Сибирский математический журнал
Июль—август, 2008. Том 49, № 4

УДК 519.21

ИНТЕГРО–ЛОКАЛЬНАЯ ТЕОРЕМА, ДЕЙСТВУЮЩАЯ НА ВСЕЙ ПОЛУОСИ, ДЛЯ СУММ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН С ПРАВИЛЬНО МЕНЯЮЩИМИСЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЯМИ

А. А. Могульский

Аннотация. Получена интегро-локальная предельная теорема для сумм $S(n) = \xi(1) + \dots + \xi(n)$ независимых случайных величин с общим распределением, правый хвост которого правильно меняется, т. е. имеет вид $\mathbf{P}(\xi \geq t) = t^{-\beta}L(t)$, $\beta > 2$, $L(t)$ — медленно меняющаяся функция. Эта теорема описывает асимптотическое поведение для фиксированного $\Delta > 0$ и при $x \to \infty$ вероятностей

$$\mathbf{P}(S(n) \in [x, x + \Delta))$$

на всей правой полуоси, т. е. в зоне, где действует нормальное приближение, в зоне, где распределение $S(n)$ аппроксимируется распределением максимального слагаемого, а также «на стыке» этих двух зон.

Ключевые слова: правильно меняющееся распределение, интегро-локальная теорема, интегральная теорема, теорема, действующая на всей полуоси, функция уклонений, большие уклонения, зона, где действует нормальное приближение, зона аппроксимации максимальным слагаемым.

§ 1. Основные обозначения. Постановка задачи

Пусть $\xi, \xi(1), \xi(2), \dots$ — независимые случайные величины с общим распределением $\mathbf{F}(B) = \mathbf{P}(\xi \in B)$, средним $a := \mathbf{E}\xi$, дисперсией $b^2 := \mathbf{D}\xi$ и характеристической функцией $\mathfrak{f}(t) = \mathbf{E}e^{it\xi}$, $t \in \mathbb{R}$.

Определение 1.1. *Распределение* $\mathbf{F}$ *случайной величины* ξ *принадлежит классу* $\mathscr{R}$ *правильно меняющихся распределений*, если его правый хвост $F_+(t) := \mathbf{P}(\xi \geq t)$ имеет вид

$$F_+(t) = V(t) := t^{-\beta}L(t) \quad \text{при } t \geq 0,$$

где $\beta \geq 0$, $L(t)$ — медленно меняющаяся функция (м.м.ф.) при $t \to \infty$.

Не ограничивая общности, мы можем рассматривать лишь следующие два типа распределений (или случайных величин).

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (коды проектов 05–01–00810, 07–01–00595, 08–01–00962), Совета по грантам президента РФ и государственной поддержке ведущих научных школ (коды проектов НШ–8980.2006.1, РНШ.2.1.1.1379).

[Z]. *Арифметический тип распределений*, когда $\mathbf{P}(\xi \in \mathbb{Z}) = 1$ и для некоторого $y_0 \in \mathbb{Z}$ такого, что $\mathbf{P}(\xi = y_0) > 0$, наибольший общий делитель возможных значений $\xi - y_0$ равен 1 ($\mathbb{Z}$ — множество целых чисел).

[R]. *Нерешетчатый тип распределений*, когда никаким линейным преобразованием величина ξ не может быть сделана арифметической.

Для арифметических случайных величин выполняется $\mathfrak{f}(2\pi t) = 1$ при любом целом t и $|\mathfrak{f}(2\pi t)| < 1$ при остальных вещественных t. Для нерешетчатых случайных величин $|\mathfrak{f}(t)| < 1$ при любом вещественном $t \neq 0$.

Отметим, что если распределение $\mathbf{F} \in \mathscr{R}$ имеет правый хвост $F_+(t)$, то распределение $\mathbf{F}^*$ с правым хвостом $F_+^*(t) \sim F_+(t)$ при $t \to \infty$ также принадлежит $\mathscr{R}$.

