Сибирский математический журнал
Ноябрь—декабрь, 2009. Том 50, № 6

УДК 517.55

ОБ УСЛОВИЯХ $\bar\partial$–ЗАМКНУТОСТИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ФОРМ

А. М. Кытманов, С. Г. Мысливец

Аннотация. Исследуются $\bar\partial$-замкнутые дифференциальные формы с гладкими коэффициентами в замыкании ограниченной области $D \subset \mathbb{C}^n$. Показано, что условие $\bar\partial$-замкнутости можно заменить более слабым дифференциальным условием в области и рядом дифференциальных условий на границе области. В частности, для форм с гармоническими коэффициентами $\bar\partial$-замкнутость эквивалентна выполнению некоторых граничных соотношений. Это позволяет интерпретировать полученные результаты как условия $\bar\partial$-замкнутости продолжения формы с границы области.

Ключевые слова: $\bar\partial$-замкнутая дифференциальная форма, формула Бохнера — Мартинелли — Коппельмана.

Введение

Хорошо известно, что необходимым условием $\bar\partial$-замкнутого продолжения дифференциальных форм γ (типа (p,q)) с границы области $D \subset \mathbb{C}^n$ в эту область является равенство нулю касательной части $(\bar\partial\gamma)_\tau$ на ∂D. Такие формы называют *CR-формами.* Для голоморфного продолжения функций с границы области (форм типа $(0,0)$) это условие является и достаточным (если граница области связна). Если $q > 0$, то известно (см. [1]), что достаточным условием существования такого продолжения форм является тривиальность групп когомологий Дольбо этой области соответствующего порядка.

Для продолжения с части границы (решения задачи Коши) в [2] рассмотрены условия другого вида.

В то же время известны условия $\bar\partial$-замкнутости дифференциальных форм, если они являются решениями некоторого дифференциального уравнения в области и некоторого дифференциального уравнения на границе (без дополнительных требований на группу когомологий области). А именно, справедлива (см. [3, теорема 15.13])

Теорема 1. *Пусть D — ограниченная область с гладкой границей и форма γ типа (p,q) имеет коэффициенты класса $C^2(\overline{D})$. Форма γ является $\bar\partial$-замкнутой в D тогда и только тогда, когда $(\bar\partial\gamma)_\nu = 0$ на ∂D и*

$$\bar\partial^*\bar\partial\gamma = 0 \quad \text{в } D. \tag{1}$$

Здесь $(\bar\partial\gamma)_\nu$ — нормальная часть формы $\bar\partial\gamma$ на границе области, а $\bar\partial^*$ — оператор, формально сопряженный к оператору $\bar\partial$.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (коды проектов 08–01–00844 и 08–01–90250).

Сложность применения данного утверждения заключается в том, что уравнение (1) не является эллиптическим и разрешимость задачи Дирихле для него неясна.

В случае функций ($p = q = 0$) оператор в формуле (1) превращается в оператор Лапласа. Поскольку задача Дирихле для него разрешима, то теорема 1 сводится к проверке условия $(\bar\partial\gamma)_\nu = 0$ для гармонического продолжения функции.

В данной работе показано, что условие $\bar\partial$-замкнутости можно заменить более слабым дифференциальным условием (связанным с оператором Лапласа) в области и рядом дифференциальных условий на границе области. В частности, для форм с гармоническими коэффициентами $\bar\partial$-замкнутость эквивалентна выполнению некоторых граничных соотношений. Это позволяет интерпретировать полученные результаты как условия $\bar\partial$-замкнутости продолжения формы с границы области.

1. Предварительные результаты

Рассмотрим ограниченную область $D \subset \mathbb{C}^n$ с гладкой границей ∂D класса C^1 вида $D = \{z \in \mathbb{C}^n : \rho(z) < 0\}$, где ρ — вещественнозначная функция класса C^1 и $d\rho \neq 0$ на ∂D.

Введем форму типа (p, q), $p, q = 0, \dots, n$,

$$\gamma = \sum_I \sum_J \gamma_{I,J}(z) dz_I \wedge d\bar z_J,$$

где сумма берется по всем возрастающим мультииндексам $I = (i_1, i_2, \dots, i_p)$, $J = (j_1, j_2, \dots, j_q)$ из целых $1, 2, \dots, n$, т. е.

$$1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_p \leqslant n, \quad 1 \leqslant j_1 < j_2 < \ldots < j_q \leqslant n$$

и

$$dz_I = dz_{i_1} \wedge dz_{i_2} \wedge \ldots \wedge dz_{i_p}, \quad dz_J = dz_{j_1} \wedge dz_{j_2} \wedge \ldots \wedge dz_{j_q}.$$

Определим оператор Ходжа

$$*\gamma = \sum_I \sum_J \gamma_{I,J}(z) * (dz_I \wedge d\bar z_J),$$

где

$$*(dz_I \wedge d\bar z_J) = (-1)^{pn} 2^{p+q} \left(\frac{i}{2}\right)^n \sigma(I)\sigma(J) dz[J] \wedge d\bar z[I],$$

$dz[J]$ получается из dz удалением дифференциалов $dz_{j_1}, \dots, dz_{j_q}$ и знак $\sigma(J) = \pm 1$ определяется равенством

$$dz_J \wedge dz[J] = \sigma(J)\, dz$$

при $dz = dz_1 \wedge \ldots \wedge dz_n$ [4, гл. 5]. Для формы γ типа (p, q) форма $*\gamma$ имеет тип $(n - q, n - p)$.

Лемма 1. *Для форм γ и β типа (p, q) справедливы равенства:*
1) $* * \gamma = (-1)^{p+q}\gamma$;
2) $dz_I \wedge d\bar z_J \wedge *(\overline{dz_I \wedge d\bar z_J}) = 2^{p+q}\, dv$, *где* dv — *элемент объема в* $\mathbb{C}^n$;
3) $\overline{*\gamma} = *\bar\gamma$;
4) $*\gamma \wedge \bar\beta = (-1)^{p+q} \gamma \wedge *\bar\beta$.

Справедливость этой леммы хорошо известна и следует непосредственно из определения оператора Ходжа.

Введем скалярное произведение Ходжа для дифференциальных форм γ и β типа (p,q) с коэффициентами класса $\mathscr{L}^2(D)$:

$$(\gamma,\beta)=\int\limits_D \gamma\wedge *\bar\beta,$$

и норму Ходжа $\|\gamma\|^2=(\gamma,\gamma)$. Очевидно, что для произведения Ходжа выполняется равенство $(\gamma,\beta)=\overline{(\beta,\gamma)}$.

Используя оператор Ходжа, можно вычислить формально сопряженные операторы $\bar\partial^*$ и ∂^* для операторов $\bar\partial$ и ∂ соответственно: $\bar\partial^*=-*\partial*$, $\partial^*=-*\bar\partial*$.

Для данной дифференциальной формы γ типа (p,q) с непрерывными коэффициентами в окрестности $U(\partial D)$ границы области D будем говорить, что *касательная часть формы γ равна нулю на ∂D* (т. е. $\gamma_\tau=0$), если

$$\int\limits_{\partial D}\gamma\wedge\beta=0$$

для всех форм β типа $(n-p,n-q-1)$ с коэффициентами класса $\mathscr{C}^\infty$ в некоторой окрестности $U(\partial D)$ границы ∂D.

