Сибирский математический журнал
Май—июнь, 2010. Том 51, № 3

УДК 519.48

АЛГЕБРА ЛИ КОСОСИММЕТРИЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЕ В ТЕОРИИ ЙОРДАНОВЫХ АЛГЕБР

С. Р. Сверчков

Аннотация. Доказано, что алгебра Ли кососимметричных элементов свободной ассоциативной алгебры ранга 2 относительно стандартной инволюции порождается как модуль элементами вида $[a, b]$, $[a, b]^3$, где a, b — йордановы многочлены. С использованием этого результата доказано, что алгебра Ли йордановых дифференцирований свободной йордановой алгебры ранга 2 порождается как характеристический F-модуль двумя дифференцированиями. Показано, что все коммутаторные йордановы s-тождества являются следствиями одного s-тождества Глени — Шестакова.

Ключевые слова: кососимметричный элемент, стандартная инволюция, алгебра Ли, свободная ассоциативная алгебра, йорданово дифференцирование, йордановы s-тождества.

К 70-летию академика Ю. Л. Ершова

1. Введение. Пусть A — некоторая ассоциативная алгебра над полем F с инволюцией $*$. Множество $L(A, *) = \{a \in A \mid a^* = -a\}$ кососимметричных элементов относительно $*$, очевидно, замкнуто относительно операции $[a, b] = ab - ba$ и является подалгеброй $A^{(-)}$. Алгебру $L(A, *)$ относительно операции $[a, b]$ будем называть *алгеброй Ли кососимметричных элементов* A.

Далее все алгебры рассматриваются над полем F характеристики 0. Стандартные определения и обозначения взяты из [1]. Для записи неассоциативных слов будем использовать левонормированную расстановку скобы.

Обозначим через $SJ[X_n]$, $\mathrm{Ass}[X_n]$ свободную специальную йорданову, свободную ассоциативную алгебры от множества порождающих $X_n = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$. Пусть $H[X_n] = H(\mathrm{Ass}[X_n], *)$, $L[X_n] = L(\mathrm{Ass}[X_n], *)$ — йорданова алгебра симметричных и алгебра Ли кососимметричных элементов алгебры $\mathrm{Ass}[X_n]$ относительно стандартной инволюции $*$. Пусть A — некоторая F-алгебра, $B \subseteq A$, через $(B)_F$ будем обозначать F-модуль, порожденный множеством B. В данной работе построим некоторую простую систему порождающих F-модуля $L = L(\mathrm{Ass}[X_2], *)$. В случае йордановой алгебры $H[X_n]$ симметричных элементов такая система порождающих известна для $n \leq 3$. По теореме Ширшова — Кона [1, 2] $H[X_n] = SJ[X_n]$ при $n \leq 3$, т. е. $H[X_n] = (a; a \in SJ[X_n])_F$ и $SJ[X_4] \subsetneq H[X_4]$. В случае алгебры Ли $L[X_n]$ кососимметричных элементов простой системы порождающих F-модуля $L[X_n]$ известно не было.

В данной работе мы докажем, что множество элементов $[a, b]$, $[a, b]^3$, где $a, b \in SJ[X_2]$, порождает F-модуль L, т. е.

$$L = ([a, b], [a, b]^3;\ a, b \in SJ[X_2])_F, \tag{1}$$

С использованием этого результата доказаны две теоремы для йордановых алгебр (теоремы 3 и 4).

2. Предварительные результаты. Обозначим $SJ = SJ[X_2]$, $\mathrm{Ass} = \mathrm{Ass}[X_2]$. Операцию умножения в алгебре SJ обозначим через $\circ$, т. е. $a \circ b = \frac{1}{2}(ab + ba)$, где $a, b \in SJ$, умножая элементы в алгебре Ass, не будем ставить между ними ничего.

Пусть $u = z_1^{i_1} \dots z_k^{i_k} \in \mathrm{Ass}$, где $z \in X_2$ и $z_i \neq z_{i+1}$, $i = 1, \dots, k-1$. Число $h(u) = k$ будем называть *высотой* одночлена u. Далее $x_1 = x$, $x_2 = y$. Для сокращения числа индексов и степеней в записи многочленов Ass одночлены вида x^{i_1}, y^{i_2} будем условно обозначать через x_i, y_j, где $i_1, i_2, i, j \in \mathbb{N}$. Например, одночлены $x_1y_2x_3$, $x_2y_1x_1$, $x_2y_2x_4$ условно обозначают одночлен вида $x^{i_1}y^{i_2}x^{i_3}$. Далее будет понятно, что такая условная запись не приводит ни к каким противоречиям, а значительно упрощает изложение. Известно [1], что множество всех одночленов

$$\{u_i = z_1^{i_1} \dots z_k^{i_k}, \text{ где } z_i \in X_2 \text{ и } z_i \neq z_{i+1},\ i = 1, \dots, k-1,\ i \in \mathbb{N}\}$$

образует базис Ass, множество $\{\{u_i\} = u_i + u_i^*,\ i \in \mathbb{N}\}$ — базис SJ. Зафиксируем одночлены u_i, $i \in \mathbb{N}$. Пусть $a \in \mathrm{Ass}$ и $a = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i u_i$, $\alpha_i \neq 0$. Тогда положим $h(a) = \max u_i$. Обозначим $[u_i] = u_i - u_i^*$, $i \in \mathbb{N}$. Нетрудно заметить, что $L = ([u_i], i \in \mathbb{N})_F$. Нам понадобятся следующие известные тождества (см. [1]):

$$[x^2, y] = 2[x, y \circ x] = 2[x, y] \circ x, \quad [x, [y, z]] = 4xD_{y,z}, \tag{2}$$

где $xD_{y,z} = x \circ y \circ z - x \circ z \circ y$,

$$\{xyz\} = 2yU_{x,z},$$

где $yU_{x,z} = y \circ x \circ z + y \circ z \circ x - y \circ (z \circ x)$. Введем следующие обозначения:

$$L_k = ([a, b]^k;\ a, b \in SJ[X_2])_F, \quad \text{где } k = 1, 3;$$

$$L_2 = ([a^2b^2ab];\ a, b \in SJ[X_2])_F; \quad L(n) = \{a \in L;\ h(a) \leq n\};$$

$a \equiv_K b$, если $a - b \in K$, где $K \subseteq \mathrm{Ass}$.