Класс $\mathscr{R}$ правильно меняющихся распределений достаточно полно изучен (см., например, [1, 2]). Хорошо известно, что он является подклассом класса $\mathscr{S}$ *субэкспоненциальных распределений*, которые при $\mathbf{P}(\xi \geq 0) = 1$ характеризуются соотношением

$$\mathbf{P}(\xi(1) + \xi(2) \geq t) \sim 2\mathbf{P}(\xi \geq t) \quad \text{при } t \to \infty. \tag{1.1}$$

В общем случае характеризация записывается в виде соотношения (1.1) при замене в нем $\xi(k)$ на $\xi^+(k) = \max\{\xi(k), 0\}$.

Везде в настоящей работе мы будем рассматривать только такие распределения $\mathbf{F}$ из класса $\mathscr{R}$, для которых $\beta > 2$ (см. определение 1.1).

Обозначим через $\Delta[x) = [x, x + \Delta)$ полуинтервал, начинающийся в точке x и имеющий длину $\Delta > 0$, и положим

$$S(n) = \xi(1) + \dots + \xi(n).$$

В настоящей работе изучается асимптотическое поведение вероятностей

$$\mathbf{P}(S(n) \in \Delta[x)), \tag{1.2}$$

где $n \geq 1$, $x \to \infty$ (возможность, когда $n \geq 1$ остается ограниченным при $x \to \infty$, не исключается); параметр $\Delta > 0$ может быть любым фиксированным положительным числом в случае [R] и $\Delta = 1$ в случае [Z]. Заметим, что полуинтервал $\Delta[x)$ для $\Delta = 1$ содержит единственную целочисленную точку (назовем ее x') и в случае [Z] справедливо

$$\mathbf{P}(S(n) \in \Delta[x)) = \mathbf{P}(S(n) = x').$$

Поэтому в случае [Z] рассматриваемая задача эквивалентна задаче об асимптотике вероятностей

$$\mathbf{P}(S(n) = x) \tag{1.3}$$

для целых x.

Утверждения об асимптотическом поведении вероятностей (1.2) называют *интегро-локальными теоремами* (иногда *локальными*; см., например, [3]) в отличие от интегральных теорем, в которых изучаются вероятности вида

$$\mathbf{P}(S(n) \geq x),$$

и локальных теорем, в которых изучается асимптотика плотности распределения случайной величины $S(n)$, если таковая имеется, или вероятности вида (1.3) в арифметическом случае. Как правило, утверждение в интегральной теореме можно получить как следствие из соответствующего утверждения интегро-локальной (или локальной) теоремы, но не наоборот, так что интегро-локальные (или локальные) теоремы являются более сильными утверждениями по сравнению с интегральными. Для того чтобы сформулировать интегро-локальную теорему для сумм случайных величин с общим распределением из класса $\mathscr{R}$, нам понадобится дополнительное условие

[D]. *В случае* [R] *для любого фиксированного* $\Delta > 0$ *при* $t \to \infty$

$$V(t+\Delta) - V(t) \sim \Delta\beta \frac{V(t)}{t};$$

в случае [Z] *для целых* $k \to \infty$

$$V(k+1) - V(k) \sim \beta \frac{V(k)}{k}.$$

Функция $\beta\frac{V(t)}{t}$ в условии [D] «играет роль» производной $V'(t)$ и асимптотически совпадает с ней, если последняя существует и ведет себя на бесконечности достаточно правильно.

Следующее утверждение является частным случаем теоремы 7.1 в [1, § 7].

Теорема 1.1. *Пусть* $\mathbf{F} \in \mathscr{R}$ *при некотором* $\beta > 2$, *выполнено условие* [D] *и* $\mathbf{D}\xi < \infty$. *Тогда равномерно по* $x \gg \sqrt{n \ln n}$ *справедливо соотношение*

$$\mathbf{P}(S(n) - an \in \Delta[x)) \sim \Delta n \beta \frac{V(x)}{x},$$

где $a = \mathbf{E}\xi$, Δ — *любое положительное число в случае* [R] *и* $\Delta = 1$ *в случае* [Z].