Будем говорить, что *нормальная часть формы γ равна нулю на ∂D* (т. е. $\gamma_\nu=0$), если $(*\bar\gamma)_\tau=0$ на ∂D.

Лемма 2. 1. *Пусть γ — форма типа $(p,q-1)$ с гладкими коэффициентами в $\overline{D}$. Тогда $\gamma_\tau=0$, если и только если $(\bar\partial\gamma,\beta)=(\gamma,\bar\partial^*\beta)$ для всех форм β типа (p,q) с коэффициентами класса $C^\infty(\overline{D})$.*

2. *Пусть γ — форма типа $(p,q+1)$ с гладкими коэффициентами в $\overline{D}$. Тогда $\gamma_\nu=0$, если и только если $(\bar\partial^*\gamma,\beta)=(\gamma,\bar\partial\beta)$ для всех форм β типа (p,q) с коэффициентами класса $C^\infty(\overline{D})$.*

Доказательство. Докажем первое утверждение. Имеем

$$(\bar\partial\gamma,\beta)=\int\limits_D\bar\partial\gamma\wedge*\bar\beta=\int\limits_D d\gamma\wedge*\bar\beta.$$

С другой стороны,

$$(\gamma,\bar\partial^*\beta)=\int\limits_D\gamma\wedge*\overline{\bar\partial^*\beta}=-\int\limits_D\gamma\wedge*(\overline{*\partial*\beta})$$
$$=-\int\limits_D\gamma\wedge**\bar\partial*\bar\beta=(-1)^{p+q}\int\limits_D\gamma\wedge\bar\partial*\bar\beta=(-1)^{p+q}\int\limits_D\gamma\wedge d*\bar\beta.$$

Далее, по формуле Стокса

$$\int\limits_D d(\gamma\wedge*\bar\beta)=\int\limits_{\partial D}\gamma\wedge*\bar\beta.$$

Этот интеграл равен нулю тогда и только тогда, когда $\gamma_\tau=0$, поскольку форма $*\bar\beta$ — это произвольная форма типа $(n-p,n-q)$, а форма γ типа $(p,q-1)$.

Имеем

$$\int\limits_D d(\gamma\wedge*\bar\beta)=\int\limits_D d\gamma\wedge*\bar\beta+(-1)^{p+q-1}\int\limits_D\gamma\wedge d*\bar\beta.$$

Отсюда касательная часть γ_τ равна 0 на ∂D тогда и только тогда, когда

$$(\bar\partial\gamma, \beta) = \int\limits_D d\gamma \wedge *\bar\beta = (-1)^{p+q}\int\limits_D \gamma \wedge d*\bar\beta = (\gamma, \bar\partial^*\beta).$$

Аналогично доказывается второе утверждение. $\square$

Пусть $g(\zeta, z)$ — фундаментальное решение уравнения Лапласа в $\mathbb{C}^n$, т. е.

$$g(\zeta, z) = \begin{cases} -\frac{(n-2)!}{(2\pi i)^n}\frac{1}{|\zeta - z|^{2n-2}}, & n > 1, \\ \frac{1}{2\pi i}\log|\zeta - z|^2, & n = 1. \end{cases}$$

Введем ядро Коппельмана

$$U_{p,q}(\zeta, z) = (-1)^{p(n-q-1)}\sum_{I,J}\sum_{k\notin J}\sigma(k, J)\sigma(I)\frac{\partial g(\zeta, z)}{\partial\zeta_k}\,d\bar\zeta[J, k] \wedge d\zeta[I]d\bar z_J \wedge dz_I,$$

где сумма берется по возрастающим мультииндексам $I = (i_1, \dots, i_p)$, $J = (j_i, \dots, j_q)$ из целых $1, \dots, n$ и знак $\sigma(k, J) = \pm 1$ определяется из равенства

$$d\bar\zeta_k \wedge d\bar\zeta_J \wedge d\bar\zeta[k, J] = \sigma(k, J)d\bar\zeta.$$

Ядро $U_{p,q}(\zeta, z)$ — двойная дифференциальная форма типа $(n-p, n-q-1)$ по переменной ζ и типа (p, q) по переменной z. Для $q = -1$ и $q = n$ положим $U_{p,q}(\zeta, z) = 0$.

Введем также форму

$$V_{p,q+1}(\zeta, z) = (-1)^{p(n-q-1)}\frac{1}{2}\sum_{I,K}\sigma(K)\sigma(I)g(\zeta, z)d\bar\zeta[K] \wedge d\zeta[I]d\bar z_K \wedge dz_I,$$

где $K = (k_1, \dots, k_{q+1})$ также возрастающий мультииндекс. Аналогично форма $V_{p,q+1}(\zeta, z)$ — двойная дифференциальная форма типа $(n-p, n-q-1)$ по переменной ζ и типа $(p, q+1)$ по переменной z. Положим $V_{p,q+1} = 0$ при $q = -1$ и $q = n$. Форма $V_{0,q+1}$ введена в [5].

Лемма 3. *Для $\zeta \ne z$ и $p = 0, 1, \dots, n$, $q = -1, 0, 1, \dots, n$ выполняется равенство $\bar\partial_z^* V_{p,q+1}(\zeta, z) = U_{p,q}(\zeta, z)$.*

Доказательство. Пусть $0 \leqslant q \leqslant n-1$. Для данных мультииндексов K длины $q+1$ и I длины p имеем

$$\begin{aligned}\bar\partial_z^*(g(\zeta, z)\,d\bar z_K \wedge dz_I) &= -*\partial_z*(g(\zeta, z)\,d\bar z_K \wedge dz_I) \\ &= (-1)^{p(q+1)+1}*\partial_z g(\zeta, z)*(dz_I \wedge d\bar z_K) \\ &= (-1)^{p(n+q+1)+1}2^{p+q+1}\left(\frac{i}{2}\right)^n *\partial_z g(\zeta, z)\sigma(I)\sigma(K)\,dz[K] \wedge d\bar z[I] \\ &= (-1)^{p(n+q+1)}2^{p+q+1}\left(\frac{i}{2}\right)^n\sigma(I)\sigma(K)*\sum_{k\in K}\frac{\partial g(\zeta, z)}{\partial\zeta_k}\,dz_k \wedge dz[K] \wedge d\bar z[I].\end{aligned}$$

Простая проверка показывает, что

$$dz_k \wedge dz[K] = (-1)^q\sigma(k, K\setminus k)\sigma(K\setminus k)\,dz[K\setminus k] \quad \text{при } k \in K$$