Из введенных определений следует, что

$$[u_i] = -[u_i^*],\ i \in \mathbb{N}; \quad L = \sum_{i=1}^{\infty} L(i).$$

Отметим простейшие свойства линейного оператора $[,] : \mathrm{Ass} \to L$.

Лемма 1. *Пусть $a, b \in SJ$. Тогда для любого $i \in \mathbb{N}$*

$$[au_i] \equiv_{L_1} [u_i a], \tag{3}$$

$$[u_i] \equiv_{L_1} 0, \quad \text{где } h(u_i) \leq 3, \tag{4}$$

$$[a, b]^3 \equiv_{L_1} 3[a^2b^2ab]. \tag{5}$$

Доказательство. Имеем

$$[au_i] - [u_i a] = au_i - u_i^* a - u_i a + au_i^* = a\{u_i\} - \{u_i\}a = [a, \{u_i\}].$$

Но по теореме Ширшова — Кона $\{u_i\} \in SJ$. Поэтому $[au_i] - [u_ia] \in L_1$ и $[au_i] \underset{L_1}{\equiv} [u_ia]$. Далее

$$[x_1y_1] = [x_1, y_1] \underset{L_1}{\equiv} 0, \quad [x_1y_1x_2] \underset{(3)L_1}{\equiv} [y_1x_2x_1] = [y_1, (x_1x_2)] \underset{L_1}{\equiv} 0.$$

Наконец,

$$\begin{aligned}[a,b]^3 = (ab-ba)^3 = [ababab] + [ab^2aba] + [ba^2b^2a] + [baba^2b] \\ \underset{(3)L_1}{\equiv} [ababa, b] + 3[a^2b^2ab] \underset{L_1}{\equiv} 3[a^2b^2ab].\end{aligned}$$

Лемма доказана.

Доказательство основного результата будет проведено по следующей схеме. В силу леммы 1 для доказательства (1) достаточно доказать, что

$$\forall i \in \mathbb{N} \quad [u_i] \in L_1 + ([a^2b^2ab];\ a, b \in SJ)_F. \tag{6}$$

Действительно, в этом случае

$$\forall i \in \mathbb{N} \quad [u_i] \in L_1 + L_2 \underset{(5)}{=} L_1 + L_3.$$

Поэтому $L \subseteq L_1+L_3 \subseteq L$ и $L = L_1+L_3$. Доказательство (6) проведем индукцией по высоте $h(u_i)$. Если $h(u_i) \le 3$, то в силу (4) $[u_i] \in L_1$. Первый нетривиальный случай возникнет уже при $h(u_i) = 4$. В этом случае

$$[u_i] \underset{(3)L_1}{\equiv} [x_1y_1x_2y_2] = [x^{n_1}y^{m_1}x^{n_2}y^{m_2}].$$

Нам необходимо доказать, что

$$\forall n_1, n_2, m_1, m_2 \in \mathbb{N} \quad [x^{n_1}y^{m_1}x^{n_2}y^{m_2}] \in L_1 + L_2.$$

Для этой цели докажем следующую простую, но неожиданную лемму.

Пусть $\mathfrak{M}$ — некоторое многообразие алгебр с ассоциативными степенями над F. Обозначим через $F_{\mathfrak{M}}[X]$ свободную алгебру в многообразии $\mathfrak{M}$ от порождающих $X = \{x_1, \dots, x_n, \dots\}$.

Рассмотрим произвольный однородный многочлен $f = f(x_1, \dots, x_n) \in F_{\mathfrak{M}}[X]$, где $n \ge 2$. Будем его для краткости обозначать через $f(x_1, x_2)$. Зафиксируем многочлен $f = f(x_1, x_2)$. Обозначим $M = (f(a,a), f(a,a^2);\ a \in F_{\mathfrak{M}}[x_{n+1}])_F$. Далее, $z = x_{n+1}$.

Лемма 2. *Для любых* $k, m \in \mathbb{N}$

$$f(z^k, z^m) \in M.$$

Доказательство. Будем писать $g = h$, если $g - h \in M$. Из определения M имеем

$$f(a,b) \equiv -f(b,a), \quad f(a, b\cdot c) + f(b, a\cdot c) + f(c, a\cdot b) \equiv 0, \tag{7}$$

где $a, b, c \in F_{\mathfrak{M}}[z]$, $\cdot$ — умножение в $F_{\mathfrak{M}}[X]$. Докажем индукцией по k, что

$$f(z, z^m) \equiv \frac{1}{k} f(z^k, z^{m+1-k}),$$

где $k < m+1$, $m \ge 2$.