Приведем теперь интегральную теорему, действующую на всей оси, для сумм $S(n)$ случайных величин с общим распределением из класса $\mathscr{R}$. Для этого нам понадобится следующее моментное условие (для распределения $\mathbf{F}$ из $\mathscr{R}$ оно регламентирует убывание его левого хвоста):

$$\mathbf{E}(|\xi|^2; \xi < -t) = o(1/\ln t), \quad t \to \infty. \tag{1.4}$$

Следующее утверждение получено в [4, следствие 7][1)].

Теорема 1.2. *Пусть* $\mathbf{F} \in \mathscr{R}$ *при некотором* $\beta > 2$, *выполнено условие* (1.4), $a = \mathbf{E}\xi = 0$ *и* $b^2 = \mathbf{D}\xi < \infty$. *Тогда равномерно по* $x \geq \sqrt{n}$ *справедливо соотношение*

$$\mathbf{P}(S(n) \geq x) \sim \Phi\left(-\frac{x}{b\sqrt{n}}\right) + nV(x). \tag{1.5}$$

В частности, при любом фиксированном $\varepsilon > 0$

$$\mathbf{P}(S(n) \geq x) \sim \begin{cases} \Phi(-\frac{x}{b\sqrt{n}}), & \text{если } \sqrt{n} \leq x \leq (1-\varepsilon)b\sqrt{(\beta-2)n\ln n}, \\ nV(x), & \text{если } x \geq (1+\varepsilon)b\sqrt{(\beta-2)n\ln n}. \end{cases}$$

Теорема 1.2 действует на всей полуоси (область нормальных уклонений $x < \sqrt{n}$, $n \to \infty$, очевидно, покрывается центральной предельной теоремой). Цель настоящей работы — получение интегро-локального аналога теоремы 1.2.

[1)] В [5] представление (1.5) приведено при дополнительном условии $\mathbf{E}|\xi|^{2+\delta}$, $\delta > 0$, (теорема 1.9) со ссылкой на работу [6], в которой на самом деле был рассмотрен лишь случай $x \geq \sqrt{n} \ln n$ (но без дополнительных моментных условий). Согласно [7] приведенный в [5] результат получен ранее в докторской диссертации А. В. Нагаева (О больших уклонениях сумм независимых случайных величин. Ташкент: Мат. ин-т АН УзССР, 1970). В [8] представление (1.5) получено при условии $\mathbf{P}(\xi < t) = O(|t|^{-\beta})$ при $t \to -\infty$.

В силу теоремы 1.1 достаточно доказать интегро-локальную теорему для уклонений

$$x \in [\sqrt{n}, O(\sqrt{n \ln n})].$$

Работа имеет следующую структуру. В § 2 содержатся формулировки основных результатов, а в § 3 — их доказательства. Важную роль в доказательствах играет интегро-локальное утверждение для сумм срезанных случайных величин, приведенное в лемме 3.1. Ее доказательство помещено в § 4. Отметим, что лемма 3.1 посвящена изучению вероятностей больших уклонений сумм случайных величин в схеме серий и лежит в русле работ [9–12]. В целом же настоящая работа является продолжением исследований, изложенных в [12, 13] и в гл. 4 монографии [1].

§ 2. Формулировки основных результатов

Рассмотрим сначала нерешетчатый случай [R].