и $(-1)^{q(n-q)}\sigma(K\setminus k)=\sigma[K\setminus k]$. Поэтому

$$\bar\partial_z^*(g(\zeta,z)\,d\bar z_K\wedge dz_I)=(-1)^{p(n+q+1)+q}2^{p+q+1}\left(\frac{i}{2}\right)^n\sigma(I)\sigma(K)$$

$$*\sum_{k\in K}\frac{\partial g(\zeta,z)}{\partial\zeta_k}\sigma(k,K\setminus k)\sigma(K\setminus k)\,dz[K\setminus k]\wedge d\bar z[I]$$

$$=(-1)^{p(n+q+1)+q+(n-q)n}2^{2n-p-q}\left(\frac{i}{2}\right)^n 2^{p+q+1}\left(\frac{i}{2}\right)^n\sigma(I)\sigma(K)$$

$$\times\sum_{k\in K}\frac{\partial g(\zeta,z)}{\partial\zeta_k}\sigma(k,K\setminus k)\sigma(K\setminus k)\sigma[K\setminus k]\sigma[I]\,dz_I\wedge d\bar z_{K\setminus k}$$

$$=(-1)^{pn+p+q+qn}2\sigma(I)\sigma(K)$$

$$\times\sum_{k\in K}\frac{\partial g(\zeta,z)}{\partial\zeta_k}\sigma(k,K\setminus k)\sigma(K\setminus k)(-1)^{q(n-q)}\sigma(K\setminus k)(-1)^{p(n-p)}\sigma(I)\,d\bar z_{K\setminus k}\wedge dz_I$$

$$=(-1)^{(p+q)(n+1)+p(n-p)+q(n-q)}2\sigma(K)\sum_{k\in K}\sigma(k,K\setminus k)\frac{\partial g(\zeta,z)}{\partial\zeta_k}\,d\bar z_{K\setminus k}\wedge dz_I$$

$$=2\sigma(K)\sum_{k\in K}\sigma(k,K\setminus k)\frac{\partial g(\zeta,z)}{\partial\zeta_k}\,d\bar z_{K\setminus k}\wedge dz_I.$$

Следовательно,

$$\bar\partial_z^*V_{p,q+1}(\zeta,z)=(-1)^{p(n-q-1)}\frac{1}{2}\sum_{I,K}\sigma(K)\sigma(I)\bar\partial_z^*g(\zeta,z)\,d\bar\zeta[K]\wedge d\zeta[I]d\bar z_K\wedge dz_I$$

$$=(-1)^{p(n-q-1)}\sum_{I,K}\sigma(K)\sigma(I)\sigma(K)\sum_{k\in K}\sigma(k,K\setminus k)\frac{\partial g(\zeta,z)}{\partial\zeta_k}\,d\bar\zeta[K]\wedge d\zeta[I]d\bar z_{K\setminus k}\wedge dz_I.$$

Обозначая $J=K\setminus k$, получим

$$\bar\partial_z^*V_{p,q+1}(\zeta,z)=(-1)^{p(n-q-1)}\sum_{I,J}\sum_{k\notin J}\sigma(I)\sigma(k,J)$$

$$\times\frac{\partial g(\zeta,z)}{\partial\zeta_k}\,d\bar\zeta[J,k]\wedge d\zeta[I]d\bar z_J\wedge dz_I=U_{p,q}(\zeta,z).\quad\square$$

Лемма 4 [6, § 1]. *Справедливы равенства* $U_{p,q}(\zeta,z)=-U_{n-p,n-q-1}(z,\zeta)$ *и* $\bar\partial_\zeta U_{p,q}(\zeta,z)=(-1)^{p+q}\bar\partial_z U_{p,q-1}(\zeta,z)$, $p,q=0,\dots,n$, *в частности,* $\bar\partial_\zeta U_{p,0}(\zeta,z)=\bar\partial_z U_{p,-1}(\zeta,z)=0$.

Приведем интегральное представление Бохнера — Мартинелли — Коппельмана для дифференциальных форм (см. [6, 7]).

Теорема 2. *Если* D — *ограниченная область в* $\mathbb{C}^n$ *с гладкой границей и* γ — *дифференциальная форма типа* (p,q) *с коэффициентами класса* $C^1(\overline{D})$, *то*

$$\int_{\partial D}\gamma(\zeta)\wedge U_{p,q}(\zeta,z)-\int_D\bar\partial\gamma(\zeta)\wedge U_{p,q}(\zeta,z)$$

$$-\bar\partial_z\int_D\gamma(\zeta)\wedge U_{p,q-1}(\zeta,z)=\begin{cases}\gamma(z), & z\in D,\\ 0, & z\notin\overline{D}.\end{cases}\quad(2)$$

2. Вспомогательные утверждения

Для получения нужного интегрального представления из формулы Мартинелли — Бохнера — Коппельмана нам потребуется ряд вспомогательных утверждений.

Используя лемму 3, преобразуем формулу (2) к виду

$$\int\limits_{\partial D} \gamma(\zeta) \wedge \bar{\partial}_z^* V_{p,q+1}(\zeta, z) - \int\limits_D \bar{\partial}_\zeta \gamma(\zeta) \wedge U_{p,q}(\zeta, z) - \bar{\partial}_z \int\limits_D \gamma(\zeta) \wedge U_{p,q-1}(\zeta, z) = \begin{cases} \gamma(z), & z \in D, \\ 0, & z \notin \overline{D}. \end{cases} \quad (3)$$

Лемма 5. *Справедливо равенство*

$$V_{p,q+1}(\zeta, z) = (-1)^{p+q+1} V_{n-p,n-q-1}(z, \zeta).$$

Доказательство. Так как

$$V_{p,q+1} = (-1)^{p(n-q-1)} \frac{1}{2} \sum_{I,K} \sigma(K)\sigma(I) g(\zeta, z)\, d\bar{\zeta}[K] \wedge d\zeta[I] d\bar{z}_K \wedge dz_I$$

и

$$V_{n-p,n-q-1}(\zeta, z) = (-1)^{(n-p)(n-n+q+1)} \frac{1}{2} \sum_{I,K} \sigma(\{1, \dots, n\} \setminus I) \times \sigma(\{1, \dots, n\} \setminus K) g(\zeta, z)\, d\bar{\zeta}_K \wedge\, d\zeta_I d\bar{z}[K] \wedge dz[I]$$
$$= (-1)^{(n-p)(q+1)} \frac{1}{2} \sum_{I,K} (-1)^{p(n-p)} \sigma(I) (-1)^{(q+1)(n-q-1)} \times \sigma(K) g(\zeta, z)\, d\bar{\zeta}_K \wedge d\zeta_I d\bar{z}[K] \wedge dz[I]$$
$$= (-1)^{p(n-q)+q+1} \frac{1}{2} \sum_{I,K} \sigma(K)\sigma(I) g(\zeta, z)\, d\bar{\zeta}_K \wedge d\zeta_I d\bar{z}[K] \wedge dz[I],$$

то

$$V_{n-p,n-q-1}(z, \zeta) = (-1)^{p(n-q)+q+1} \frac{1}{2} \sum_{I,K} \sigma(K)\sigma(I) g(\zeta, z)\, d\bar{\zeta}[K] \wedge d\zeta[I] d\bar{z}_K \wedge dz_I = (-1)^{p+q+1} V_{p,q+1}(\zeta, z). \quad \square$$

Лемма 6. *Справедливо равенство*

$$*_\zeta V_{p,q}(\zeta, z) = (-1)^{p+q} *_z V_{n-q,n-p}(\zeta, z).$$

Доказательство. По определению для мультииндексов $I = (i_1, \dots, i_p)$ и $K = (k_1, \dots, k_q)$ имеем

$$V_{p,q}(\zeta, z) = (-1)^{p(n-q)} \frac{1}{2} \sum_{I,K} \sigma(K)\sigma(I) g(\zeta, z)\, d\bar{\zeta}[K] \wedge d\zeta[I] d\bar{z}_K \wedge dz_I.$$