Действительно,

$$f(z,z^m) \underset{(7)}{\equiv} -f(z^{m-1},z^2) - f(z,z^m).$$

Поэтому

$$f(z,z^m) \underset{(7)}{\equiv} \frac{1}{2} f(z^2,z^{m-1}).$$

Предположим, что

$$f(z,z^m) \equiv \frac{1}{k} f(z^k,z^{m+1-k}),$$

где $k < m$. Тогда

$$f(z,z^m) \equiv \frac{1}{k} f(z^k,z^{m-k}\cdot z) \underset{(7)}{\equiv} -\frac{1}{k} f(z,z^m) - \frac{1}{k} f(z^{m-k},z^{k+1})$$

и

$$\frac{k+1}{k} f(z,z^m) \equiv -\frac{1}{k} f(z^{k+1}z^{m-k}).$$

Поэтому

$$f(z,z^m) \underset{(7)}{\equiv} \frac{1}{k+1} f(z^{k+1},z^{m-k}).$$

Следовательно,

$$f(z,z^m) \equiv \frac{1}{m} f(z^m,z) \underset{(7)}{\equiv} -\frac{1}{m} f(z,z^m)$$

и $f(z,z^m) \equiv 0$. Применяя необходимое число раз соотношение (7), имеем

$$f(z^k,z^m) \equiv \lambda f(z,z^{m+k-1})$$

для некоторого $\lambda \in F$. Поэтому $f(z^k,z^m) \equiv 0$. Лемма доказана.

Лемма 3. *Для любых* $n_1,n_2,m_1,m_2 \in \mathbb{N}$

$$w = [x^{n_1}y^{m_1}x^{n_2}y^{m_2}] \in L_1 + L_2. \tag{8}$$

Доказательство. Из леммы 2 следует, что

$$w \in ([ay^{m_1}ay^{m_2}],[ay^{m_1}a^2y^{m_2}];\ a \in SJ[x])_F.$$

Заметим, что

$$[ay^{m_1}ay^{m_2}] = [ay^{m_1}a,y^{m_2}] \underset{L_1}{\equiv} 0.$$

Поэтому

$$w \in L_1 + ([ay^{m_1}a^2y^{m_2}];\ a \in SJ[x])_F.$$

Повторяя аналогичные рассуждения для y, получим

$$w \in L_1 + ([ab^2a^2b],[aba^2b^2];\ a \in SJ[x],\ b \in SJ[y])_F.$$

Но

$$[ab^2a^2b] \underset{(3)L_1}{\equiv} [b^2a^2ba], \quad [aba^2b^2] \underset{(3)L_1}{\equiv} [a^2b^2ab].$$

Следовательно, $w \in L_1 + L_2$. Лемма доказана.

3. Основной результат. Рассмотрим $u_i = x_1y_1x_2y_2\dots x_my_m$, где $m \geq 3$. Очевидно, что $h(u_i) = 2m \geq 6$. Тогда $u_i = x_1y_1x_2y_2u_ky_m$, где $u_k = x_3y_3\dots x_m$ и $h(u_k) \geq 1$. Заметим, что u_k начинается и оканчивается на x. Обозначим $g(b,c) = [a^2bac]$, где $a \in SJ[x]$, $b,c \in SJ[x,y]$. Отметим, что из (3) и определения L_2 следует, что

$$g(b,c) \underset{L_1+L_2}{\equiv} -g(c,b), \quad g(b,c\circ d) + g(c,d\circ b) + g(d,b\circ c) \underset{L_1+L_2}{\equiv} 0, \tag{9}$$

где $b,c,d \in SJ[x,y]$. Заметим, что $h(g(y_1,\{y_2u_ky_m\})) = 2m$. Далее $u \equiv w$ означает, что $u - w \in L_1 + L_2 + L(2m-1)$.

Лемма 4. *Функция* $g(y_1, \{y_2 u_k y_m\})$ *кососимметрична по* y_1, y_2, y_m *по модулю* $L_1 + L_2 + L(2m-1)$.

Доказательство. Имеем

$$g(y_1, \{y_2 u_k y_m\}) = 2g(y_1, \{u_k y_m\} \circ y_2) - g(y_1, \{u_k (y_m y_2)\}).$$

Нетрудно заметить, что $h(g(y_1, \{u_k(y_m y_2)\})) < 2m$, поэтому

$$g(y_1, \{y_2 u_k y_m\}) = 2g(y_1, \{u_k y_m\} \circ y_2) \underset{(9)}{\equiv} -2g(y_2, \{u_k y_m\} \circ y_1) - 2g(\{u_k y_m\}, y_1 \circ y_2).$$

Так как u_k начинается на x, то $h(g(\{u_k y_m\}, (y_1 y_2))) < 2m$. Тем самым $g(\{u_k y_m\}, (y_1 y_2)) \equiv 0$. Следовательно,

$$g(y_1, \{y_2 u_k y_m\}) = -2g(y_2, \{u_k y_m\} \circ y_1) \equiv -g(y_2, \{y_1 u_k y_m\}).$$

Аналогично $g(y_1, \{y_2 u_k y_m\}) \equiv -g(y_m, \{y_2 u_k y_1\})$. Лемма доказана.

Лемма 5. *Имеем*

$$[x_1 y_1 x_2 \{y_2 u_k y_m\}] \equiv 0. \tag{10}$$

Доказательство. В силу леммы 2

$$[x_1 y_1 x_2 \{y_2 u_k y_m\}] \in L_1 + ([a^2 y_1 a \{y_2 u_k y_m\}];\ a \in SJ[x])_F.$$

Поэтому достаточно доказать, что для любых $n_1, n_2, n_3 \in \mathbb{N}$, $a \in SJ[x]$

$$g(y^{n_1}, \{y^{n_2} u_k y^{n_3}\}) \equiv 0.$$

Докажем индукцией по n_1, что

$$\begin{gathered} g(y^{n_1}, \{y^{n_2} u_k y^{n_3}\}) \in (g(y, \{y^{m_1} u_k y^{m_2}\}))_F + L_1 + L_2 + L(2m-1); \\ m_1, m_2 \in \mathbb{N},\ m_1 + m_2 + 1 = n_1 + n_2 + n_3. \end{gathered} \tag{11}$$

