Сибирский математический журнал
Март—апрель, 2009. Том 50, № 2

УДК 512.54

ГИПЕРЦЕНТРАЛЬНАЯ СТРУКТУРА ГРУППЫ УНИТРЕУГОЛЬНЫХ АВТОМОРФИЗМОВ СВОБОДНОЙ МЕТАБЕЛЕВОЙ АЛГЕБРЫ ЛИ

А. Н. Кабанов

Аннотация. Получено описание гиперцентральной структуры группы унитреугольных автоморфизмов свободной метабелевой алгебры Ли над произвольным полем. Как следствие доказано, что эта группа не допускает точного представления матрицами ни над каким полем при условии, что ранг алгебры не меньше четырех.

Ключевые слова: метабелева алгебра Ли, унитреугольный автоморфизм, гиперцентр, матричная представимость.

§ 1. Введение

Отправной точкой для настоящей работы послужила статья В. А. Романькова, И. В. Чиркова и М. А. Шевелина [1], в которой показана матричная непредставимость групп автоморфизмов свободных алгебр Ли, свободных ассоциативных алгебр, абсолютно свободных алгебр и алгебр многочленов при условии, что ранг алгебры не меньше четырех, а основное поле имеет характеристику нуль. Во всех указанных случаях в группе автоморфизмов выделялась подгруппа унитреугольных автоморфизмов, которая оказывалась разрешимой, но не представимой матрицами.

В статье Ю. В. Сосновского [2] описывалось гиперцентральное строение этой подгруппы, но только для алгебры многочленов, зато без ограничения на характеристику поля и с понижением минимального числа порождающих с 4 до 3.

В настоящей работе дано описание строения гиперцентральной серии группы унитреугольных автоморфизмов свободной метабелевой алгебры Ли над полем произвольной характеристики. Как следствие из описания гиперцентрального строения получается матричная непредставимость этой группы.

Рассмотрим свободную метабелеву алгебру Ли $M = M_n$ над полем F с множеством свободных порождающих $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ $(n \geq 3)$. Будем считать, что на X определена линейная упорядоченность: $x_1 > x_2 > \dots > x_n$.

Определим левонормированное произведение $x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_m}$ индукцией по m, полагая $x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_m} = (x_{i_1} x_{i_2}) \dots x_{i_m}$ при $m > 1$. При $m = 1$ имеем просто x_{i_1}. Более того, полагаем $y\underbrace{x \dots x}_{m} = yx^m$. В дальнейшем будем рассматривать только элементы с левонормированной расстановкой скобок.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 07–01–00392).

Согласно [3, с. 173] базис свободной метабелевой алгебры состоит из всевозможных одночленов вида $x_{i_1}x_{i_2}\dots x_{i_k}$, где $x_{i_j}\in X,\ x_{i_1}>x_{i_2}\leq\dots\leq x_{i_k}$. Такие одночлены будут постоянно использоваться в дальнейших рассуждениях, для краткости будем называть их *базисными.* Будем говорить, что элемент алгебры M имеет *канонический вид*, если он представлен в виде линейной комбинации базисных элементов.

Выделим в группе $\operatorname{Aut} M$ подгруппу U_n, порожденную автоморфизмами вида $\tau_i(y_i)=\{x_i\to x_i+y_i,\ x_j\to x_j,\ j\neq i\}$, где y_i принадлежит подалгебре, порожденной $x_{i+1},\dots,x_n$. Такая подгруппа называется *группой унитреугольных автоморфизмов* алгебры M и состоит из всех автоморфизмов вида $\varphi=(x_1\to x_1+f_1(x_2,\dots,x_n),\, x_2\to x_2+f_2(x_3,\dots,x_n),\dots,x_n\to x_n)$. Для краткости будем обозначать такой автоморфизм через $\varphi=(x_1+f_1,x_2+f_2,\dots,x_n)$.