Рассмотрим

$$*_\zeta V_{p,q}(\zeta,z)=(-1)^{p(n-q)}\frac{1}{2}\sum_{I,K}\sigma(K)\sigma(I)g(\zeta,z)*(d\bar\zeta[K]\wedge d\zeta[I])\,d\bar z_K\wedge dz_I$$

$$=(-1)^{p(n-q)}\frac{1}{2}\sum_{I,K}\sigma(K)\sigma(I)g(\zeta,z)(-1)^{(n-p)(n-q)}*(d\zeta[I]d\bar\zeta[K])\,d\bar z_K\wedge dz_I$$

$$=(-1)^{p(n-q)}\frac{1}{2}\sum_{I,K}\sigma(K)\sigma(I)g(\zeta,z)(-1)^{(n-p)(n-q)}(-1)^{n(n-p)}2^{2n-p-q}\Big(\frac{i}{2}\Big)^n$$

$$\times\,\sigma([I])\sigma([K])\,d\zeta_K\wedge d\bar\zeta_I d\bar z_K\wedge dz_I$$

$$=(-1)^{n(p+q)}\frac{1}{2}2^{n-p-q}i^n\sum_{I,K}(-1)^{p(n-p)+q(n-q)}g(\zeta,z)\,d\zeta_K\wedge d\bar\zeta_I d\bar z_K dz_I$$

$$=(-1)^{p+q}\frac{1}{2}2^{n-p-q}i^n\sum_{I,K}g(\zeta,z)\,d\zeta_K\wedge d\bar\zeta_I d\bar z_K\wedge dz_I,$$

где знаки определяются равенствами

$$\sigma([I])\,d\zeta=d\zeta[I]\wedge d\zeta_I,\quad \sigma(I)\,d\zeta=d\zeta_I\wedge d\zeta[I]=(-1)^{p(n-p)}d\zeta[I]\wedge d\zeta_I,$$

следовательно, $\sigma([I])=(-1)^{p(n-p)}\sigma(I)$ и $\sigma([K])=(-1)^{q(n-q)}\sigma(K)$. С другой стороны,

$$*_z V_{n-q,n-p}(\zeta,z)=(-1)^{p(n-q)}\frac{1}{2}\sum_{I,K}\sigma([K])\sigma([I])g(\zeta,z)\,d\bar\zeta_I\wedge d\zeta_K*(d\bar z[I]\wedge dz[K])$$

$$=(-1)^{p(n-q)}\frac{1}{2}\sum_{I,K}\sigma([K])\sigma([I])g(\zeta,z)\,d\bar\zeta_I\wedge d\zeta_K(-1)^{n(n-q)}2^{2n-p-q}\Big(\frac{i}{2}\Big)^n$$

$$\times\,\sigma([K])\sigma([I])\,dz_I\wedge d\bar z_K$$

$$=\frac{1}{2}2^{n-p-q}i^n\sum_{I,K}g(\zeta,z)\,d\bar\zeta_I\wedge d\zeta_K dz_I\wedge d\bar z_K$$

$$=\frac{1}{2}2^{n-p-q}i^n\sum_{I,K}g(\zeta,z)\,d\zeta_K\wedge d\bar\zeta_I d\bar z_K\wedge dz_I.$$

Поэтому верно утверждение леммы. □

Лемма 7. *Справедливо равенство*

$$\overline{V_{p,q}(\zeta,z)}=V_{q,p}(\zeta,z).$$

Доказательство. Так как

$$V_{p,q}(\zeta,z)=(-1)^{p(n-q)}\frac{1}{2}\sum_{I,K}\sigma(K)\sigma(I)g(\zeta,z)\,d\bar\zeta[K]\wedge d\zeta[I]d\bar z_K\wedge dz_I,$$

имеем

$$\overline{V_{p,q}(\zeta,z)}=(-1)^{p(n-q)}\frac{1}{2}\sum_{I,K}\sigma(K)\sigma(I)g(\zeta,z)\,d\zeta[K]\wedge d\bar\zeta[I]dz_K\wedge d\bar z_I$$

$$=(-1)^{p(n-q)+pq+q(n-p)}\frac{1}{2}\sum_{I,K}\sigma(K)\sigma(I)g(\zeta,z)\,d\bar\zeta[I]\wedge d\zeta[K]d\bar z_I\wedge dz_K$$

$$=(-1)^{n(n-q)+pq+q(n-p)}V_{q,p}\zeta,z=(-1)^nV_{q,p}(\zeta,z).\quad\square$$

Лемма 8. *Справедливо равенство*
$$U_{p,q}(\zeta,z)=\bar\partial^*_z V_{p,q+1}(\zeta,z)=(-1)^{p+q+1}\bar\partial^*_\zeta V_{p,q}(\zeta,z).$$

Доказательство. Используя леммы 3–5, получим
$$U_{p,q}(\zeta,z)=-U_{n-p,n-q-1}(z,\zeta)=-\bar\partial^*_\zeta V_{n-p,n-q}(z,\zeta)$$
$$=-\bar\partial^*_\zeta((-1)^{p+q}V_{p,q}(\zeta,z))=(-1)^{p+q+1}\bar\partial^*_\zeta V_{p,q}(\zeta,z). \quad \square$$

Лемма 9. *Справедливо равенство*
$$\int\limits_D \bar\partial\gamma(\zeta)\wedge\bar\partial^*_z V_{p,q+1}(\zeta,z)=(-1)^{p+q}\int\limits_{\partial D} *\bar\partial\gamma(\zeta)\wedge *V_{p,q}(\zeta,z)+\int\limits_D \bar\partial^*\bar\partial\gamma(\zeta)\wedge V_{p,q}(\zeta,z).$$

Доказательство. По леммам 8, 1 и формуле Стокса имеем
$$\int\limits_D \bar\partial\gamma(\zeta)\wedge\bar\partial^*_z V_{p,q+1}(\zeta,z)=(-1)^{p+q+1}\int\limits_D \bar\partial\gamma(\zeta)\wedge\bar\partial^*_\zeta V_{p,q}(\zeta,z)$$
$$=(-1)^{p+q}\int\limits_D \bar\partial\gamma(\zeta)\wedge *\partial_\zeta *_\zeta V_{p,q}(\zeta,z)=-\int\limits_D *\bar\partial\gamma(\zeta)\wedge\partial_\zeta *_\zeta V_{p,q}(\zeta,z)$$
$$=-\int\limits_D *\bar\partial\gamma(\zeta)\wedge d *_\zeta V_{p,q}(\zeta,z)$$
$$=(-1)^{p+q}\int\limits_D d(*\bar\partial\gamma(\zeta)\wedge *_\zeta V_{p,q}(\zeta,z))+(-1)^{p+q+1}\int\limits_D d(*\bar\partial\gamma(\zeta))\wedge *_\zeta V_{p,q}(\zeta,z)$$
$$=(-1)^{p+q}\int\limits_{\partial D} *\bar\partial\gamma(\zeta)\wedge *_\zeta V_{p,q}(\zeta,z)+(-1)^{p+q+1}\int\limits_D \partial * \bar\partial\gamma(\zeta)\wedge *_\zeta V_{p,q}(\zeta,z)$$
$$=(-1)^{p+q}\int\limits_{\partial D} *\bar\partial\gamma(\zeta)\wedge *_\zeta V_{p,q}(\zeta,z)+\int\limits_D \bar\partial^*\bar\partial\gamma(\zeta)\wedge V_{p,q}(\zeta,z). \quad \square$$

Лемма 10. *Справедливо равенство*
$$\int\limits_D \gamma(\zeta)\wedge U_{p,q-1}(\zeta,z)=(-1)^{p+q+1}\int\limits_{\partial D} *\gamma(\zeta)\wedge *_\zeta V_{p,q-1}(\zeta,z)+\int\limits_D \bar\partial^*\gamma(\zeta)\wedge V_{p,q-1}(\zeta,z).$$