Пусть $n_1 > 1$, тогда

$$\begin{aligned} g(y^{n_1}, \{y^{n_2} u_k y^{n_3}\}) &= g(y^{n_1 - 1} \circ y, \{y^{n_2} u_k y^{n_3}\}) \\ &\underset{(9)}{\equiv} -g(y \circ \{y^{n_2} u_k y^{n_3}\}, y^{n_1-1}) - g(y^{n_1-1} \circ \{y^{n_2} u_k y^{n_3}\}, y) \\ &\underset{(9)}{\equiv} \frac{1}{2}(g(y^{n_1-1}, \{y^{n_2+1} u_k y^{n_3}\}) + g(y^{n_1-1}, \{y^{n_2} u_k y^{n_3+1}\}) \\ &\qquad + g(y, \{y^{n_1+n_2-1} u_k y^{n_3}\}) + g(y, \{y^{n_2} u_k y^{n_3+n_1-1}\})). \end{aligned}$$

В силу предположения индукции получаем (11). Поэтому для доказательства (10) осталось доказать, что

$$\forall p, q \in \mathbb{N} \quad w = g(y, \{y^p u_k y^q\}) \equiv 0.$$

Ввиду леммы 4 w — кососимметричная функция от y, y^p, g^q. Поэтому $p, q > 1$. Теперь

$$\begin{aligned} w = g(y, \{y^p u_k y^q\}) \equiv -g(y^p, \{y u_k y^q\}) &= -g(y^{p-1} \circ y, \{y u_k y^q\}) \\ &\underset{(9)}{\equiv} g(y \circ \{y u_k y^q\}, y^{p-1}) + g(y^{p-1} \circ \{y u_k y^q\}, y) \\ &\underset{(9)}{\equiv} -\frac{1}{2}(g(y^{p-1}, \{y^2 u_k y^q\}) + g(y^{p-1}, \{y u_k y^{q+1}\}) \\ &\qquad + g(y, \{y^p u_k y^q\}) + g(y, \{y u_k y^{p+q-1}\})). \end{aligned}$$

По лемме 4 $g(y, \{yu_k y^{p+q-1}\}) \equiv 0$ и

$$3w = -g(y^{p-1}, \{y^2 u_k y^q\}) - g(y^{p-1}, \{yu_k y^{q+1}\}) \equiv g(y^2, \{y^{p-1} u_k y^q\}) \\ + g(y, \{y^{p-1} u_k y^{q+1}\}) \underset{(9)}{\equiv} -2g(y \circ \{y^{p-1} u_k y^q\}, y) \\ + g(y, \{y^{p-1} u_k y^{q+1}\}) \underset{(9)}{\equiv} g(y, \{y^p u_k y^q\}) + 2g(y, \{y^{p-1} u_k y^{q+1}\}).$$

Следовательно,

$$w = g(y, \{y^p u_k y^q\}) \equiv g(y, \{y^{p-1} u_k y^{q+1}\}) \equiv \dots \equiv g(y, \{yu_k y^{p+q-1}\}) \equiv 0.$$

Поэтому

$$[x_1 y_1 x_2 \{y_2 u_k y_m\}] \equiv 0.$$

Лемма доказана.

Теорема 1. $L = ([a,b], [a,b]^3;\ a, b \in SJ[x,y])_F$.

Доказательство. В силу (6) достаточно доказать, что для любого $i \in \mathbb{N}$ имеем $[u_i] \in L_1 + L_2$. Проведем индукцию по $k = h(u_i)$. Если $k \leq 4$, то утверждение верно в силу (4), (8). Пусть утверждение верно для всех $[u_j]$, $h(u_j) \in L(k-1)$, $k \geq 5$. Рассмотрим $[u_i]$, $h(u_i) = k$. Если $k = 2m+1$, то

$$[u_i] \underset{L_1}{\equiv} [x_1, y_1 \dots x_m y_m x_{m+1}] \underset{(3)L_1}{\equiv} [y_1 \dots x_m y_m (x_{m+1} x_1)] \in L(k-1).$$

По предположению индукции $[u_i] \in L_1 + L_2$. Пусть $k = 2m$, Тогда $k \geq 6$, $m \geq 3$ и $[u_i] \underset{L_1}{\equiv} [x_1 y_1 x_2 y_2 u_k y_m]$, где $h(u_k) \geq 1$ и u_k начинается и оканчивается на x. Имеем

$$[u_i] \underset{L_1}{\equiv} [x_1 y_1 x_2 \{y_2 u_k y_m\}] - [x_1 y_1 x_2 y_m u_k^* y_2].$$

По лемме 5 и предположению индукции $[x_1 y_1 x_2 \{y_2 u_k y_m\}] \in L_1 + L_2$. Поэтому

$$[u_i] \underset{L_1+L_2}{\equiv} -[x_1 y_1 x_2 y_m u_k^* y_2] \underset{(3), L_1+L_2}{\equiv} [y_m u_k^* y_2 x_1 y_1 x_2] = [x_2 y_1 x_1 y_2 u_k y_m].$$

Следовательно, элемент $[u_i]$ симметричен по x_1, x_2 по модулю $L_1 + L_2$. Но

$$[u_i] \underset{L_1}{\equiv} [x_1 y_1 x_2 \dots x_m y_m] \underset{(3), L_1+L_2}{\equiv} [x_2 y_2 \dots x_m y_m x_1 y_1] \\ \equiv \dots \underset{(3), L_1+L_2}{\equiv} [x_m y_m x_1 y_1 \dots x_{m-1} y_{m-1}].$$

Поэтому $[u_i]$ симметричен по $x_1, \dots, x_m$ по модулю $L_1 + L_2$.

