нумерацию D всех конечных подмножеств ω:

$$D_n = \{a_0 < a_1 < \cdots < a_{k-1}\} \Leftrightarrow n = \sum_{i<k} 2^{a_i}.$$

При этом конечное множество формул $\{\gamma_{i_0}, \ldots, \gamma_{i_s}\}$ получает номер n, если $D_n = \{i_0, \ldots, i_s\}$. Конечное множество формул, имеющее номер n, будем обозначать через $\widetilde{D}_n$, а номер n будем называть *индексом* конечного множества формул $\widetilde{D}_n$.

Область значения частично вычислимой функции f будем обозначать через $\mathtt{range}\,(f)$.

Определение 2. *Проблемой разложимости для конечных семейств предложений сигнатуры* Σ назовем множество индексов конечных разложимых теорий сигнатуры Σ.

Таким образом, проблема разложимости для сигнатуры Σ разрешима, если существует алгоритм, позволяющий по любому конечному набору предложений в сигнатуре Σ установить, является ли он разложимым.

Конечные универсальные хорновские теории

Теория, аксиоматизируемая конечным набором квазитождеств, называется *конечной универсальной хорновской теорией.* Известно, что аксиоматизации такого рода соответствуют классу логических программ [11]. Мы будем опускать кванторы в записи аксиом таких теорий и использовать левосторонний стиль записи импликаций, принятый в логическом программировании.

Теорема 1. *Существует конечная сигнатура Σ такая, что проблема разложимости конечных универсальных хорновских теорий сигнатуры Σ является Σ_1^0-полной.*

Покажем, что существует эффективная процедура, которая по заданному $m \in \omega$ и гёделеву номеру примитивно вычислимой функции f определяет индекс конечной универсальной хорновской теории $\mathscr{S}_m$ такой, что $\mathscr{S}_m$ разложима тогда и только тогда, когда $m \in \mathtt{range}\,(f)$.

Зафиксируем конечную последовательность функций $f_1, \dots, f_k$, где $f_k \equiv f$ и для каждого $i \in \{1, \dots, k\}$ имеет место один из перечисленных ниже случаев:

1) f_i есть функция проекции $I_m^n(x_1, \dots, x_n) = x_m$, $1 \leq m \leq n$, либо функция-константа $0(x) = 0$, либо функция следования $s(x) = x + 1$;

2) f_i есть суперпозиция некоторых элементов указанной последовательности с номерами, меньшими чем i;

3) f_i получается примитивной рекурсией из некоторых элементов указанной последовательности, имеющих номера меньше i.

Последовательность $f_1, \dots, f_k$ можно рассматривать как схему вычисления f. Для каждого $i \in \{1, \dots, k\}$ зафиксируем один из перечисленных случаев для f_i.

Докажем модифицированный результат о представимости частично вычислимых функций логическими программами [11, теорема 9.6]. В частности, в доказательстве будет использоваться дополнительный аргумент $\mathbf{s}(\mathbf{0})$ для того, чтобы построить представляющую теорию неразложимой. Нам потребуется доказательство лишь для примитивно вычислимых функций.

Рассмотрим конечную универсальную хорновскую теорию $\mathscr{T}$, определенную следующим образом: сигнатура $\mathscr{T}$ содержит одноместный функциональный символ $\mathbf{s}$, константу $\mathbf{0}$ и для каждого $i \in \{1, \dots, k\}$ $(n+2)$-местный предикатный символ P_i, где n — число аргументов функции f_i. Для каждого $i \in \{1, \dots, k\}$ теория $\mathscr{T}$ включает аксиому φ_i следующего вида.

Случай 1: f_i есть $I_m^n(x_1, \dots, x_n)$.
Тогда φ_i — универсальное замыкание формулы $P_i(x_1, \dots, x_n, x_m, \mathbf{s}(\mathbf{0}))$.

Случай 2: f_i есть $0(x)$.
В этом случае φ_i — универсальное замыкание формулы $P_i(x, \mathbf{0}, \mathbf{s}(\mathbf{0}))$.

Случай 3: f_i есть $s(x)$.
Тогда φ_i — универсальное замыкание $P_i(x, \mathbf{s}(x), \mathbf{s}(\mathbf{0}))$.