Доказательство. Используя леммы 8, 1 и формулу Стокса, получим
$$\int\limits_D \gamma(\zeta)\wedge U_{p,q-1}(\zeta,z)=(-1)^{p+q}\int\limits_D \gamma(\zeta)\wedge\bar\partial^*_\zeta V_{p,q-1}(\zeta,z)$$
$$=(-1)^{p+q+1}\int\limits_D \gamma(\zeta)\wedge *\partial_\zeta * V_{p,q-1}(\zeta,z)=-\int\limits_D *\gamma(\zeta)\wedge\partial_\zeta *_\zeta V_{p,q-1}(\zeta,z)$$
$$=-\int\limits_D *\gamma(\zeta)\wedge d_\zeta *_\zeta V_{p,q-1}(\zeta,z)$$
$$=(-1)^{p+q+1}\int\limits_D d_\zeta(*\gamma(\zeta)\wedge *_\zeta V_{p,q-1}(\zeta,z))+(-1)^{p+q}\int\limits_D d(*\gamma(\zeta))\wedge *_\zeta V_{p,q-1}(\zeta,z)$$
$$=(-1)^{p+q+1}\int\limits_{\partial D} *\gamma(\zeta)\wedge *_\zeta V_{p,q-1}(\zeta,z)+(-1)^{p+q}\int\limits_D \partial * \gamma(\zeta)\wedge *_\zeta V_{p,q-1}(\zeta,z)$$
$$=(-1)^{p+q+1}\int\limits_{\partial D} *\gamma(\zeta)\wedge *_\zeta V_{p,q-1}(\zeta,z)+\int\limits_D \bar\partial^*\gamma(\zeta)\wedge V_{p,q-1}(\zeta,z). \quad \square$$

Из лемм 9, 10 и равенства 2 следует

Предложение 1. *Если D — ограниченная область в $\mathbb{C}^n$ с гладкой границей класса C^1 и γ — дифференциальная форма типа (p,q) с коэффициентами класса $C^2(\overline{D})$, то*

$$\int\limits_{\partial D} \gamma(\zeta)\wedge U_{p,q}(\zeta,z) + (-1)^{p+q+1}\int\limits_{\partial D} *\bar\partial\gamma(\zeta)\wedge *_\zeta V_{p,q}(\zeta,z) + (-1)^{p+q}\bar\partial_z\int\limits_{\partial D} *\gamma(\zeta)\wedge *_\zeta V_{p,q-1}(\zeta,z) - \int\limits_{D}\bar\partial^*\bar\partial\gamma(\zeta)\wedge V_{p,q}(\zeta,z) - \bar\partial_z\int\limits_{D}\bar\partial^*\gamma(\zeta)\wedge V_{p,q-1}(\zeta,z) = \begin{cases}\gamma(z), & z\in D,\\ 0, & z\notin D.\end{cases} \quad (4)$$

Следствие 1. *Если форма γ имеет гармонические коэффициенты и $\bar\partial^*\gamma = 0$ в области D, то справедлива формула*

$$\int\limits_{\partial D} \gamma(\zeta)\wedge U_{p,q}(\zeta,z) + (-1)^{p+q+1}\int\limits_{\partial D} *\bar\partial\gamma(\zeta)\wedge *_\zeta V_{p,q}(\zeta,z) + (-1)^{p+q}\bar\partial_z\int\limits_{\partial D} *\gamma(\zeta)\wedge *_\zeta V_{p,q-1}(\zeta,z) = \begin{cases}\gamma(z), & z\in D,\\ 0, & z\notin \overline{D}.\end{cases} \quad (5)$$

Доказательство. Так как $\Delta = \bar\partial^*\bar\partial + \bar\partial\bar\partial^*$ и $\bar\partial^*\gamma = 0$, то $\bar\partial^*\bar\partial = 0$. □

Лемма 11. *Справедливо равенство*

$$\bar\partial_\zeta V_{p,q+1}(\zeta,z) = (-1)^{p+q+1}\bar\partial_z V_{p,q}(\zeta,z).$$

Доказательство. Рассмотрим

$$\bar\partial_z V_{p,q}(\zeta,z) = (-1)^{p(n-q)}\frac12\sum_{I,J}\sigma(J)\sigma(I)\sum_{k\notin J}\frac{\partial g(\zeta,z)}{\partial\bar z_k}\,d\bar z_k d\bar\zeta[J]\wedge d\zeta[I]d\bar z_J\wedge dz_I$$
$$= (-1)^{p(n-q)+1}\frac12\sum_{I,J}\sigma(J)\sigma(I)\sum_{k\notin J}\frac{\partial g(\zeta,z)}{\partial\bar\zeta_k}\,d\bar\zeta[J]\wedge d\zeta[I]d\bar z_k\wedge d\bar z_J\wedge dz_I$$
$$= (-1)^{p(n-q)+1}\frac12\sum_{I,K}\sum_{k\in K}\sigma(J)\sigma(I)\sigma_k(J)\frac{\partial g(\zeta,z)}{\partial\bar\zeta_k}\,d\bar\zeta[J]\wedge d\zeta[I]d\bar z_K\wedge dz_I,$$

где $K = J\cup\{k\}$ и $\sigma_k(J)\,d\bar z_K = d\bar z_k\wedge d\bar z_J$.

С другой стороны,

$$\bar\partial_\zeta V_{p,q+1}(\zeta,z) = (-1)^{p(n-q-1)}\frac12\sum_{I,K}\sigma(K)\sigma(I) \times\sum_{k\in K}\frac{\partial g(\zeta,z)}{\partial\bar\zeta_k}\,d\bar\zeta_k\wedge d\bar\zeta[K]\wedge d\zeta[I]d\bar z_K\wedge dz_I$$
$$= (-1)^{p(n-q-1)}\frac12\sum_{I,K}\sum_{k\in K}\sigma(K)\sigma(I)\sigma_k[K]\frac{\partial g(\zeta,z)}{\partial\bar\zeta_k}\,d\bar\zeta[J]\wedge d\zeta[I]d\bar z_K\wedge dz_I,$$

где $\sigma_k[K]d\bar\zeta[J] = d\bar\zeta_k\wedge d\bar\zeta[K]$.