Повторяя аналогичные рассуждения для y, получаем симметричность $[u_i]$ по $y_1, \dots, y_m$ по модулю $L_1 + L_2$. Обозначим

$$v = \frac{1}{m!(m-1)!} \sum_{\substack{\sigma \in S_m, \\ \tau \in S_{m-1}}} (y_{\sigma(1)} x_{\tau(2)} \dots x_{\tau(m)} y_{\sigma(m)}),$$

где S_{m-1} — симметрическая группа перестановок множества $\{2, \dots, m\}$. Очевидно, что $v^* = v$. Поэтому $v \in SJ[x,y]$. Следовательно,

$$[u_i] \underset{L_1+L_2}{\equiv} \frac{1}{m!(m-1)!} \sum_{\substack{\sigma \in S_m, \\ \tau \in S_{m-1}}} [x_1 y_{\sigma(1)} x_{\tau(2)} \dots y_{\sigma(m)}] = [x_1 v] = [x_1, v] \in L_1$$

и $[u_i] \in L_1 + L_2$. Теорема доказана.

В заключение приведем еще одно любопытное применение леммы 2. Пусть опять $f = f(x_1, \dots, x_n) \in F_{\mathfrak{M}}[X]$ — некоторый многочлен, $n \geq 2$.

Определение. Алгебра $A \in \mathfrak{M}$ называется f-*йордановой*, если она удовлетворяет тождествам

$$f(x_1, x_1, x_3, \dots, x_n) = 0, \quad f\bigl(x_1, x_1^2, x_3, \dots, x_n\bigr) = 0.$$

Подалгебра B алгебры A называется f-*сильно ассоциативной*, если для любых $b_1, b_2 \in B$, $a_3, \dots, a_n \in A$ имеем $f(b_1, b_2, a_3, \dots, a_n) = 0$.

Лемма 2 позволяет легко доказать f-сильную ассоциативность любой однопорожденной подалгебры.

Теорема 2. *Пусть A — f-йорданова алгебра. Тогда если B — однопорожденная подалгебра A, то она является f-сильно ассоциативной подалгеброй A.*

4. Дифференцирование свободной йордановой алгебры от двух порождающих и коммутаторные йордановы s-тождества. Пусть A — произвольная алгебра над F с операцией умножения «$\cdot$» (операция не обязательно йорданова или ассоциативна). Обозначим через $\mathrm{End}_F(A)$ ассоциативную (относительно суперпозиции) F-алгебру всех эндоморфизмов F-модуля A. Далее

$$a \circ b = \frac{1}{2}(a \cdot b + b \cdot a), \quad a, b \in A.$$

Определение. F-линейное отображение $D : A \to A$ называется *внешним дифференцированием* A, если для любых $a, b \in A$

$$(a \cdot b)D = aD \cdot b + a \cdot bD,$$

и *внешним йордановым дифференцированием* A, если для любого $a \in A$

$$a^2 D = aD \cdot a + a \cdot aD, \tag{12}$$

или, эквивалентно, для любых $a, b \in A$

$$(a \circ b)D = aD \circ b + a \circ bD.$$

Рассмотрим множество $D(A) = \mathrm{End}_F(A)$ всех внешних йордановых дифференцирований A, т. е. $D(A) = \{\varphi \in \mathrm{End}_F(A),\ \varphi$ — внешнее йорданово дифференцирование $A\}$. F-модуль $D(A)$ в общем случае не замкнут относительно суперпозиции отображений. Определим на $D(A)$ операцию коммутирования $[D_1, D_2] = D_1 D_2 - D_2 D_1$, где $D_1, D_2 \in D(A)$. Тогда $\mathrm{Outer}(A) = (D(A), +, [\ ])$ — алгебра Ли над F. Действительно, для любого $a \in A$

$$(a^2) D_1 D_2 = 2(aD_1 \circ a) D_2 = 2aD_1 D_2 \circ a + 2aD_1 \circ aD_2.$$

Поэтому $[D_1, D_2] \in D(A)$. Для любых $D_1, D_2, D_3 \in D(A)$ имеем $J(D_1, D_2, D_3) = 0$, где

$$J(D_1, D_2, D_3) = [[D_1, D_2], D_3] + [[D_2, D_3], D_1] + [[D_3, D_1], D_2]$$

— якобиан элементов D_1, D_2, D_3.

Для всякого элемента $a \in A$ определим эндоморфизмы $R_a, L_a \in \mathrm{End}_F(A)$ по правилу

$$xR_a = x \cdot a, \quad xL_a = a \cdot x \quad \forall x \in A.$$

Назовем их *операторами правого и левого умножений на* a.

Подалгебру $M(A)$ алгебры $\mathrm{End}_F(A)$, порожденную всеми R_a, L_a, $a \in A$, будем называть *алгеброй умножений* A. Если алгебра A коммутативна, то $R_a = L_a$ для всех $a \in A$, поэтому $M(A) = R(A)$, где $R(A)$ — подалгебра $M(A)$, порожденная всеми R_a, $a \in A$.

Определение. Внешнее дифференцирование T алгебры A называется *внутренним дифференцированием* A, если $T \in M(A)$, и *внутренним йордановым дифференцированием* A, если $T \in M(A) \cap \mathrm{Outer}(A)$.

Подалгебру $\mathrm{Outer}(A)$, порожденную всеми внутренними йордановыми дифференцированиями A, обозначим через $\mathrm{Inder}(A)$. Ясно, что $\mathrm{Inder}(A)$ — идеал в алгебре $\mathrm{Outer}(A)$.

Опишем все внутренние йордановы дифференцирования свободной ассоциативной алгебры $\mathrm{Ass}[X_n]$, где $X_[= \{x_1, \ldots, x_n\}$, $n \geq 1$.