§ 2. Основные результаты

Введем на алгебре M функцию μ, полагая $\mu(h)=i_1$ для базисного одночлена $h=x_{n-i_1}x_{n-i_2}\dots x_{n-i_k}$. Максимум μ-показателей одночленов, входящих в состав канонической записи многочлена, будем называть *μ-показателем* этого многочлена.

Кроме того, введем функцию λ, положив для одночлена указанного вида $\lambda(h)=i_1+\dots+i_k$. Аналогично *λ-показателем* многочлена будем называть максимум λ-показателей его одночленов, а *λ_k-показателем* — максимум λ-показателей одночленов, для которых μ-показатель равен k.

Обозначив через $l(f)$ линейную часть многочлена f, выделим в группе U_n следующие подгруппы:

$Z_1=\{\varphi=(x_1+f_1,x_2,\dots,x_n)\mid \mu(f_1)\leq 1,\ \lambda_1(f_1)\leq 1,\ \mu(l(f_1))=0\}$,

$Z_\alpha=\{\varphi=(x_1+f_1,x_2,\dots,x_n)\mid \mu(f_1)\leq 1,\ \lambda_1(f_1)\leq \alpha\},\ 1<\alpha<\omega$,

$Z_\omega=\{\varphi=(x_1+f_1,x_2,\dots,x_n)\mid \mu(f_1)\leq 1\}$,

$Z_{(k-1)\omega}=\{\varphi=(x_1+f_1,\dots,x_{k-1}+f_{k-1},x_k,\dots,x_n)\mid \mu(f_i)\leq k-i,\, l(f_j)=0,$ $1\leq i\leq k-1,\ j>1\},\ 1<k\leq n-2$,

$Z_{(k-1)\omega+\alpha}=\{\varphi=(x_1+f_1,x_k+f_k,x_{k+1},\dots,x_n)\mid \mu(f_i)\leq k-i+1,\,\lambda_{k-i+1}(f_i)$ $\leq k-i+\alpha,\ l(f_j)=0,\ 1\leq i\leq k-1,\ j>1\},\ 1<k\leq n-2$,

$Z_{(n-2)\omega}=\{\varphi=(x_1+f_1,\dots,x_{n-2}+f_{n-2},x_{n-1},x_n)\mid l(f_j)=0,\ j>1\}$,

$Z_{(n-2)\omega+\alpha}=\{\varphi=(x_1+f_1,\dots,x_{n-2}+f_{n-2},x_{n-1},x_n)\mid \mu(l(f_i))\leq \alpha+1-i,$ $l(f_j)=0,\ 1<i<\alpha+2,\ j\geq\alpha+2\},\ 1\leq\alpha\leq n-2$,

где f_i — произвольные многочлены алгебры M от указанных переменных.

Теорема 1. *При $n\geq 3$ группа унитреугольных автоморфизмов U_n свободной метабелевой алгебры Ли гиперцентральна длины $(n-2)\omega+n-2$ и члены ее гиперцентрального ряда $\zeta_\alpha(U_n)$ совпадают с подгруппами Z_α, $1\leq\alpha\leq(n-2)\omega+n-2$.*

Доказательство проводится индукцией по α. Пусть $\alpha=1$. Возьмем произвольные автоморфизмы $\varphi\in Z_1$ и $\psi\in U_n$. Вычислив $\varphi\circ\psi$ и $\psi\circ\varphi$, убеждаемся, что эти композиции равны, т. е. $Z_1\subseteq\zeta_1(U_n)$.

Теперь предположим, что $\varphi=(x_1+f_1,x_2+f_2,\dots,x_n)$ лежит в $\zeta_1(U_n)$, и покажем, что $\varphi\in Z_1$. Взяв автоморфизм $\psi=(x_1+x_i,x_2,\dots,x_n)$, получим, что ${x_1}^{[\psi,\varphi]}=x_1+f_i(x_{i+1},\dots,x_n)$. Но $[\psi,\varphi]=\mathrm{id}$, следовательно, $f_i(x_{i+1},\dots,x_n)=0$ при $i>1$.