Теорема 2.1. *Пусть* $\mathbf{F} \in \mathscr{R}$ *при некотором* $\beta > 2$ *и выполнены условия* (1.4), [R], [D]. *Тогда для любого фиксированного* $\Delta > 0$ *равномерно по* $x \geq \sqrt{n}$ *справедливо соотношение*

$$\mathbf{P}(S(n) - an \in \Delta[x)) \sim \frac{\Delta}{b\sqrt{2\pi n}} e^{-\frac{x^2}{2b^2 n}} + \Delta n \beta \frac{V(x)}{x}.$$

В частности, при любом фиксированном $\varepsilon > 0$ *и для* $x \geq \sqrt{n}$

$$\mathbf{P}(S(n) - an \in \Delta[x)) \sim \Delta \begin{cases} \frac{1}{b\sqrt{2\pi n}} e^{-\frac{x^2}{2b^2 n}}, & \text{если } x \leq b(1-\varepsilon)\sqrt{(\beta-2) n \ln n}, \\ n\beta \frac{V(x)}{x}, & \text{если } x \geq b(1+\varepsilon)\sqrt{(\beta-2) n \ln n}. \end{cases}$$

Если $x \leq b(1-\nu)\sqrt{(\beta-2)n \ln n}$ *для некоторого фиксированного* $\nu > 0$, *то условие* [D] *излишне.*

Очевидно, что в случае [R] мы можем считать, не ограничивая общности, что

$$a := \mathbf{E}\xi = 0, \quad b^2 := \mathbf{D}\xi = 1. \tag{2.1}$$

Однако мы сформулировали теорему 2.1 без привлечения условия (2.1) для того, чтобы утверждения в нерешетчатом и арифметическом случаях написать «на одном языке» (в арифметическом случае [Z] условие (2.1) ограничивает общность рассмотрений и поэтому не используется).

Рассмотрим теперь арифметический случай [Z].

Теорема 2.2. *Пусть* $\mathbf{F} \in \mathscr{R}$ *при некотором* $\beta > 2$ *и выполнены условия* (1.4), [Z], [D]. *Тогда равномерно по целым* $x \geq \sqrt{n}$ *справедливо соотношение*

$$\mathbf{P}(S(n) - [an] = x) \sim \frac{1}{b\sqrt{2\pi n}} e^{-\frac{x^2}{2b^2 n}} + n\beta \frac{V(x)}{x}.$$

В частности, при любом фиксированном $\varepsilon > 0$ *и для целых* $x \geq \sqrt{n}$

$$\mathbf{P}(S(n) - [an] = x) \sim \begin{cases} \frac{1}{b\sqrt{2\pi n}} e^{-\frac{x^2}{2b^2 n}}, & \text{если } x \leq b(1-\varepsilon)\sqrt{(\beta-2) n \ln n}, \\ n\beta \frac{V(x)}{x}, & \text{если } x \geq b(1+\varepsilon)\sqrt{(\beta-2) n \ln n}. \end{cases}$$

Если $x \le b(1-\nu)\sqrt{(\beta-2)n\ln n}$ *для некоторого фиксированного* $\nu > 0$, *то условие* [D] *излишне.*

Отметим, что из теорем 2.1, 2.2 интегральная теорема 1.2 в ее общем виде не следует, так как в последней отсутствует условие [D].

Очевидно, что теоремы 2.1 и 2.2 можно объединить в одно утверждение об асимптотике $\mathbf{P}(S(n) - an \in \Delta[x))$ (ср. с теоремой 1.1), в котором условие (2.1) не предполагается.

Отметим еще, что в теоремах 2.1 и 2.2 случай, когда переменная n не растет, не исключается. В этом случае утверждения теорем 2.1 и 2.2 можно объединить в одно: для любого фиксированного n при $x \to \infty$

$$\mathbf{P}(S(n) - an \in \Delta[x)) \sim \Delta n \beta \frac{V(x)}{x}, \tag{2.2}$$

где Δ — любое фиксированное положительное число в случае [R] и $\Delta = 1$ в случае [Z]. Заметим попутно, что соотношение (2.2) можно получить также из известных свойств субэкспоненциальных и локально-субэкспоненциальных распределений (см., например, [14]).