Лемма 6. *Пусть* $T \in \mathrm{Inder}(\mathrm{Ass}[X_n])$. *Тогда найдется* $B \in \mathrm{Ass}[X_n]$ *такой, что* $aT = [a, B] = aB - Ba$ *для любого* $a \in \mathrm{Ass}[X_n]$. *Если при этом* $a^* = a$, $(aT)^* = aT$, *то* $aT = \frac{1}{2}[z, [B]]$, *где* $[B] = B - B^*$.

Доказательство. Если $n = 1$, то $\mathrm{Inder}(\mathrm{Ass}[x]) = (0)$. Действительно, $\mathrm{Ass}[x]$ — коммутативная алгебра и $(x^2)T = xTx = 2xTx$, поэтому $T = 0$.

Пусть $n \geq 2$. Достаточно доказать утверждение леммы для однородных операторов T из $\mathrm{Ass}[X_n]$. Рассмотрим ненулевой однородный оператор $T \in \mathrm{Inder}(\mathrm{Ass}[X_n])$, $d(T) = k$. Тогда T можно представить в виде

$$T = R_B + L_C + \sum_{i=1}^{m} \alpha_i R_{B_i} L_{C_i},$$

где одночлены B, C, B_i, C_i взяты из $\mathrm{Ass}[X_n]$, $\alpha_i \in F$, причем $d(B_i), d(C_i) \geq 1$ для всех i, множество $\{R_{B_i} L_{C_i},\ i = 1, \ldots, m\}$ линейно независимо в $M(\mathrm{Ass}[X_n])$. Тогда для любого $a \in \mathrm{Ass}[X_n]$ имеем

$$(a^2)T \underset{(12)}{=} (aT)a + a(aT),$$

$$\begin{aligned}(a^2)T = a^2B + Ca^2 + \sum_{i=1}^{m} \alpha_i (C_i a^2 B_i) = (aT)a + a(aT) \\ = aBa + Ca^2 + \sum_{i=1}^{m} \alpha_i (C_i a B_i a) + a^2 B + aCa + \sum_{i=1}^{m} \alpha_i (a C_i a B_i).\end{aligned}$$

Поэтому для любого $a \in \mathrm{Ass}[X_n]$ имеем тождество в $\mathrm{Ass}[X_n]$:

$$\sum_{i=1}^{m} \alpha_i (C_i a^2 B_i) = a(B + C)a + \sum_{i=1}^{m} \alpha_i (C_i a B_i a + a C_i a B_i). \tag{13}$$

Положим в (13) $a = \{x_1 x_2 x_1 x_2^2 \ldots x_1 x_2^k x_1\}$. Сравнивая начало и окончание всех ассоциативных слов, входящих в (13), и учитывая линейную независимость операторов $\{R_{B_i} L_{C_i},\ i = 1, \ldots, m\}$, приходим к заключению, что $\alpha_i = 0$, $i = 1, \ldots, m$, и $B + C = 0$.

Следовательно, $T = R_B - L_B$ и для любого $a \in \mathrm{Ass}[X_n]$

$$aT = aB - Ba = [a, B].$$

Если при этом $(aT)^* = aT$, то $(aT)^* = [a, B]^* = -[a, B^*]$ и

$$2(aT) = aT + (aT)^* = [a, B] + [a, (-B)^*] = [a, [B]].$$

Лемма доказана.

Определение. Оператор $T \in M(\mathrm{Ass}[X_n]) \cap \mathrm{Outer}(H[X_n])$, $n \geq 2$, называется *H-дифференцированием* алгебры $\mathrm{Ass}[X_n]$.

Из доказательства леммы 6 вытекает

Следствие. *Алгебра Ли H-дифференцирований алгебры* $\mathrm{Ass}[X_n]$ *совпадает с алгеброй* $\mathrm{Inder}(\mathrm{Ass}[X_n])$.

Отметим, что если B — подалгебра A, то в общем случае $\mathrm{Inder}(A) \subseteq M(A) \cap \mathrm{Outer}(B)$ и $M(A) \cap \mathrm{Outer}(B) \neq \mathrm{Inder}(A)$.

Рассмотрим элемент $f = [z, [x, y]^3] \in \mathrm{Ass}[x, y, z]$. Заметим, что

$$f^* = ([z, [x, y]^3])^* = -[z, ([x, y]^3)^*] = -[z, (-[x, y]^3)] = f.$$

Следовательно, по теореме Ширшова — Кона [1, 2] $f \in SJ[x, y, z]$. Найдем его представление в алгебре $SJ[x, y, z]$. Обозначим $k = [x, y]$. Используем тождества (2):

$$k^2 = [x, y] \circ [x, y] \underset{(2)}{=} \frac{1}{2}[x, [x, y^2]] - [x, [x, y]] \circ y \underset{(2)}{=} 2xD_{x,y^2} - 4xD_{x,y} \circ y, \tag{14}$$

$$\begin{aligned} f = [z, k^3] &\underset{(2)}{=} [z, k] \circ k^2 + 2[z, k] \circ k \circ k \underset{(2)}{=} 3[z, k] \circ k^2 + 2kD_{[z,k],k} \\ &\underset{(2)}{=} 12zD_{x,y} \circ k^2 + \frac{1}{2}[k, [[z, k], k]] = 12zD_{x,y} \circ k^2 - \frac{1}{2}[z, k, k, k] \\ &\underset{(2),(14)}{=} 24zD_{x,y} \circ (xD_{x,y^2} - 2xD_{x,y} \circ y) - 32zD^3_{x,y}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$f = 8(3zD_{x,y} \circ (xD_{x,y^2} - 2xD_{x,y} \circ y) - 4zD^3_{x,y}). \tag{15}$$