Заметим, что если $\psi=(x_1,\dots,x_i+g(x_{i+1},\dots,x_n),\dots,x_n)$, то

$$ {x_1}^{[\psi,\varphi]}=x_1+f_1(x_2,\dots,x_n)-f_1(x_2,\dots,x_i+g(x_{i+1},\dots,x_n),\dots,x_n). \qquad (1)$$

Вычислим линейную часть и ограничения на λ- и μ-показатели у многочлена f_1. Если $\mu(f_1) = s > 1$, то для $\psi = \big(x_1, \dots, x_{n-s} + x_{n-1}x_n x_{n-1}^p, \dots, x_n\big)$ в разности (1) возникает несократимый базисный одночлен при подходящем выборе целого положительного числа p. Значит, $\mu(f_1) \le 1$.

Если $\lambda_1(f_1) > 1$, то среди базисных одночленов $x_{n-1}x_n^p x_r^q \dots$ многочлена f_1 с максимальным λ-показателем выберем тот, у которого r наибольшее, отличное от n. При $\psi = (x_1, \dots, x_r + x_{r+1}, \dots, x_n)$ в разности (1) получим несократимый базисный одночлен $x_{n-1}x_n^p x_{r+1} x_r^{q-1} \dots$. Следовательно, $\lambda_1(f_1) \le 1$.

Если линейная часть $l(f_1)$ многочлена f_1 содержит одночлен x_{n-1}, то в разности (1) при $\psi = (x_1, \dots, x_{n-1} + x_n, x_n)$ возникает одночлен x_n, поэтому $\mu(l(f_1)) = 0$.

Этими рассуждениями доказано включение $\zeta_1(U_n) \subseteq Z_1$ и тем самым равенство $\zeta_1(U_n) = Z_1$.

Предположим, что справедливо равенство $\zeta_{(k-1)\omega+\alpha}(U_n) = Z_{(k-1)\omega+\alpha}$ при $k \le n-2$, и возьмем φ из $\zeta_{(k-1)\omega+\alpha+1}(U_n)$. Тогда для произвольного ψ из U_n верно включение

$$[\psi, \varphi] \in \zeta_{(k-1)\omega+\alpha}(U_n). \tag{2}$$

Поскольку ${x_{k+1}}^{[\psi,\varphi]} = x_{k+1} + f_i(x_{i+1}, \dots, x_n)$ при $\psi = (x_1, \dots, x_{k+1} + x_i, \dots, x_n)$, $i > k+1$, из включения (2) и описания $((k-1)\omega+\alpha)$-го гиперцентра следует, что $f_i(x_{i+1}, \dots, x_n) = 0$ для всех $i > k+1$.

Если $f_{k+1}(x_{k+2}, \dots, x_n) \ne 0$, то при $\psi = \big(x_1, \dots, x_k + x_{k+1}x_n x_{n-1}^p, \dots, x_n\big)$ получаем ${x_k}^{[\psi,\varphi]} = x_k + f_{k+1}(x_{k+2}, \dots, x_n)x_n x_{n-1}^p$. Поскольку λ_1-показатель у $f_{k+1}(x_{k+2}, \dots, x_n)x_n x_{n-1}^p$ можно за счет p сделать как угодно большим, то получим противоречие с включением (2). Следовательно, $f_{k+1} = 0$.

В дальнейшем нам потребуются равенства

$${x_i}^{[\psi,\varphi]} = x_i + f_i(x_{i+1}, \dots, x_n) - f_i(x_{i+1}, \dots, x_j + g^\varphi, \dots, x_n), \ i < j \le n-1, \tag{3}$$

$${x_j}^{[\psi,\varphi]} = x_j + g^\varphi - g(x_{j+1}, \dots, x_n), \tag{4}$$

где

$$\psi = (x_1, \dots, x_j + g(x_{j+1}, \dots, x_n), \dots, x_n), \quad g^\varphi = g(x_{j+1} + f_{j+1}, x_{j+2} + f_{j+2}, \dots, x_n).$$