Случай 4: $f_i(\bar{x}) = f_j(f_{l_1}(\bar{x}), \dots, f_{l_q}(\bar{x}))$, где $j, l_1, \dots, l_q < i$.
В этом случае φ_i — универсальное замыкание формулы

$$P_i(\bar{x}, y, \mathbf{s}(\mathbf{0})) \leftarrow \bigwedge_{p=1}^{q} P_{l_p}(\bar{x}, z_p, \mathbf{s}(\mathbf{0})) \wedge P_j(z_1, \dots, z_q, y, \mathbf{s}(\mathbf{0})).$$

Случай 5: $f_i(\bar{x}, y)$ получается примитивной рекурсией из функций $f_j(\bar{x})$ и $f_l(\bar{x}, y, z)$, $j, l < i$; более точно, функция определяется соотношениями $f_i(\bar{x}, 0) = f_j(\bar{x})$, $f_i(\bar{x}, y+1) = f_l(\bar{x}, y, f_i(\bar{x}, y))$.

В этом случае φ_i — конъюнкция универсального замыкания формулы

$$P_i(\bar{x}, \mathbf{0}, t, \mathbf{s}(\mathbf{0})) \leftarrow P_j(\bar{x}, t, \mathbf{s}(\mathbf{0}))$$

и универсального замыкания формулы

$$P_i(\bar{x}, \mathbf{s}(y), t, \mathbf{s}(\mathbf{0})) \leftarrow P_l(\bar{x}, y, u, t, \mathbf{s}(\mathbf{0})) \wedge P_i(\bar{x}, y, u, \mathbf{s}(\mathbf{0})).$$

Определение теории $\mathscr{T}$ завершено.

Лемма 1. *Для всех натуральных чисел $x_1, \ldots, x_n, y$ выполняется*

$$\mathscr{T} \vdash P_k\left(\mathbf{s}^{x_1}(\mathbf{0}), \ldots, \mathbf{s}^{x_n}(\mathbf{0}), \mathbf{s}^{y}(\mathbf{0}), \mathbf{s}(\mathbf{0})\right) \Leftrightarrow f(x_1, \ldots, x_n) = y.$$

($\Leftarrow$) непосредственно следует из определения теории $\mathscr{T}$.

($\Rightarrow$) Определим модель[1)] $\mathfrak{M}$, которая будет играть важную роль в оставшейся части доказательства теоремы 1. Основным множеством модели $\mathfrak{M}$ является множество всех натуральных чисел, а сигнатура состоит из константы 0 и функции s, определенной стандартным образом как $s(m) = m + 1$. Кроме того, для каждой m-местной функции f_i полагаем

$$\mathfrak{M} \models P_i(x_1, \ldots, x_m, y, z) \Leftrightarrow (f_i(x_1, \ldots, x_m) = y) \wedge (z = 1).$$

Очевидно, $\mathfrak{M} \models \mathscr{T}$.

Предположим, что

$$\mathscr{T} \vdash P_k(\mathbf{s}^{x_1}(\mathbf{0}), \ldots, \mathbf{s}^{x_n}(\mathbf{0}), \mathbf{s}^{y}(\mathbf{0}), \mathbf{s}(\mathbf{0})).$$

Тогда $\mathfrak{M} \models \mathscr{T}$ влечет

$$\mathfrak{M} \models P_k(\mathbf{s}^{x_1}(\mathbf{0}), \ldots, \mathbf{s}^{x_n}(\mathbf{0}), \mathbf{s}^{y}(\mathbf{0}), \mathbf{s}(\mathbf{0})),$$

т. е. $\mathfrak{M} \models P_k(x_1, \ldots, x_n, y, 1)$, что по определению $\mathfrak{M}$ дает $f(x_1, \ldots, x_n) = y$. □

Для дальнейшего нам потребуются вспомогательное определение и лемма, приведенные ниже.

Пусть π — произвольная перестановка некоторого множества M. Пусть $Q \subseteq M^k$ — предикат на M. Предикат $Q^\pi = \{\langle \pi(a_1), \ldots, \pi(a_k) \rangle \mid \langle a_1, \ldots, a_k \rangle \in Q\}$ назовем *сопряженным с Q при помощи π*. Если $F : M^k \to M$ — операция на M, то *операцию, сопряженную с F при помощи π*, определим как $F^\pi(\pi(a_1), \ldots, \pi(a_k)) = \pi(b) \Leftrightarrow F(a_1, \ldots, a_k) = b$. Результатом *сопряжения элемента $a \in M$ с помощью π* назовем $\pi(a)$.

Следующее свойство разложимых теорий достаточно очевидно.