Определение. Оператор $S_{x,y} \in R(J[x, y, z])$, где

$$S_{x,y} = 24D_{x,y}R_{(xDx,y^2 - 2xD_{x,y} \cdot y)} - 32D^3_{x,y},$$

назовем *оператором Шестакова.*

Впервые оператор $S_{x,y}$ ввел И. П. Шестаков (см. [3]). Отметим важные свойства оператора $S_{x,y}$. Пусть $\varphi : J[x, y, z] \to SJ[x, y, z]$ — канонический гомоморфизм, $S_3 = \mathrm{Ker}\,\varphi$ — идеал йордановых S-тождеств от трех порождающих. Если w принадлежит $J[x, y, z]$ (соответственно $RJ[x, y, z]$), то $\overline{w}$ означает, что $\varphi(w)$ принадлежит $SJ[x, y, z]$ (соответственно $RJ[x, y, z]$).

Предложение 1. *Имеют место соотношения:*

$$\overline{zS_{x,y}} = [z, [x, y]^3]; \tag{16}$$

$\overline{S_{x,y}} \in \mathrm{Inder}(SJ[x, y, z])$, *т. е. для любого* $a \in SJ[x, y, z]$

$$a^2\overline{S_{x,y}} = 2a\overline{S_{x,y}} \circ a; \tag{17}$$

$$Sh(x, y, z) = (z^2)S_{x,y} - 2zS_{x,y} \cdot z \neq 0 \quad \text{в } J[x, y, z], \tag{18}$$

т. е. $Sh(x, y, z)$ — *s-тождество, более того,* $Sh(x, y, z)$ *эквивалентно s-тождеству Глени* G_8.

Доказательство. Соотношение (16) следует из (15). Соотношение (17) вытекает из (16). Нетрудно проверить, что $Sh(x, y, z) \neq 0$ в $H(C_3)$. Из (17) следует, что $Sh(x, y, z) = 0$ во всех специальных йордановых алгебрах. Следовательно, $Sh = Sh(x, y, z)$ — s-тождество, причем $d_x(Sh) = d_y(Sh) = 3$, $d_z(Sh) = 2$. В силу результатов из [4] $Sh(x, y, z)$ эквивалентно G_8. Предложение доказано.

Определение. F-модуль A, $A \subseteq M(J[x, y])$, называется *характеристическим*, если он замкнут относительно всех эндоморфизмов из $\mathrm{End}(J[x, y])$.

Опишем внутренние йордановы дифференцирования алгебры $J[x, y]$.

Теорема 3. *Алгебра Ли* $\mathrm{Inder}(J[x, y])$ *порождается как характеристический F-модуль двумя дифференцированиями* $D_{a,b}$, $\overline{S}_{a,b}$, *где* $a, b \in J[x, y]$, *т. е. для любого* $T \in \mathrm{Inder}(J[x, y])$ *найдутся такие* $a_i, b_i, c_i, d_i \in J[x, y]$ *и* $\alpha_i, \beta_i \in F$, *что*

$$T = \sum_i \alpha_i D_{a_i,b_i} + \sum_i \beta_i \overline{S}_{c_i,d_i}.$$

Доказательство. Пусть $T \in \mathrm{Inder}(J[x, y])$. Из леммы 6 и следствия из нее вытекает существование такого $B \in \mathrm{Ass}[x, y]$, что $aT = [a, [B]]$ для любого $a \in J[x, y]$. Согласно теореме 1 существуют такие $a_i, b_i, c_i, d_i \in J[x, y]$ и $\alpha_i', \beta_i' \in F$, что

$$[B] = \sum_i \alpha_i [a_i, b_i] + \sum_i \beta_i [c_i, d_i]^3.$$

Поэтому из теоремы Ширшова — Макдональдса [1], соотношений (2) и (15) вытекает, что

$$T = \sum_i \alpha_i D_{a_i,b_i} + \sum_i \beta_i \overline{S}_{c_i,d_i}.$$

Теорема доказана.

Определим оператор $\langle\ \rangle : H[x, y, z] \to J[x, y, z]$ следующим образом. Пусть $a \in H[x, y, z]$, т. е. $a^* = a$. По теореме Ширшова — Кона [1, 2] $a \in SJ[x, y, z]$. Из доказательства теоремы Ширшова — Кона нетрудно извлечь алгоритм однозначного представления $a = f_a(x, y, z)$, где $f_a(x, y, z)$ — однозначно определенный j-многочлен из $SJ[x, y, z]$. Тогда $\langle a \rangle = f_a(x, y, z)^J$, где $f_a(x, y, z)^J$ — многочлен из $J[x, y, z]$, полученный из $f_a(x, y, z)$ заменой операции «$\circ$» операцией «$\cdot$». Например,

$$\langle xy + yx \rangle = 2x \cdot y,$$
$$\langle xyz + zyx \rangle = 2yU_{z,x} = 2(y \cdot z \cdot x + y \cdot x \cdot z - y \cdot (x \cdot z)),$$
$$\langle [z, [x, y]^3] \rangle = zS_{x,y}.$$

Определение. s-Тождества вида

$$g_u(x, y, z) = \langle [z^2, [u]] \rangle - 2\langle [z, [u]] \rangle \cdot z,$$

где $u \in \mathrm{Ass}[x, y]$, $[u] = u - u^*$, называются *коммутаторными s-тождествами*.