Сначала вычислим λ- и μ-показатели у f_k. Если $\mu(f_k) = s > 1$, то для $\psi = \big(x_1, \dots, x_{n-s} + x_{n-1}x_n x_{n-1}^p, \dots, x_n\big)$ и $i = k$ при подходящем p в разности (3) получается несократимый базисный одночлен λ_1-показателя, большего α, что противоречит включению (2). Значит, $\mu(f_k) \le 1$. Если $\lambda_1(f_k) \ge \alpha + 2$, то выберем в f_k базисный одночлен вида $x_{n-1}x_n^p x_r^q \dots$ с максимальным λ_1-показателем так, что $r < n$ и r наибольшее с таким условием. При $\psi = (x_1, \dots, x_r + x_{r+1}, \dots, x_n)$ и $i = k$ в разности (3) возникает несократимый базисный одночлен $x_{n-1}x_n^p x_{r+1} x_r^{q-1} \dots$, λ_1-показатель которого в точности на 1 меньше, чем у f_k, что противоречит включению (2). Значит, $\lambda_1(f_k) \le \alpha + 1$.

Теперь вычислим линейную часть у многочленов f_i, $1 < i \le k$. Если $l(f_i) \ne 0$ для $i > 1$, то выберем в f_i линейный одночлен x_r с минимальным индексом r. При $r < n$ возьмем $\psi = (x_1, \dots, x_r + x_{r+1}, \dots, x_n)$ и в разности (3) получим одночлен $-x_{r+1}$, что противоречит включению (2). При $r = n$ возьмем автоморфизм $\psi = \big(x_1, \dots, x_{i-1} + x_i x_{i+1} x_i^p, \dots, x_n\big)$ и в разности (4) получим несократимый одночлен $x_i x_{i+1} x_i^{p-1} x_n$. Согласно включению (2) и индукционному предположению $x_{i-1}^{[\psi,\varphi]} = x_{i-1} + f(x_i, \dots, x_n)$, где $\mu(f) \le k-i+2$, $\lambda_{k-i+2}(f) \le k-i+\alpha+1$. Поскольку $\mu\big(x_i x_{i+1} x_i^{p-1} x_n\big) = n - i$, то $n - i \le k - i + 2$, т. е. $n - 2 \le k$, откуда $k = n-2$. Так как $\lambda_{k-i+2}\big(x_i x_{i+1} x_i^{p-1} x_n\big) = \lambda_{n-i}\big(x_i x_{i+1} x_i^{p-1} x_n\big) = (n-i)+(n-i-1)+(n-i)(p-1) = (n-i)(p+1)-1$ и $i \le k$, то $n-i \ge n-k = 2$ и можно подобрать p так, чтобы $\lambda_{k-i+2}\big(x_i x_{i+1} x_i^{p-1} x_n\big) = (n-i)(p+1)-1$ было больше $k-i+\alpha+1$, что противоречит включению (2). Следовательно, $l(f_i) = 0$ для $1 < i \le k$.

Вычислим ограничения на λ- и μ-показатели для многочленов f_i, $1 \le i < k$. Если $\mu(f_i) = s > k-i+1$, то автоморфизм $\psi = \big(x_1, \dots, x_{n-s} + x_{n-t}x_{n-t+1}x_{n-t}^p, \dots, x_n\big)$ при $t = k-i+1$ и подходящем p позволяет получить в разности (3) несократимый базисный одночлен с λ_t-показателем, большим чем $k-i+\alpha$, что противоречит включению (2). Значит, $\mu(f_i) \le k-i+1$.