Лемма 2. *Пусть теория $\mathscr{T}$ разложима на компоненты $\mathscr{S}_0$ и $\mathscr{S}_1$ сигнатур Σ_0 и Σ_1 соответственно. Пусть $\mathfrak{N} \models \mathscr{T}$, и пусть π — произвольная перестановка основного множества модели $\mathfrak{N}$. Определим модель $\mathfrak{N}^\pi$ как результат замены сигнатурных операций, предикатов и констант из Σ_0 их сопряженными с помощью π. Тогда $\mathfrak{N}^\pi \models \mathscr{T}$.*

Продолжим доказательство теоремы 1. Важным свойством построенной теории $\mathscr{T}$ является то, что эта теория остается неразложимой при некоторых ее естественных расширениях:

[1)] В терминах универсальной алгебры $\mathfrak{M}$ будет *свободной алгеброй ранга* 0 *в квазимногообразии, определенном предложениями $\mathscr{T}$.*

Лемма 3. *Предположим, что* $\mathscr{T}' \supseteq \mathscr{T}$ *и* $\mathscr{T}'$ *выполняется в некотором обогащении* $\overline{\mathfrak{M}}$ *модели* $\mathfrak{M}$. *Пусть* $\mathscr{T}' = \mathscr{S}_0 \uplus \mathscr{S}_1$. *Тогда либо* $\mathtt{sig}(\mathscr{T}) \subseteq \mathtt{sig}(\mathscr{S}_0)$, *либо* $\mathtt{sig}(\mathscr{T}) \subseteq \mathtt{sig}(\mathscr{S}_1)$.

Индукцией по $i \in \{1, \dots, k\}$ покажем, что символы P_i, $\mathbf{s}$ и $\mathbf{0}$ обязаны принадлежать одной сигнатурной компоненте разложения.

Предположим, что это утверждение верно для всех $l < i$ при некотором $i \leq k$. Покажем, что оно истинно и для i. Рассмотрим несколько случаев.

Случай 1: f_i — функция $I^n_m(x_1, \dots, x_n) = x_m$.

Подслучай 1.1: $\mathbf{s}, \mathbf{0} \in \mathtt{sig}(\mathscr{S}_u)$, а $P_i \in \mathtt{sig}(\mathscr{S}_{1-u})$, $u \in \{0, 1\}$.

Определим перестановку π основного множества модели $\overline{\mathfrak{M}}$ так, чтобы $s^\pi(0^\pi) \neq 1$. Пусть $\overline{\mathfrak{M}}^\pi$ — модель, полученная из $\overline{\mathfrak{M}}$ заменой всех операций, предикатов и констант, соответствующих символам $\mathtt{sig}(\mathscr{S}_u)$, сопряженными. Имеем $\overline{\mathfrak{M}} \models \mathscr{T}'$, но, очевидно, $\overline{\mathfrak{M}}^\pi \not\models \forall \bar{x}\, P_i(\bar{x}, x_m, \mathbf{s}(\mathbf{0}))$, в то время как это предложение принадлежит $\mathscr{T} \subseteq \mathscr{T}'$. Это противоречит лемме 2, следовательно, данный подслучай не может иметь места.

Подслучай 1.2: $\mathbf{s}, P_i \in \mathtt{sig}(\mathscr{S}_u)$, а $\mathbf{0} \in \mathtt{sig}(\mathscr{S}_{1-u})$, $u \in \{0, 1\}$.

Определим перестановку π основного множества модели $\overline{\mathfrak{M}}$ так, чтобы $0^\pi \neq 0$. Рассуждение, схожее с приведенным выше, показывает, что данный случай также невозможен.

Подслучай 1.3: $\mathbf{0}, P_i \in \mathtt{sig}(\mathscr{S}_u)$, а $\mathbf{s} \in \mathtt{sig}(\mathscr{S}_{1-u})$, $u \in \{0, 1\}$.

Достаточно выбрать перестановку π основного множества $\overline{\mathfrak{M}}$ со свойством $s^\pi(0) \neq 1$, чтобы показать, что данный случай также не может иметь места.

Из рассмотренных ситуаций следует, что в случае 1 символы $\mathbf{0}$, $\mathbf{s}$ и P_i должны принадлежать одной сигнатурной компоненте разложения.

Случай 2: f_i есть функция $0(x) = 0$.

Подслучай 2.1: Символы $\mathbf{0}$ и P_i принадлежат разным сигнатурным компонентам.