Сравнив знаки, покажем, что

$$\sigma(K)\sigma_k[K] = (-1)^q\sigma(J)\sigma_k(J). \tag{6}$$

Умножая равенство (6) на $\sigma(J)$ и $\sigma(K)$, получим, что оно эквивалентно равенству

$$\sigma(J)\sigma_k[K] = (-1)^q\sigma(K)\sigma_k(J). \tag{7}$$

Так как

$$\sigma(K)\sigma_k(J)\,d\zeta = \sigma_k(J)\,d\zeta_K\wedge d\zeta[K] = d\zeta_k\wedge d\zeta_J\wedge d\zeta[K] = \sigma(k,J)\,d\zeta,$$

имеем $\sigma(K)\sigma_k(J) = \sigma(k,J)$. С другой стороны, знак в левой части равенства (7) равен

$$\begin{aligned}\sigma(J)\sigma_k[K]\,d\zeta = \sigma_k[K]\,d\zeta_J\wedge d\zeta[J] = d\zeta_J\wedge d\zeta_k\wedge d\zeta[K]\\ = (-1)^q\,d\zeta_k\wedge d\zeta_J\wedge d\zeta[K] = (-1)^q\sigma(k,J)\,d\zeta.\end{aligned}$$

Поэтому $\sigma(J)\sigma_k[K] = (-1)^q\sigma(k,J)$. Отсюда следуют равенства (7) и (6). Тогда

$$\bar\partial_z V_{p,q}(\zeta,z) = (-1)^{p(n-q)+1+q}\sum_{I,K}\sum_{k\in K}\sigma(K)\sigma(I)\sigma_k[K]\,d\bar\zeta[J]\wedge d\zeta[I]d\bar z_K\wedge dz_I.$$

Следовательно, $\bar\partial_z V_{p,q}(\zeta,z) = (-1)^{p+q+1}\bar\partial_\zeta V_{p,q+1}(\zeta,z)$. □

Теорема 3. *Если D — ограниченная область в $\mathbb{C}^n$ с гладкой границей класса C^1 и γ — дифференциальная форма типа (p,q) с коэффициентами класса $C^2(\overline{D})$, то*

$$\begin{aligned}\int_{\partial D}\gamma(\zeta)\wedge U_{p,q}(\zeta,z) + (-1)^{p+q+1}\int_{\partial D}*\bar\partial\gamma(\zeta)\wedge *_\zeta V_{p,q}(\zeta,z)\\ + (-1)^{p+q}\bar\partial_z\int_{\partial D}*\gamma(\zeta)\wedge *_\zeta V_{p,q-1}(\zeta,z)\\ + \int_{\partial D}\bar\partial^*\gamma(\zeta)\wedge V_{p,q}(\zeta,z) - \int_D \Delta\gamma(\zeta)\wedge V_{p,q}(\zeta,z) = \begin{cases}\gamma(z), & z\in D,\\ 0, & z\notin\overline{D}.\end{cases}\end{aligned} \tag{8}$$

Доказательство. Применяя лемму 11 и формулу Стокса к последнему интегралу в формуле (4), получим

$$\begin{aligned}\bar\partial_z\int_D\bar\partial^*\gamma(\zeta)\wedge V_{p,q-1}(\zeta,z) = \int_D\bar\partial^*\gamma(\zeta)\wedge\bar\partial_z V_{p,q-1}(\zeta,z)\\ = (-1)^{p+q}\int_D\bar\partial^*\gamma(\zeta)\wedge\bar\partial_\zeta V_{p,q}(\zeta,z) = (-1)^{p+q}\int_D\bar\partial^*\gamma(\zeta)\wedge d_\zeta V_{p,q}(\zeta,z)\\ = -\int_D d_\zeta(\bar\partial^*\gamma(\zeta)\wedge V_{p,q}(\zeta,z)) + \int_D d(\bar\partial^*\gamma(\zeta))\wedge V_{p,q}(\zeta,z)\\ = -\int_{\partial D}\bar\partial^*\gamma(\zeta)\wedge V_{p,q}(\zeta,z) + \int_D\bar\partial\bar\partial^*\gamma(\zeta)\wedge V_{p,q}(\zeta,z).\end{aligned}$$

Подставляя полученное равенство в формулу (4) и используя представление $\Delta = \bar\partial^*\bar\partial + \bar\partial\bar\partial^*$, приходим к равенству (8). □

Следствие 2. *Если в условиях теоремы* 3 *форма* γ *имеет гармонические коэффициенты, то справедлива формула*

$$\int\limits_{\partial D}\gamma(\zeta)\wedge U_{p,q}(\zeta,z)+(-1)^{p+q+1}\int\limits_{\partial D}*\bar\partial\gamma(\zeta)\wedge *_\zeta V_{p,q}(\zeta,z)$$
$$+(-1)^{p+q}\bar\partial_z\int\limits_{\partial D}*\gamma(\zeta)\wedge *_\zeta V_{p,q-1}(\zeta,z)$$
$$+\int\limits_{\partial D}\bar\partial^*\gamma(\zeta)\wedge V_{p,q}(\zeta,z)=\begin{cases}\gamma(z), & z\in D,\\ 0, & z\notin \overline{D}.\end{cases}\qquad(9)$$

3. Условия $\bar\partial$-замкнутости форм с гармоническими коэффициентами

В этом разделе на основе формулы (9) получены условия $\bar\partial$-замкнутости дифференциальных форм.

Лемма 12. *Справедливо равенство*

$$*\bar\partial\gamma\wedge *V_{p,q}=\partial^*\gamma\wedge V_{p,q}.$$

Доказательство. Рассмотрим форму β типа $(n-p,n-q)$ с постоянными коэффициентами. По лемме 1 из равенства 1 следует, что

$$*\bar\partial\gamma*\wedge\beta=(-1)^{p+q}*\bar\partial**\gamma\wedge*\beta=(-1)^{p+q+1}\partial^**\gamma\wedge*\beta=(-1)^{p+q+1}\partial^*(*\gamma\wedge*\beta).$$

Далее, по лемме 1 из равенства 4 имеем $*\gamma\wedge*\beta=(-1)^{p+q}\gamma\wedge**\beta=\gamma\wedge\beta$. Тогда

$$*\bar\partial\gamma\wedge*\beta=(-1)^{p+q+1}\partial^*(*\gamma\wedge*\beta)=(-1)^{p+q+1}\partial^*(\gamma\wedge\beta)=(-1)^{p+q+1}\partial^*\gamma\wedge\beta.$$

Так как форма $V_{p,q}$ является произведением фундаментального решения $g(\zeta,z)$ на форму с постоянными коэффициентами, лемма верна и для $V_{p,q}$. $\square$

Лемма 13. *При* $z\notin\partial D$

$$\int\limits_{\partial D}*\bar\partial\gamma(\zeta)\wedge *_\zeta V_{p,q}(\zeta,z)=0$$

тогда и только тогда, когда $(\bar\partial\gamma)_\nu=0$.

Доказательство. Пусть $(\bar\partial\gamma)_\nu=0$. Тогда из определения нормальной части формы следует, что

$$\int\limits_{\partial D}*\bar\partial\gamma(\zeta)\wedge *_\zeta V_{p,q}(\zeta,z)=0.$$

Обратно, пусть

$$\int\limits_{\partial D}*\bar\partial\gamma(\zeta)\wedge *_\zeta V_{p,q}(\zeta,z)=0.$$

Тогда

$$\int\limits_{\partial D}\overline{*\bar\partial\gamma(\zeta)\wedge *_\zeta V_{p,q}(\zeta,z)}=0.$$

Используя равенство 3 леммы 1, получим

$$\int\limits_{\partial D} *\overline{\bar{\partial}\gamma(\zeta)} \wedge *_\zeta \overline{V_{p,q}(\zeta,z)} = 0.$$

Данный интеграл является формой типа (p,q), поэтому он равен нулю тогда и только тогда, когда каждый коэффициент этой формы равен нулю. С точностью до знака эти коэффициенты имеют вид

$$\int\limits_{\partial D} *\overline{\bar{\partial}\gamma(\zeta)} \wedge g(\zeta,z)\, d\bar{\zeta}_K \wedge d\zeta_I,$$

где K — произвольный мультииндекс длины q, а I — произвольный мультииндекс длины p.