Предположим, что $\lambda_t(f_i) > t+\alpha$. Среди всех базисных одночленов многочлена f_i с максимальным λ_t-показателем выберем тот $x_{n-t}x_{r_1}^{p_1}x_{r_2}^{p_2}\dots$, $r_1 \ne r_2$, у которого r_1 наибольшее, а среди всех одночленов такого вида — тот, у которого r_2 наибольшее. При $\psi = (x_1, \dots, x_{r_2} + x_{r_2+1}, \dots, x_n)$ в разности (3) возникнет несократимый одночлен $x_{n-t}x_{r_1}^{p_1}x_{r_2+1}x_{r_2}^{p_2-1}\dots$ с λ_t-показателем, большим $k-i+\alpha$, что противоречит включению (2).

Включение $\zeta_{(k-1)\omega+\alpha+1}(U_n) \subseteq Z_{(k-1)\omega+\alpha+1}$ доказано.

Обратное включение проверяется прямым вычислением.

Возьмем произвольные автоморфизмы

$$\psi = (x_1 + g_1(x_2, \dots, x_n), x_2 + g_2(x_3, \dots, x_n), \dots, x_n)$$

из U_n и

$$\varphi = (x_1 + f_1, x_2 + f_2, \dots, x_n)$$

из $Z_{(k-1)\omega+\alpha+1}(U_n)$. Поскольку $f_i = 0$ при $i > k$, то $x_i^{[\psi,\varphi]} = x_i$ при $i > k$. Вычисляя действие автоморфизмов $\psi\varphi$ и $\varphi\psi$ на элементах x_i при $i \le k$, получим

$$x_i^{\psi\varphi} = x_i + f_i + g_i^{\varphi}, \quad x_i^{\varphi\psi} = x_i + g_i + f_i^{\psi},$$

где

$$g_i^{\varphi} = g_i x_{i+1} + f_{i+1}, x_{i+2} + f_{i+2}, \dots, x_n, \quad f_i^{\psi} = f_i x_{i+1} + g_{i+1}, x_{i+2} + g_{i+2}, \dots, x_n.$$

Покажем, что $x_i^{\psi\varphi} = x_i^{\varphi\psi} + h$, где многочлен h удовлетворяет условиям, накладываемым на многочлены f_i в определении подгрупп $Z_{(k-1)\omega+\alpha}$.

В разности

$$x_i^{\psi\varphi} - x_i^{\varphi\psi} \tag{5}$$

рассмотрим выражения

$$g_i^{\varphi} - g_i, \tag{6}$$

$$f_i - f_i^{\psi}. \tag{7}$$

Заметим, что при $j > 1$ в f_j отсутствует линейная часть. Если одночлен содержит элемент x_j, то при замене x_j на $f_j \ne 0$ либо одночлен обратится в нуль, либо μ-показатель полученного выражения станет равным $\mu(f_j)$ в зависимости от положения элемента x_j в одночлене. Значит, μ-показатель разности (6) не превосходит $\mu(f_{i+1}) = k-i$.

При замене в многочлене f_i элемента x_j, $j > i$, многочленом $g_j(x_{j+1}, \dots, x_n)$ μ-показатель полученного выражения может только уменьшиться или остаться прежним. При этом λ_{k-i+1}-показатель тоже только уменьшается. Значит, μ-показатель разности (7), а следовательно, и разности (5) не превосходит $\mu(f_i) =$

$k-i+1$, а λ_{k-i+1}-показатель этих разностей не превосходит $\lambda_{k-i+1}(f_i)-1=k-i+\alpha$.

Заметим, что если $\alpha=0$, то $\lambda_{k-i+1}(f_i)=k-i+1$, поэтому одночлены с μ-показателем $k-i+1$ многочлена f_i имеют вид $x_{k-i+1}x_n^p$. Тем самым в (7), а значит, и в (5) элементов с μ-показателем $k-i+1$ в этом случае нет.

Включение $Z_{(k-1)\omega+\alpha+1}\subseteq\zeta_{(k-1)\omega+\alpha+1}(U_n)$ доказано.

Таким образом, $\zeta_{(k-1)\omega+\alpha+1}(U_n)=Z_{(k-1)\omega+\alpha+1}$.