§ 3. Доказательства теорем 2.1, 2.2

3.1. Предварительные замечания. Условие (2.1), уместное в случае [R], значительно упрощает многие формулировки. Для того чтобы использовать (2.1) применительно к арифметическому случаю [Z] (при доказательстве теоремы 2.2), мы рассмотрим более широкое условие $[\mathrm{Z}_{h,c}]$ *решетчатости* (*с шагом* $h > 0$ *и сдвигом* $c \in (-\infty, \infty)$):

$[\mathrm{Z}_{h,c}]$. *Случайная величина* ξ *представляется в виде* $\xi = c + h\zeta$, *где случайная величина* ζ *является арифметической* (*удовлетворяет условию* [Z]).

Если выполнено $[\mathrm{Z}_{h,c}]$, то условие (2.1) уже не ограничивает общности рассмотрений, так как для арифметического ζ всегда можно подобрать числа c и h так, чтобы для $\xi = c + h\zeta$ условие (2.1) выполнялось (при этом вероятность (1.3) следует изучать для $x = x(n)$ из решетки $\{cn + kh\}$, $k \in \mathbb{Z}$). Итак, везде в последующем мы будем считать, что условие (2.1) выполнено, и будем рассматривать случаи [R] и $[\mathrm{Z}_{h,c}]$.

Доказательства, приведенные ниже в нерешетчатом случае [R], полностью сохраняются и в решетчатом случае $[\mathrm{Z}_{h,c}]$ (т. е. при доказательстве теоремы 2.2), если в нужном месте доказательств использовать соответствующую версию интегро-локальной теоремы в области нормальных уклонений для схемы серий из работы [11] (в п. 4.2 мы цитируем нужные версии этих теорем как в нерешетчатом, так и в решетчатом случаях). По этой причине мы опускаем доказательство в решетчатом случае $[\mathrm{Z}_{h,c}]$ и начиная с этого места ограничиваемся рассмотрением случайных величин, удовлетворяющих условиям (2.1), [R] (за исключением уже упомянутого п. 4.2, где наряду с нерешетчатым рассмотрен и решетчатый случай).

Как отмечено выше, утверждения теорем 2.1, 2.2 для уклонений $x \gg \sqrt{n\ln n}$ уже доказаны (см. теорему 1.1). Поэтому ниже, в доказательствах основных утверждений, этот случай мы исключаем и считаем, что переменная n неограниченно растет, переменная $x = x(n)$ является функцией n и удовлетворяет соотношениям $x \ge 0$, $x = O(\sqrt{n\ln n})$ при $n \to \infty$.

3.2. Схема доказательства основных утверждений. Для $\Delta \in (0, \infty]$; $x, y \in (0, \infty)$; $i, j \in \{1, \dots, n\}$ обозначим

$$D_n := \{S(n) \in \Delta[x)\}, \quad B_j := \{\xi(j) < y\}, \quad B := \bigcap_{i \le n} B_i, \quad B^{(j)} := \bigcap_{i \le n, i \ne j} B_i.$$

Будем использовать очевидные тождества

$$P := \mathbf{P}(D_n) = P_0 + P_{\ge 1}, \quad P = P_0 + P_1 + P_{\ge 2}, \tag{3.1}$$

где

$$P_0 := \mathbf{P}(D_n B), \quad P_1 := \mathbf{P}\Big(D_n \bigcup_{j \le n} \overline{B}_j B^{(j)}\Big) = n\mathbf{P}(D_n \overline{B}_n B^{(n)}),$$

$$P_{\ge 1} := \mathbf{P}\Big(D_n \bigcup_{j \le n} \overline{B}_j\Big) = P_1 + P_{\ge 2}, \quad P_{\ge 2} := \mathbf{P}\Big(D_n \bigcup_{1 \le i < j \le n} \overline{B}_i \overline{B}_j\Big).$$

Доказательство каждой из теорем 2.1, 2.2 заключается в оценивании слагаемых P_0 и $P_{\ge 1}$ или P_0, P_1 и $P_{\ge 2}$ в правых частях тождеств (3.1).