Так как дроби $g(\zeta,z)$ при $z \notin \partial D$ плотны в пространстве гладких функций на границе области (по теореме Келдыша — Лаврентьева, см. [8, с. 418]), то

$$\int\limits_{\partial D} *\overline{\bar{\partial}\gamma(\zeta)} \wedge \varphi(\zeta)\, d\bar{\zeta}_K \wedge d\zeta_I = 0$$

для произвольной гладкой функции φ на ∂D и произвольных мультииндексов K и I. Поэтому $(*\overline{\bar{\partial}\gamma})_\tau = 0$ или $(\bar{\partial}\gamma)_\nu = 0$. $\square$

Лемма 14. *При $z \notin \partial D$*

$$\bar{\partial}_z \int\limits_{\partial D} \bar{\partial}^*\gamma(\zeta) \wedge V_{p,q}(\zeta,z) = 0$$

тогда и только тогда, когда $(\bar{\partial}\bar{\partial}^*\gamma)_\tau = 0$.

Доказательство. Пусть $(\bar{\partial}\bar{\partial}^*\gamma)_\tau = 0$. Тогда по лемме 11 и формуле Стокса получим

$$\bar{\partial}_z \int\limits_{\partial D} \bar{\partial}^*\gamma(\zeta) \wedge V_{p,q}(\zeta,z) = -\int\limits_{\partial D} \bar{\partial}\bar{\partial}^*\gamma(\zeta) \wedge V_{p,q+1}(\zeta,z) = 0.$$

Обратно, пусть

$$0 = \bar{\partial}_z \int\limits_{\partial D} \bar{\partial}^*\gamma(\zeta) \wedge V_{p,q}(\zeta,z) = -\int\limits_{\partial D} \bar{\partial}\bar{\partial}^*\gamma(\zeta) \wedge V_{p,q+1}(\zeta,z).$$

Тогда по лемме 3 и теореме 3.8 в [3] из того, что

$$\bar{\partial}_z^* \int\limits_{\partial D} \bar{\partial}\bar{\partial}^*\gamma(\zeta) \wedge V_{p,q+1}(\zeta,z) = \int\limits_{\partial D} \bar{\partial}\bar{\partial}^*\gamma(\zeta) \wedge U_{p,q}(\zeta,z) = 0,$$

вытекает равенство $(\bar{\partial}\bar{\partial}^*\gamma)_\tau = 0$. $\square$

Теорема 4. *Пусть D — ограниченная область в $\mathbb{C}^n$ с гладкой границей класса C^1 и γ — дифференциальная форма типа (p,q) с коэффициентами класса*

$C^2(\overline{D})$, гармоническими в D. Форма γ является $\bar\partial$-замкнутой в D тогда и только тогда, когда выполняются условия $(\bar\partial\gamma)_\tau = 0$, $(\bar\partial\gamma)_\nu = 0$ и $(\bar\partial\bar\partial^*\gamma)_\tau = 0$.

Доказательство. Пусть $\bar\partial\gamma = 0$. Очевидно, что $(\bar\partial\gamma)_\tau = 0$, $(\bar\partial\gamma)_\nu = 0$. Из следствия 2 получим, что

$$\int\limits_{\partial D} \gamma(\zeta) \wedge U_{p,q}(\zeta,z) + (-1)^{p+q}\bar\partial_z \int\limits_{\partial D} *\gamma(\zeta) \wedge *_\zeta V_{p,q-1}(\zeta,z) + \int\limits_{\partial D} \bar\partial^*\gamma(\zeta) \wedge V_{p,q}(\zeta,z) = \begin{cases} \gamma(z), & z \in D, \\ 0, & z \notin \overline{D}. \end{cases} \tag{10}$$

Из формулы (2) следует, что $\bar\partial_z \int\limits_{\partial D} \gamma(\zeta) \wedge U_{p,q}(\zeta,z) = 0$ для $z \notin \partial D$. Тогда $\bar\partial_z \int\limits_{\partial D} \bar\partial^*\gamma(\zeta) \wedge V_{p,q}(\zeta,z) = 0$ для $z \notin \partial D$. Поэтому по лемме 14 $(\bar\partial\bar\partial^*\gamma)_\tau = 0$.

Обратно, пусть $(\bar\partial\gamma)_\tau = 0$. Тогда по лемме 4 и формуле Стокса получим

$$\bar\partial_z \int\limits_{\partial D} \gamma(\zeta) \wedge U_{p,q}(\zeta,z) = \int\limits_{\partial D} \gamma(\zeta) \wedge \bar\partial_z U_{p,q}(\zeta,z)$$
$$= (-1)^{p+q+1} \int\limits_{\partial D} \gamma(\zeta) \wedge \bar\partial_\zeta U_{p,q+1}(\zeta,z) = -\int\limits_{\partial D} \bar\partial\gamma(\zeta) \wedge U_{p,q+1}(\zeta,z) = 0.$$

Пусть $(\bar\partial\gamma)_\nu = 0$. Тогда по лемме 13 $\int\limits_{\partial D} *\bar\partial\gamma(\zeta) \wedge +V_{p,q}(\zeta,z) = 0$.

Пусть $(\bar\partial\bar\partial^*\gamma) = 0$. Тогда по лемме 14 $\bar\partial_z \int\limits_{\partial D} \bar\partial^*\gamma(\zeta) \wedge V_{p,q}(\zeta,z) = 0$. Поэтому для формы γ по следствию 2 справедливо представление (9), в котором все слагаемые $\bar\partial$-замкнуты. $\square$

Следствие 3. *Пусть форма γ удовлетворяет условиям теоремы 4 и область D имеет связную границу. Тогда из условий $(\bar\partial\gamma)_\nu = 0$ и $(\bar\partial\bar\partial^*\gamma)_\tau = 0$ следует, что $(\bar\partial\gamma)_\tau = 0$.*

Доказательство. Так как $(\bar\partial\gamma)_\nu = 0$, из следствия 2 и леммы 13 получим

$$\int\limits_{\partial D} \gamma(\zeta) \wedge U_{p,q}(\zeta,z) + (-1)^{p+q}\bar\partial_z \int\limits_{\partial D} *\gamma(\zeta) \wedge *_\zeta V_{p,q-1}(\zeta,z) + \int\limits_{\partial D} \bar\partial^*\gamma(\zeta) \wedge V_{p,q}(\zeta,z) = \begin{cases} \gamma(z), & z \in D, \\ 0, & z \notin \overline{D}. \end{cases}$$

Из леммы 14 следует, что $\bar\partial_z \int\limits_{\partial D} \gamma(\zeta) \wedge U_{p,q}(\zeta,z) = 0$ для $z \notin \overline{D}$. По лемме 6 из [5] получаем, что $\bar\partial_z \int\limits_{\partial D} \gamma(\zeta) \wedge U_{p,q}(\zeta,z) = 0$ и для $z \in D$. Поэтому $(\bar\partial\gamma)_\tau = 0$. $\square$

Теорема 5. *Пусть D — ограниченная область в $\mathbb{C}^n$ со связной гладкой границей класса C^1 и γ — дифференциальная форма типа (p,q) с коэффициентами класса $C^2(\overline{D})$, гармоническими в D. Форма γ является $\bar\partial$-замкнутой в D тогда и только тогда, когда выполняются условия $(\bar\partial\gamma)_\nu = 0$ и $(\bar\partial\bar\partial^*\gamma)_\tau = 0$.*

Доказательство вытекает из теоремы 4, следствия 3 и гармоничности формы γ.