С учетом доказанных равенств $\zeta_{(k-1)\omega+\alpha}(U_n)=Z_{(k-1)\omega+\alpha}$, $\alpha<\omega$, цепочка

$$\zeta_{k\omega}(U_n)=\bigcup_{\alpha<\omega}\zeta_{(k-1)\omega+\alpha}(U_n)=\bigcup_{\alpha<\omega}Z_{(k-1)\omega+\alpha}=Z_{k\omega},\quad 1<k\leq n-2,$$

очевидна.

Предположим, что справедливо равенство $\zeta_{(n-2)\omega+\alpha}(U_n)=Z_{(n-2)\omega+\alpha}$, и возьмем автоморфизм $\varphi=(x_1+f_1,x_2+f_2,\dots,x_n)$ из $\zeta_{(n-2)\omega+\alpha+1}(U_n)$. Если $\mu(l(f_i))=s>\alpha+2-i$, $1<i<\alpha+3$, то при $\psi=(x_1,\dots,x_{n-s}+x_{n-s+1},\dots,x_n)$ в разности (3) возникает одночлен x_{n-s+1}, что невозможно, так как разность (3) содержится в $\zeta_{(n-2)\omega+\alpha}(U_n)$ и μ-показатель ее линейной части не превосходит $\alpha+1-i$. Следовательно, $\mu(l(f_i))\leq\alpha+2-i$.

Если многочлен $f_{\alpha+3}$ содержит одночлен x_n, то при автоморфизме $\psi=(x_1,\dots,x_{\alpha+2}+x_{\alpha+3},\dots,x_n)$ будет $x_{\alpha+2}^{[\psi,\varphi]}=x_{\alpha+2}+f_{\alpha+3}$. Это означает, что $x_{\alpha+2}^{[\psi,\varphi]}$ содержит одночлен x_n. С другой стороны, $x_{\alpha+2}^{[\psi,\varphi]}=x_{\alpha+2}+f(x_{\alpha+3},\dots,x_n)$, где $l(f)=0$.

Таким образом, $\zeta_{(n-2)\omega+\alpha+1}(U_n)=Z_{(n-2)\omega+\alpha+1}$. Обратное проверяется прямым вычислением.

При $\alpha=n-3$ получим $Z_{(n-2)\omega+n-2}=\{\varphi=(x_1+f_1(x_2,\dots,x_n),\dots,x_{n-1}+f_{n-1}(x_n),x_n)\mid\mu(l(f_i))\leq\ n-1-i\ (i>1)\}=U_n$, что и требовалось доказать.

Теорема 2. *При $n\geq4$ группа унитреугольных автоморфизмов U_n свободной метабелевой алгебры Ли не представима матрицами ни над каким полем.*

Доказательство. Согласно [4] для любой подгруппы G группы $GL_n(F)$, где F — произвольное поле, существует такая функция $\chi(n)$, стремящаяся к бесконечности при $n\to\infty$, что гиперцентральная длина подгруппы G не превосходит $\omega+\chi(n)$. При $n\geq4$ это противоречит теореме 1.

Теорема доказана.

Работа выполнена под руководством профессора В. А. Романькова.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Романьков В. А., Чирков И. В., Шевелин М. А.* Матричная непредставимость групп автоморфизмов некоторых свободных алгебр // Сиб. мат. журн. 2004. Т. 45, № 5. С. 1184–1188.
2. *Сосновский Ю. В.* Описание гиперцентрального строения группы унитреугольных автоморфизмов алгебры многочленов // Сиб. мат. журн. 2007. Т. 48, № 3. С. 689–693.
3. *Бахтурин Ю. А.* Тождества в алгебрах Ли. М.: Наука, 1985.
4. *Gruenberg K. W.* The hypercenter of linear groups // J. Algebra. 1968. V. 8, N 1. P. 34–40.

Статья поступила 27 августа 2007 г.,
окончательный вариант — 16 сентября 2008 г.

Кабанов Александр Николаевич
Омский гос. университет, кафедра информационных систем,
пр. Мира, 55-А, Омск 644077
m01kab@mail.ru