Определим перестановку π основного множества модели $\overline{\mathfrak{M}}$ так, что $0^\pi \neq 0$. Имеем $\overline{\mathfrak{M}} \models \mathscr{T}'$, но, очевидно, $\overline{\mathfrak{M}}^\pi \not\models \forall x P_i(x, \mathbf{0}, \mathbf{s}(\mathbf{0}))$, в то время как это предложение принадлежит теории $\mathscr{T}'$. Это противоречит лемме 2, следовательно, данный подслучай не может иметь места.

Подслучай 2.2: $\mathbf{0}, P_i \in \mathtt{sig}(\mathscr{S}_u)$, а $\mathbf{s} \in \mathtt{sig}(\mathscr{S}_{1-u})$, $u \in \{0, 1\}$.

Выберем перестановку π такую, что $s^\pi(0) \neq 1$, и используем аналогичный прием, чтобы показать, что данный подслучай также невозможен.

Заключаем, что в случае 2 символы $\mathbf{0}$, $\mathbf{s}$ и P_i также обязаны принадлежать одной сигнатурной компоненте разложения.

Случай 3: f_i — функция $s(x) = x + 1$.

Подслучай 3.1: $\mathbf{s}$ и P_i принадлежат различным сигнатурным компонентам.

Определим перестановку π основного множества модели $\overline{\mathfrak{M}}$ так, что s^π и s различны как операции. По лемме 2 имеем $\overline{\mathfrak{M}} \models \mathscr{T}'$, однако $\overline{\mathfrak{M}}^\pi \not\models \forall x\, P_i(x, \mathbf{s}(x), \mathbf{s}(\mathbf{0}))$, в то время как это предложение принадлежит $\mathscr{T}'$. Это противоречит лемме 2, следовательно, данный подслучай невозможен.

Подслучай 3.2: $\mathbf{s}, P_i \in \mathtt{sig}(\mathscr{S}_u)$, а $\mathbf{0} \in \mathtt{sig}(\mathscr{S}_{1-u})$, $u \in \{0, 1\}$.

Возьмем перестановку π основного множества модели $\overline{\mathfrak{M}}$ такую, что $0^\pi \neq 0$ и используем аналогичный прием, чтобы показать невозможность данного подслучая.

Случай 4: f_i получается суперпозицией или примитивной рекурсией из некоторых функций, имеющих номера, меньшие чем i.

По предположению индукции символы $\mathbf{s}$, $\mathbf{0}$ и P_j, $j < i$, находятся в одной сигнатурной компоненте разложения. Предположим, что P_i попадает в другую сигнатурную компоненту, т. е. $\mathbf{s}, \mathbf{0} \in \mathtt{sig}(\mathscr{S}_u)$, а $P_i \in \mathtt{sig}(\mathscr{S}_{1-u})$, $u \in \{0, 1\}$.

Определим перестановку π основного множества модели $\overline{\mathfrak{M}}$ так, что $\pi(1) \neq 1$. Пусть $\overline{\mathfrak{M}}^\pi$ — модель, полученная из $\overline{\mathfrak{M}}$ заменой всех операций, предикатов и констант, соответствующих символам $\mathtt{sig}(\mathscr{S}_u)$, сопряженными. Возьмем произвольные $x_1, \ldots, x_n \in \omega$. По лемме 1 для $y = f_i(x_1, \ldots, x_n)$ имеем

$$\mathscr{T} \vdash P_i(\mathbf{s}^{x_1}(\mathbf{0}), \ldots, \mathbf{s}^{x_n}(\mathbf{0}), \mathbf{s}^y(\mathbf{0}), \mathbf{s}(\mathbf{0})),$$

но в то же время

$$\overline{\mathfrak{M}}^\pi \not\models P_i(\mathbf{s}^{x_1}(\mathbf{0}), \ldots, \mathbf{s}^{x_n}(\mathbf{0}), \mathbf{s}^y(\mathbf{0}), \mathbf{s}(\mathbf{0})).$$

Это противоречит лемме 2, значит, P_i должен быть в одной сигнатурной компоненте вместе с символами $\mathbf{s}$, $\mathbf{0}$ и P_j для $j < i$. $\square$

Определим теперь теорию $\mathscr{S}_m$:

$$\mathscr{S}_m = \mathscr{T} \cup \{\forall xy\, (Q(y) \leftarrow P_k(x, \mathbf{s}^m(\mathbf{0}), \mathbf{s}(\mathbf{0})))\},$$

где $\mathscr{T}$ — теория, построенная выше, P_k — предикат, соответствующий функции f, а Q — новый одноместный предикат. Отметим, что индекс теории $\mathscr{S}_m$ вычисляется равномерно по m и гёделеву номеру функции f.