Значение $y = \delta\sqrt{n \ln n}$ будет в дальнейшем определять уровень срезки величины $\xi(k)$. Этот уровень будет зависеть от зоны, в которой лежат рассматриваемые уклонения $x = s\sqrt{n \ln n}$. Более точно, если для произвольного фиксированного $s_+ > 0$ рассматривать зону $x \in [0, s_+\sqrt{n \ln n}]$, то параметр $\delta = \delta_n(s_+)$ будет зависеть от s_+, n и определяться следующими соотношениями при $n \to \infty$:

$$\delta_n(s_+) \to \delta_+(s_+), \quad \delta_+(s_+) = \min\left\{\frac{s_+}{3}, \frac{\beta - 2}{10 s_+}\right\} \tag{3.2}$$

(напомним, что значение s_+ в наших рассмотрениях ограничено).

3.3. Изучение слагаемого P_0 в тождествах (3.1). Для изучения асимптотики вероятности P_0 построим «срезанную» на уровне $y = \delta\sqrt{n \ln n}$ случайную величину $\xi^{(y)}$ с распределением

$$\mathbf{F}^{(y)}(U) = \mathbf{P}(\xi^{(y)} \in U) := \mathbf{P}(\xi \in U \mid \xi < y)$$

и определим преобразование Лапласа над $\mathbf{F}^{(y)}$, его логарифм и функцию уклонений, отвечающую $\xi^{(y)}$, соответственно — равенствами

$$\varphi_y(\lambda) := \mathbf{E}e^{\lambda \xi^{(y)}}, \quad A_y(\lambda) := \ln \varphi_y(\lambda), \quad \Lambda_y(\alpha) := \sup_{\lambda}\{\lambda\alpha - A_y(\lambda)\}, \quad \lambda, \alpha \in \mathbb{R}.$$

Обозначим через

$$S^{(y)}(n) := \xi^{(y)}(1) + \dots + \xi^{(y)}(n)$$

сумму независимых копий случайной величины $\xi^{(y)}$. Тогда, очевидно, изучаемая вероятность P_0 представима в виде

$$P_0 = c_n(y)\mathbf{P}(S^{(y)}(n) \in \Delta[x)), \quad c_n(y) = \mathbf{P}(B) = \mathbf{P}^n(\xi < y).$$

Для уровней срезки $y = \delta\sqrt{n \ln n}$ имеем

$$\mathbf{P}(\overline{B}) \le n\mathbf{P}(\xi \ge y) \le nV(\delta\sqrt{n \ln n}) = o(1). \tag{3.3}$$

Поэтому

$$\mathbf{P}(\overline{B}) \to 0, \quad c_n(y) = \mathbf{P}(B) \to 1, \quad n \to \infty.$$

Стало быть,

$$P_0 \sim \mathbf{P}(S^{(y)}(n) \in \Delta[x)) \tag{3.4}$$

при $n \to \infty$, и задача изучения P_0 сводится к задаче изучения вероятности

$$\mathbf{P}(S^{(y)}(n) \in \Delta[x)).$$

Это задача о больших или нормальных уклонениях суммы случайных величин «в схеме серий», когда распределение слагаемого зависит от n. Мы воспользуемся здесь методом, изложенным в работах [15, 16]: сначала применяется преобразование Крамера, переводящее большие уклонения в нормальные, а затем — интегро-локальная теорема для суммы в схеме серий в области нормальных уклонений.

Наряду со случайной величиной $\xi^{(y)}$ рассмотрим ее преобразование Крамера $\xi_\lambda^{(y)}$ с распределением

$$\mathbf{P}(\xi_\lambda^{(y)} \in U) := \frac{\mathbf{E}(e^{\lambda\xi^{(y)}}; \xi^{(y)} \in U)}{\varphi_y(\lambda)}.$$