4. Условия $\bar\partial$-замкнутости дифференциальных форм с гладкими коэффициентами

Рассмотрим общий случай дифференциальных форм.

Теорема 6. *Пусть D — ограниченная область в $\mathbb{C}^n$ с гладкой границей класса C^1 и γ — дифференциальная форма типа (p,q) с коэффициентами класса $C^3(\overline{D})$. Форма γ является $\bar\partial$-замкнутой в D тогда и только тогда, когда выполняются условия $(\bar\partial\gamma)_\tau = 0$, $(\bar\partial\gamma)_\nu = 0$, $(\bar\partial^*\bar\partial\gamma)_\tau = 0$ и $\Delta\bar\partial\gamma = 0$.*

Доказательство. Необходимость очевидна.

Достаточность. Пусть выполнены условия теоремы. Рассмотрим формулу (8) теоремы 3:

$$\int\limits_{\partial D}\gamma(\zeta)\wedge U_{p,q}(\zeta,z) + (-1)^{p+q+1}\int\limits_{\partial D} *\bar\partial\gamma(\zeta)\wedge *_\zeta V_{p,q}(\zeta,z)$$
$$+ (-1)^{p+q}\bar\partial_z\int\limits_{\partial D} *\gamma(\zeta)\wedge *_\zeta V_{p,q-1}(\zeta,z)$$
$$+\int\limits_{\partial D}\bar\partial^*\gamma(\zeta)\wedge V_{p,q}(\zeta,z) - \int\limits_{D}\Delta\gamma(\zeta)\wedge V_{p,q}(\zeta,z) = \begin{cases}\gamma(z), & z\in D,\\ 0, & z\notin\overline{D}.\end{cases}$$

В этом равенстве первое слагаемое замкнуто, второе равно нулю, а третье точное. Используя лемму 11 и формулу Стокса, получим

$$\bar\partial_z\int\limits_{D}\Delta\gamma(\zeta)\wedge V_{p,q}(\zeta,z) = (-1)^{p+q+1}\int\limits_{D}\Delta\gamma(\zeta)\wedge\bar\partial_\zeta V_{p,q+1}(\zeta,z)$$
$$= -\int\limits_{D} d(\Delta\gamma(\zeta)\wedge V_{p,q+1}(\zeta,z)) + \int\limits_{D}\bar\partial\Delta\gamma(\zeta)\wedge V_{p,q+1}(\zeta,z)$$
$$= -\int\limits_{\partial D}\Delta\gamma(\zeta)\wedge V_{p,q+1}(\zeta,z) + \int\limits_{D}\bar\partial\Delta\gamma(\zeta)\wedge V_{p,q+1}(\zeta,z).$$

Далее, делая преобразования, как в лемме 14, получим, что

$$\bar\partial_z\int\limits_{\partial D}\bar\partial^*\gamma(\zeta)\wedge V_{p,q}(\zeta,z) = -\int\limits_{\partial D}\bar\partial\bar\partial^*\gamma(\zeta)\wedge V_{p,q+1}(\zeta,z).$$

Поэтому

$$\bar\partial_z\Bigg(\int\limits_{\partial D}\bar\partial^*\gamma(\zeta)\wedge V_{p,q}(\zeta,z) - \int\limits_{D}\Delta\gamma(\zeta)\wedge V_{p,q}(\zeta,z)\Bigg)$$
$$= \int\limits_{\partial D}\bar\partial^*\bar\partial\gamma(\zeta)\wedge V_{p,q+1}(\zeta,z) - \int\limits_{D}\bar\partial\Delta\gamma(\zeta)\wedge V_{p,q+1}(\zeta,z)$$
$$= \int\limits_{\partial D}\bar\partial^*\bar\partial\gamma(\zeta)\wedge V_{p,q+1}(\zeta,z) - \int\limits_{D}\Delta\bar\partial\gamma(\zeta)\wedge V_{p,q+1}(\zeta,z) = 0$$

в силу условий теоремы. $\square$

Теорема 7. *Пусть D — ограниченная область в $\mathbb{C}^n$ со связной гладкой границей класса C^1 и γ — дифференциальная форма типа (p,q) с коэффициентами класса $C^3(\overline{D})$. Форма γ является $\bar\partial$-замкнутой в D тогда и только тогда, когда выполняются условия $(\bar\partial\gamma)_\nu = 0$, $(\bar\partial^*\bar\partial\gamma)_\tau = 0$ и $\Delta\bar\partial\gamma = 0$.*

Доказательство. Покажем, что если $(\bar\partial\gamma)_\nu = 0$, $(\bar\partial^*\bar\partial\gamma)_\tau = 0$ и $\Delta\bar\partial\gamma = 0$, то $(\bar\partial\gamma)_\tau = 0$. Дифференцируя равенство (8) вне $\overline{D}$, получим, что

$$\bar\partial_z \int\limits_{\partial D} \gamma(\zeta)\wedge U_{p,q}(\zeta,z) = 0.$$

Применяя лемму 6 из [5], выводим, что и при $z \in D$ выполняется

$$\bar\partial_z \int\limits_{\partial D} \gamma(\zeta)\wedge U_{p,q}(\zeta,z) = 0.$$

Тогда $(\bar\partial\gamma)_\tau = 0$. $\square$

Рассмотрим частные случаи теоремы 7. Пусть $p = q = 0$. Тогда, продолжая функцию γ гармонически в область D, получим, что второе и третье условия выполняются автоматически. Поэтому теорема 7 превращается в известное утверждение (теоремы 14.1 и 15.1 из [3]).

Пусть $p = n$, $q = n-1$. Тогда $\bar\partial\gamma(z) = f(z)dz\wedge d\bar z$. Третье условие теоремы означает гармоничность функции $f(z)$, а первое условие — равенство $f(z)$ на ∂D нулю, т. е. $f(z)|_{\partial D} = 0$. Таким образом, $f(z) = 0$ в D, и, следовательно, $\bar\partial\gamma(z) = 0$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Хенкин Г. М.* Метод интегральных представлений в комплексном анализе // Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. М.: ВИНИТИ, 1985. Т. 7. С. 23–124. (Итоги науки и техники).
2. *Shestakov I., Shlapunov A.* On the Cauchy problem for operators with injective symbols in Sobolev spaces // Журн. СФУ. Сер. математика и физика. 2008. № 1. С. 52–62.
3. *Кытманов А. М.* Интеграл Бохнера — Мартинелли и его применения. Новосибирск: Наука, 1992.
4. *Уэллс Р.* Дифференциальное исчисление на комплексных многообразиях. М.: Мир, 1976.
5. *Кытманов А. М., Мысливец С. Г.* О построении точных комплексов, связанных с комплексом Дольбо // Сиб. мат. журн. 2003. Т. 44, № 4. С. 779–799.
6. *Айзенберг Л. А., Даутов Ш. А.* Дифференциальные формы, ортогональные голоморфным функциям или формам, и их свойства. Новосибирск: Наука, 1975.
7. *Koppelman W.* The Cauchy integral for differential forms // Bull. Amer. Math. Soc. 1967. V. 73, N 4. P. 554–556.
8. *Ландкоф Н. С.* Основы современной теории потенциала. М.: Наука, 1966.

Статья поступила 16 марта 2008 г.

Кытманов Александр Мечиславович, Мысливец Симона Глебовна
Институт математики Сибирского федерального университета,
пр. Свободный, 79, Красноярск 660041
kytmanov@lan.krasu.ru, simona@lan.krasu.ru