Лемма 4. *Теория $\mathscr{S}_m$ разложима тогда и только тогда, когда $m \in \mathtt{range}\,(f)$.*

($\Leftarrow$) По лемме 1 из $m \in \mathtt{range}\,(f)$ следует, что $\mathscr{S}_m = \mathscr{T} \uplus \{\forall y\, Q(y)\}$.

($\Rightarrow$) Предположим, что $m \notin \mathtt{range}\,(f)$ и $\mathscr{S}_m$ разложима: $\mathscr{S}_m = \mathscr{T}_0 \uplus \mathscr{T}_1$. Пусть $\mathfrak{M}_0$ — обогащение модели $\mathfrak{M}$ пустым предикатом Q, т. е. $\mathfrak{M}_0 \models \forall y\, \neg Q(y)$. Тогда, очевидно, $\mathfrak{M}_0 \models \mathscr{S}_m$. По лемме 3 можно без ограничения общности полагать, что $\mathtt{sig}(\mathscr{T}_0) = \{Q\}$. Имеем $\mathfrak{M}_0 \models \mathscr{T}_0$, таким образом, $\mathscr{T}_0$ выполнима на любой счетной структуре с пустым предикатом Q.

Определим $\mathfrak{M}_1$ как модель, полученную из $\mathfrak{M}$ расширением предиката P_k с помощью кортежа $\langle 0, m, 1\rangle$ и добавлением нового предиката Q, истинного на всех элементах. Имеем $\mathfrak{M}_1 \models \mathscr{S}_m$, поэтому $\mathfrak{M}_1 \models \mathscr{T}_1$.

Рассмотрим модель $\mathfrak{M}^*$, получаемую из $\mathfrak{M}_1$ заменой Q пустым предикатом. Имеем $\mathfrak{M}^* \models \mathscr{T}_0$ и $\mathfrak{M}^* \models \mathscr{T}_1$, поэтому из предположения, что $\mathscr{S}_m = \mathscr{T}_0 \uplus \mathscr{T}_1$, получаем $\mathfrak{M}^* \models \mathscr{S}_m$. С другой стороны, условия $\mathfrak{M}^* \models P_k(0, \mathbf{s}^m(\mathbf{0}), \mathbf{s}(\mathbf{0}))$ и $\mathfrak{M}^* \models \forall y\, \neg Q(y)$ влекут

$$\mathfrak{M}^* \not\models \forall xy\, (Q(y) \leftarrow P_k(x, \mathbf{s}^m(\mathbf{0}), \mathbf{s}(\mathbf{0}))),$$

т. е. $\mathfrak{M}^* \not\models \mathscr{S}_m$. Полученное противоречие показывает, что теория $\mathscr{S}_m$ неразложима. $\square$

Выберем примитивно вычислимую функцию f такую, что ее область значения есть Σ^0_1-полное множество (для доказательства того, что f может быть выбрана примитивно вычислимой, мы отсылаем читателя к [12, разд. 4.2, предложение 4.4]. Применяя конструкцию выше, получаем семейство теорий $\mathscr{F} = \{\mathscr{S}_m \mid m \in \omega\}$ такое, что область значений f 1-сводится к множеству разложимых теорий из $\mathscr{F}$. Это завершает доказательство теоремы 1 и показывает Σ^0_1-полноту проблемы разложимости для конечных универсальных хорновских теорий. $\square$

Теории простых сигнатур

Назовем сигнатуру *простой,* если она конечна и содержит только символы унарных предикатов и констант.

Теорема 2. *Существует алгоритм, позволяющий по произвольной простой сигнатуре Σ и произвольному предложению $\varphi \in L_\Sigma$ определить, разложима ли теория, определяемая семейством аксиом $\{\varphi\}$.*

Теорема будет следовать из следующего предложения.

Предложение 2. 1. *Существует эффективная процедура, строящая по произвольным простым сигнатурам σ и τ таким, что $\tau \subseteq \sigma$, и произвольному непротиворечивому предложению $\varphi \in L_\sigma$ некоторое предложение $\varphi^\tau \in L_\tau$ такое, что*

(a) $\varphi \vdash \varphi^\tau$;

(b) *для любого $\psi \in L_\tau$ условие $\varphi \vdash \psi$ влечет $\varphi^\tau \vdash \psi$.*

2. *Теория всех моделей любой простой сигнатуры разрешима. При этом соответствующий разрешающий алгоритм строится эффективно по данной простой сигнатуре.*