Обозначим далее $\xi^{(y,\alpha)} := \xi^{(y)}_{\lambda_y(\alpha)} - \alpha$, где $\lambda_y(\alpha) := \Lambda'_y(\alpha)$ — решение уравнения $\varphi'_y(\lambda)/\varphi_y(\lambda) = \alpha$ (производные берутся по аргументам α и λ соответственно), так что $\mathbf{E}\xi^{(y,\alpha)} = 0$ для всех α из интервала $(\mathbf{E}\xi^{(y)}, y)$ (отметим, что всегда $\mathbf{E}\xi^{(y)} < 0$). Используя далее стандартную технику (см., например, [15]), можно записать

$$\mathbf{P}(S^{(y)}(n) \in \Delta[x)) = e^{-n\Lambda_y(\alpha)}\mathbf{E}(e^{-\lambda_y(\alpha)S^{(y,\alpha)}(n)}; S^{(y,\alpha)}(n) \in \Delta[0)), \tag{3.5}$$

где $\alpha = \frac{x}{n}$ и $S^{(y,\alpha)}(n)$ — сумма n независимых копий $\xi^{(y,\alpha)}$. Если равномерно по $\alpha \in \bigl[0, \frac{s_+\sqrt{\ln n}}{\sqrt{n}}\bigr]$ при $n \to \infty$ справедливы соотношения (предпосылки)

($A1$) $\lambda_y(\alpha) = o(1)$;

($A2$) $\mathbf{P}(S^{(y,\alpha)}(n) \in \Delta[0)) \sim \frac{\Delta}{\sqrt{2\pi n}}$;

($A3$) $\Lambda_y(\alpha) = \frac{\alpha^2}{2} + o\bigl(\frac{1}{n}\bigr)$ (для чего уровень срезки $y = \delta\sqrt{n \ln n}$ следует выбрать специальным образом),

то получим из (3.4), (3.5) следующее утверждение.

Лемма 3.1. *Пусть выполнены все условия теоремы* 2.1, *кроме условия* [D], *и фиксированы произвольные положительные числа* $s_+ > 0$ *и* $\Delta > 0$. *Если выбрать уровень срезки* $y = \delta\sqrt{n \ln n}$ *в соответствии с* (3.2), *то при* $n \to \infty$

$$\mathbf{P}(S(n) \in \Delta[x); B) \sim \frac{\Delta}{\sqrt{2\pi n}} e^{-\frac{x^2}{2n}} \tag{3.6}$$

равномерно в области $x \in [0, s_+\sqrt{n \ln n}]$.

Доказательство леммы 3.1, которое состоит, как уже было сказано, в основном в проверке выполнения предпосылок ($A1$)–($A3$), помещено нами в § 4.

3.4. Доказательство теоремы 2.1. Очевидно, что утверждения теоремы 2.1 будут вытекать из следующих двух неравенств: для любого $\Delta > 0$ в зоне $x \in [\sqrt{n}, O(\sqrt{n \ln n})]$

$$\mathbf{P}(S(n) \in \Delta[x)) \geq \frac{\Delta}{\sqrt{2\pi n}} e^{-\frac{x^2}{2n}}(1 + o(1)) + \Delta n \beta \frac{V(x)}{x}(1 + o(1)), \tag{3.7}$$

$$\mathbf{P}(S(n)\in\Delta[x))\le\frac{\Delta}{\sqrt{2\pi n}}e^{-\frac{x^2}{2n}}(1+o(1))+\Delta n\beta\frac{V(x)}{x}(1+o(1)). \qquad (3.8)$$

Докажем сначала эти неравенства для уклонений

$$x=s\sqrt{n\ln n},\quad s=s_n\to s_0\quad \text{при } n\to\infty, \qquad (3.9)$$

где s_0 — произвольное фиксированное положительное число. Начнем с первого.