Например, $[x, y]^3 \underset{(5),L_1}{=} 3[x^2y^2xy]$, поэтому

$$Sh(x, y, z) = 3g_{x^2y^2xy}(x, y, z).$$

Теорема 4. *Все йордановы коммутаторные s-тождества $J[x,y,z]$ являются следствиями s-тождества Глени — Шестакова $Sh(x,y,z)$.*

Доказательство. Из теоремы 1 и теоремы Ширшова — Макдональдса [1] следует, что

$$\langle [z,[u]]\rangle = \sum_i \alpha_i z D_{a_i,b_i} + \sum_j \beta_j z S_{c_j d_j}$$

для некоторых $a_i, b_i, c_j, d_j \in J[x,y]$, $\alpha_i, \beta_j \in F$. Поэтому

$$g_u(x,y,z) = \sum_i \alpha_i (z^2 D_{a_i b_i} - 2z D_{a_i b_i} z) + \sum_j \beta_j Sh(z, c_j, d_j) = \sum_j \beta_j Sh(z, c_j, d_j) \in T(Sh(x,y,z)).$$

Теорема доказана.

5. Некоторые свойства кубических коммутаторов и открытые вопросы. Напомним, что

$$L_1 = ([a,b]; a,b \in SJ[x,y])_F, \quad L_3 = ([a,b]^3; a,b \in SJ[x,y])_F.$$

Определение. Элемент $a \in SJ[x,y,z]$ называется *аннулятором* $[x,y]^3$, если

$$\frac{\partial x}{\partial a}[x,y]^3 = [a,y][x,y]^2 + [x,y][a,y][x,y] + [x,y]^2[a,y] \in L_1,$$

т. е. является коммутатором, где $\frac{\partial x}{\partial a}$ — оператор дифференциальной подстановки $x \to a$. Нетрудно заметить, что если a — аннулятор $[x,y]^3$, то a — аннулятор s-тождества $Sh(x,y,z)$, т. е.

$$\frac{\partial x}{\partial a} Sh(x,y,z) = 0.$$

Определение. Элемент $b \in SJ[x,y,z]$ называется *аннулятором тетрад*, если $\{bx_1x_2x_3\} \in SJ[x,y,z,x_1,y_1,z_1]$, т. е. b превращает тетраду в йорданов многочлен. Например, $w = [x,[y,k^2]]$ — аннулятор тетрад (см. [5]).

Лемма 7. *Справедливы утверждения:*

1) $L_1 \neq L_3$;

2) $L_1 \cap L_3 \neq 0$;

3) $w = [x,[y,k^2]]$ *является аннулятором* $[x,y]^3$.

Доказательство. 1. Предположим, что $[x,y]^3 \in L_1$. Тогда $[x,y]^3 = \sum_i \alpha_i [a_i, b_i]$, где $a_i, b_i \in SJ[x,y]$, $\alpha_i \in F$. Следовательно,

$$Sh(x,y,z) = \sum_i \alpha_i (z^2 D_{a_i,b_i} - 2z D_{a_i,b_i} \cdot z) = 0$$

в алгебре $J[x,y,z]$. Поэтому $[x,y]^3 \notin L_1$.

2. Рассмотрим аннулятор тетрад $w = [x,[y,k^2]]$. Тогда

$$u = \frac{\partial x}{\partial w}([x,y]^3) = 2[w,y] \circ [x,y] \circ [x,y] + [x,y]^2 \circ [w,y] \in L_3,$$

$$u \underset{L_1}{\equiv} 3[w,y] \circ k^2 \underset{(2)}{=} 3[y,k^2] \circ [x,[y,k^2]] \underset{(2)}{=} \frac{3}{2}[x,[y,k^2]^2] \equiv 0 \bmod L_1.$$

Следовательно, $u \in L_1 \cap L_3$. Очевидно, что $u \neq 0$ в $\mathrm{Ass}[x,y]$.

3. Из включения $u \in L_1$ следует, что w является аннулятором $[x,y]^3$.

Лемма доказана.

Вопрос 1. *Описать F-модуль аннуляторов $[x,y]^3$.*

Определение. Дифференцирование $T \in \mathrm{Inder}(J[X_k])$, $k \geq 2$, называется *дифференцированием степени k*, если $T \notin \mathrm{Inder}(J[X_{k+1}])$.

Например, дифференцирование $S_{x,y}$ является дифференцированием степени 2.

Вопрос 2. *Существуют ли дифференцирования степени $k \geq 3$?*

Нетрудно заметить, что в этом случае $\mathrm{Var}(J[X_k]) \neq \mathrm{Var}(J[X_{k+1}])$. В частности, дифференцирование $S_{x,y}$ разделяет многообразия $\mathrm{Var}([J[X_2]) \subsetneq \mathrm{Var}(J[X_3])$. Очевидно, что $[x,y] \circ z \notin L_1(x,y,z) + L_3(x,y,z)$. В этой связи можно поставить

Вопрос 3. *Найти конструктивные порождающие F-модуля $L[X_3]$.*

В заключение я хотел бы выразить благодарность профессору И. П. Шестакову и профессору К. Маккриммону за плодотворные беседы о том, откуда берутся йордановы s-тождества.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Жевлаков Л. А., Слинько А. М., Шестаков И. П., Ширшов А. И.* Кольца, близкие к ассоциативным. М.: Наука, 1978.
2. *Кон П.* Универсальная алгебра. М.: Мир, 1968.
3. *Mc Crimmon K.* A taste of Jordan algebras. New York: Springer-Verl., 2004.
4. *Smith B. T., Wos L. T.* An unnatural attack on the structure problem for the free ring on 3 letter: an application on quad arithmetic // Computers in nonassoaciative rings and algebras. New York: Acad. Press, 1977.
5. *Сверчков С. Р.* О квазимногообразии специальных йордановых алгебр // Алгебра и логика. 1983. Т. 22, № 5. С. 563–573.

Статья поступила 2 июля 2009 г.

Сверчков Сергей Робертович
Новосибирский гос. университет, ул. Пирогова, 2, Новосибирск 630090
sverchkovSR@yandex.ru