Покажем, как получить теорему 2 из предложения 2. Сначала, используя разрешимость, проверяем, является ли φ тождественно ложным предложением. Если да, то теория $\{\varphi\}$, очевидно, разложима в случае, когда сигнатура содержит более одного символа, и неразложима в остальных случаях. Если φ не тождественно ложно, то достаточно заметить, что теория $\{\varphi\}$ разложима на компоненты сигнатур σ_0 и σ_1 тогда и только тогда, когда

$$\{\varphi\} = \{\varphi^{\sigma_0}\} \uplus \{\varphi^{\sigma_1}\}. \tag{1}$$

Действительно, пусть теория $\{\varphi\}$ разложима на компоненты сигнатур σ_0 и σ_1. Отсюда по компактности следует существование предложений $\varphi_0 \in L_{\sigma_0}$ и $\varphi_1 \in L_{\sigma_1}$ таких, что $\{\varphi\} = \{\varphi_0\} \uplus \{\varphi_1\}$. Имеем

$$\varphi \vdash \varphi^{\sigma_0}, \quad \varphi \vdash \varphi^{\sigma_1}. \tag{2}$$

С другой стороны,

$$\varphi^{\sigma_0} \vdash \varphi_0, \quad \varphi^{\sigma_1} \vdash \varphi_1. \tag{3}$$

С учетом того, что $\varphi_0 \wedge \varphi_1 \vdash \varphi$, условия (2) и (3) дают нам требуемое (1). Обратное утверждение тривиально. В силу разрешимости теории всех моделей простой сигнатуры условие (1) проверяется эффективно и, таким образом, получается утверждение теоремы 2.

Докажем предложение 2 и опишем сначала некоторые нормальные формы предложений простых сигнатур. Пусть

$$\sigma = \langle (P_i)_{i<l}\,; (c_i)_{i<q} \rangle; \quad l, q < \omega,$$

— произвольная простая сигнатура. Пусть A — произвольное множество ее констант (не обязательно всех) и E — произвольное отношение эквивалентности на A. Определим предложение η_E, полностью описывающее эту эквивалентность, как

$$\eta_E = \bigwedge_{\langle c,k\rangle \in E} (c = k) \wedge \bigwedge_{c,k \in A, \langle c,k\rangle \notin E} (c \neq k).$$

Если P — унарный предикат, то определим $P^0(x) = \neg P(x)$ и $P^1(x) = P(x)$. Если $\varepsilon \in 2^m$ и $P_0, \ldots, P_{m-1}$ — унарные предикаты, то определим $P^\varepsilon(x) =$

$\bigwedge\limits_{i<m} P_i^{\varepsilon_i}(x)$. Если A — множество констант, то $x \notin A$ служит сокращением для формулы $\bigwedge\limits_{c\in A}(x \neq c)$. Далее, $\exists^{\geq n}x\ldots$ и $\exists^{=n}x$___ будут служить сокращениями для формул, выражающих утверждения «*существует как минимум n таких x, что* …» и «*существует в точности n таких x, что* ___» соответственно. Если C — конечное множество констант, то выражение $C \subseteq P^\varepsilon$ служит сокращением для $\bigwedge\limits_{c\in C} P^\varepsilon(c)$. Пусть $n \in \omega$, $\varepsilon \in 2^m$, C — произвольное конечное множество констант и E — эквивалентность на C. Определим предложения

$$\varphi^{=n}_{\varepsilon,E,C} = \exists^{=n}x(P^\varepsilon(x) \wedge x \notin C \wedge \eta_E \wedge C \subseteq P^\varepsilon),$$

$$\varphi^{\geq n}_{\varepsilon,E,C} = \exists^{\geq n}x(P^\varepsilon(x) \wedge x \notin C \wedge \eta_E \wedge C \subseteq P^\varepsilon),$$

описывающие структуру модели на элементах ее разбиения, определяемых предикатами P^ε.

Базисными формулами для простой сигнатуры σ назовем формулы вида $\bigwedge\limits_{\varepsilon\in 2^l} \Phi_\varepsilon$, где Φ_ε — предложение вида $\varphi^{=n}_{\varepsilon,E_\varepsilon,C_\varepsilon}$ либо $\varphi^{\geq n}_{\varepsilon,E_\varepsilon,C_\varepsilon}$, причем множества C_ε обладают свойствами $C_{\varepsilon_0} \cap C_{\varepsilon_1} = \varnothing$ при $\varepsilon_0 \neq \varepsilon_1$, $\{c_i \mid i < q\} = \bigcup\limits_{\varepsilon\in 2^l} C_\varepsilon$, и E_ε — отношение эквивалентности на C_ε для всех $\varepsilon \in 2^l$.

Следующая лемма достаточно очевидна.

Лемма 5. *Пусть φ и ψ — базисные формулы. Тогда их конъюнкция либо тождественно ложна, либо эквивалентна некоторой базисной формуле.*

Введем еще некоторые обозначения. Пусть Δ — произвольное множество предложений. Запись $\mathfrak{M}(\Delta)\mathfrak{N}$ означает, что для всех $\varphi \in \Delta$ условие $\mathfrak{M} \models \varphi$ влечет $\mathfrak{N} \models \varphi$. Нам понадобится следующее

Предложение 3 [13, лемма 3.2.1]. *Пусть Δ — семейство предложений, замкнутое относительно дизъюнкций, и пусть $\mathscr{T}$ — совместная теория такая, что для всех моделей $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ если $\mathfrak{M} \models \mathscr{T}$ и $\mathfrak{M}(\Delta)\mathfrak{N}$, то $\mathfrak{N} \models \mathscr{T}$. Тогда $\mathscr{T}$ аксиоматизируема предложениями из Δ.*

Следствие 1. *Любое непротиворечивое предложение простой сигнатуры эквивалентно дизъюнкции базисных формул.*

Возьмем в качестве Δ в предложении 3 множество всех базисных формул, замкнутое относительно дизъюнкций. Тогда для не более чем счетных моделей $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ условие $\mathfrak{M}(\Delta)\mathfrak{N}$ влечет $\mathfrak{M} \cong \mathfrak{N}$, откуда утверждение легко следует. Для оставшейся части доказательства остается применить предложение 3 и затем лемму 5. $\square$

Продолжим доказательство предложения 2. Теперь мы можем определить формулы φ^τ для $\tau \subseteq \sigma$. Ввиду следствия 1 можно предполагать, что любая выполнимая формула есть дизъюнкция базисных формул. Сначала определим φ^τ для базисных формул φ. Без ограничения общности можно предполагать, что

$$\tau = \langle (P_i)_{i<l'}; (c_i)_{i<q'} \rangle; \quad l' \leq l,\ q' \leq q.$$

Пусть φ — базисная формула сигнатуры σ и

$$\varphi = \bigwedge_{\varepsilon\in 2^l} \varphi^{\lambda_\varepsilon n_\varepsilon}_{\varepsilon,E_\varepsilon,C_\varepsilon}, \quad \lambda_\varepsilon \in \{=,\geq\} \text{ для всех } \varepsilon \in 2^l.$$

Для каждого $\varepsilon \in 2^{l'}$ рассматриваем все γ такие, что $\varepsilon \subseteq \gamma \in 2^l$, и для каждого такого γ полагаем m_γ равным числу классов эквивалентности E_γ, не содержащих констант из множества $C' = \{c_i \mid i < q'\}$. Далее определяем предложение ϕ_ε как

$$\exists^{\lambda_\varepsilon m_\varepsilon} x\Big[P^\varepsilon(x) \wedge \Big(x \notin \bigcup_{\varepsilon\subseteq\gamma\in 2^l} C_\gamma \cap C'\Big) \wedge \eta_{E_\varepsilon} \wedge \Big(\bigcup_{\varepsilon\subseteq\gamma\in 2^l} C_\gamma \cap C' \subseteq P^\epsilon\Big)\Big],$$

где

$$E_\varepsilon = \bigcup_{\varepsilon\subseteq\gamma\in 2^l} E_\gamma, \quad m_\varepsilon = \sum_{\varepsilon\subseteq\gamma\in 2^l} (n_\gamma + m_\gamma),$$

$$\lambda_\varepsilon = \begin{cases} \geq, & \text{если хотя бы одно из } \lambda_\gamma, \varepsilon \subseteq \gamma \in 2^l, \text{ равно } \leq, \\ = & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Положим теперь φ^τ равным $\bigwedge\limits_{\varepsilon\in 2^{l'}} \phi_\varepsilon$. Если φ является дизъюнкцией базисных формул θ_i, $i \in I$, то полагаем φ^τ равным $\bigvee\limits_{i\in I} \theta_i^\tau$.

Лемма 6. 1) *$\varphi \vdash \varphi^\tau$; 2) любая модель для φ^τ обогащается до модели φ; 3) если $\varphi \vdash \psi$ и $\psi \in L_\tau$, то $\varphi^\tau \vdash \psi$.*

Первые два свойства достаточно очевидны. Для доказательства третьего свойства предположим, что $\mathfrak{M} \models \varphi^\tau$, и покажем, что $\mathfrak{M} \models \psi$. Обогатим $\mathfrak{M}$ до модели $\mathfrak{M}' \models \varphi$. Получим $\mathfrak{M}' \models \psi$. Обедняя эту модель до сигнатуры τ, получим $\mathfrak{M} \models \psi$. Значит, $\varphi^\tau \vdash \psi$. $\square$

Заметим, что описанная выше процедура вычисления φ^τ по дизъюнкции базисных формул является эффективной. Для произвольного предложения φ простой сигнатуры, перебирая сначала все возможные выводы, находим дизъюнкцию базисных формул, эквивалентную φ. После этого применение указанной процедуры дает соответствующее предложение φ^τ.

Разрешимость теории $\mathscr{T}$ всех моделей произвольной простой сигнатуры σ вытекает из ее перечислимости и следующего достаточно просто устанавливаемого факта: существует вычислимая последовательность теорий $(\mathscr{T}_i)_{i<\omega}$, состоящих из всех полных расширений теории $\mathscr{T}$ (для полного задания полного расширения $\mathscr{T}$ достаточно указать все соотношения равенства и неравенства между константами, их распределение по предикатам P^ε, а также количество элементов — от 0 до ∞, в этих предикатах P^ε, не равных ни одной константе, что легко делается с помощью базисных формул и дает счетно категоричные теории), а также следующего результата Ю. Л. Ершова.

Теорема 3 [14]. *Теория $\mathscr{T}$ разрешима тогда и только тогда, когда она перечислима и существует вычислимая последовательность полных теорий $(T_i)_{i<\omega}$ такая, что $\mathscr{T} = \bigcap\limits_{i<\omega} \mathscr{T}_i$.*

Предложение 2 доказано.

Авторы благодарят профессора Карла Эриха Вольффа за гостеприимство во время визита авторов в Дармштадтский технический университет (Германия), где была получена часть этих результатов, а также всех участников международного проекта РФФИ-DFG “COMO” и О. В. Кудинова за полезные замечания и обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Amir E., McIlraith S.* Partition-based logical reasoning for first-order and propositional theories // Artif. Intell. 2005. V. 162, N 1–2. P. 49–88.
2. *Cuenca Grau B., Horrocks I., Kazakov Y., Sattler U.* Modular reuse of ontologies: Theory and practice // J. Artif. Intell. Res. 2008. V. 31. P. 273–318.
3. *Cuenca Grau B., Horrocks I., Kazakov Y., Sattler U.* Extracting modules from ontologies: Theory and practice. Manchester, 2007. 39 p. (Technical report / University of Manchester / http://www.cs.man.ac.uk/∼bcg/Publications.html).
4. *Konev B., Lutz C., Walther D., Wolter F.* Formal properties of modularization // LNCS Volume on ontology modularization. Berlin; Heidelberg: Springer Verl., 2009. P. 25–66.
5. *Lutz C., Walther D., Wolter F.* Conservative extensions in expressive description logics // Proc. / IJCAI-07. 2007. P. 453–458.
6. *Пономарев Д. К.* Критерий разложимости элементарных теорий // Сиб. мат. журн. 2008. Т. 49, № 1. С. 189–192.
7. *Ponomaryov D.* On decomposability in logical calculi // Bulletin of the Novosibirsk computing center / Computer science. Novosibirsk, 2008, IIS Special Issue: 28. P. 111–120.
8. *Роджерс X.* Теория рекурсивных функций и эффективная вычислимость. М.: Мир, 1972.
9. *Шёнфилд Дж.* Математическая логика. М.: Наука, 1975.
10. *Ершов Ю. Л., Палютин Е. А.* Математическая логика. М.: Наука, 1979.
11. *Lloyd J. W.* Foundations of logic programming. New York: Springer-Verl., 1987.
12. *Cohen D. E.* Computability and logic. Chichtster, England: Ellis Horwood, 1987.
13. *Кейслер Г., Чэн Ч. Ч.* Теория моделей. М.: Мир, 1977.
14. *Ершов Ю. Л.* Проблемы разрешимости и конструктивные модели. М.: Наука, 1980.

Статья поступила 9 октября 2008 г.

Морозов Андрей Сергеевич
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090
morozov@math.nsc.ru

Пономарев Денис Константинович
Институт систем информатики СО РАН им. А. П. Ершова,
пр. Академика Лаврентьева, 6, Новосибирск 630090
ponom@iis.nsk.su