При $y=\delta_+(2s_0)\sqrt{n\ln n}$ воспользуемся для произвольного T очевидным неравенством

$$\mathbf{P}(S(n)\in\Delta[x))\ge P_0+n\overline{P}_1, \qquad (3.10)$$

где вероятность P_0 определена после формул (3.1),

$$\overline{P}_1:=\mathbf{P}(S(n)\in\Delta[x),|S(n-1)|\le T\sqrt{n},\xi(n)\ge y,\max_{1\le i\le n-1}\xi(i)<y).$$

В силу леммы 3.1 для $x\sim s_0\sqrt{n\ln n}$

$$P_0\sim\frac{\Delta}{\sqrt{2\pi n}}e^{-\frac{x^2}{2n}}. \qquad (3.11)$$

Оценим $\overline{P}_1$. В силу выбора y для всех достаточно больших n выполняется $y\le x$ и, следовательно, для этих n

$$\{\xi(n)\in\Delta[x-S(n-1)),|S(n-1)|\le T\sqrt{n},\xi(n)\ge y\}$$
$$=\{\xi(n)\in\Delta[x-S(n-1)),|S(n-1)|\le T\sqrt{n}\}.$$

Поэтому

$$\overline{P}_1\sim\mathbf{P}(\xi(n)\in\Delta[x-S(n-1)),|S(n-1)|\le T\sqrt{n},\max_{1\le i\le n-1}\xi(i)<y).$$

Воспользуемся далее условием [D], в силу которого

$$\overline{P}_1\sim\Delta\beta\mathbf{E}\left(\frac{V(x-S(n-1))}{x-S(n-1)},|S(n-1)|\le T\sqrt{n},\max_{1\le i\le n-1}\xi(i)<y\right)$$
$$\sim\Delta\beta\frac{V(x)}{x}\mathbf{P}(|S(n-1)|\le T\sqrt{n},\max_{1\le i\le n-1}\xi(i)<y).$$

Поскольку (см. (3.3)) выполняется $V(y)=o\left(\frac{1}{n}\right)$, то

$$\mathbf{P}(\max_{1\le i\le n-1}\xi(i)<y)=(1-V(y))^{n-1}\to 1$$

при $n\to\infty$. Поэтому

$$\overline{P}_1\sim\Delta\beta\frac{V(x)}{x}\mathbf{P}(|S(n-1)|\le T\sqrt{n}). \qquad (3.12)$$

Из (3.10)–(3.12) в силу произвольности T получаем неравенство (3.7) для уклонений (3.9).

Докажем теперь для этих же уклонений (3.9) неравенство (3.8). Воспользуемся для уже выбранного $y=\delta\sqrt{n\ln n}$ оценкой

$$\mathbf{P}(S(n)\in\Delta[x))\le P_0+n\widetilde{P}_{\ge 1}, \qquad (3.13)$$

где вероятность P_0 определена после формул (3.1),

$$\widetilde{P}_{\ge 1}:=\mathbf{P}(S(n)\in\Delta[x),\xi(n)\ge\delta\sqrt{n\ln n}).$$

Асимптотика слагаемого P_0 уже найдена (см. (3.11)). Оценим сверху слагаемое P_1: для достаточно медленно убывающей последовательности $\nu_n \downarrow 0$ имеем

$$\widetilde{P}_{\geq 1} \leq P_{1,1} + P_{1,2},$$

где

$$P_{1,1} := \mathbf{P}(S(n-1) + \xi(n) \in \Delta[x), S(n-1) < \nu_n \sqrt{n \ln n}, \xi(n) \geq y),$$

$$P_{1,2} := \mathbf{P}(S(n-1) + \xi(n) \in \Delta[x), \nu_n \sqrt{n \ln n} \leq S(n-1) < \Delta + x - y, \xi(n) \geq y).$$

Тогда для

$$R(\Delta, t) := \mathbf{P}(\xi \in \Delta[t))$$

будет

$$P_{1,1} \leq \mathbf{E}(R(\Delta, x - S(n-1)); S(n-1) < \nu_n \sqrt{n \ln n})$$
$$\leq \sup_{t \geq x - \nu_n \sqrt{n \ln n}} R(\Delta, t) \mathbf{P}(S(n-1) < \nu_n \sqrt{n \ln n}).$$

В силу условия [D]

$$\sup_{t \geq x - \nu_n \sqrt{n \ln n}} R(\Delta, t) \sim R(\Delta, x) \sim \beta \Delta \frac{V(x)}{x},$$

поэтому

$$P_{1,1} \leq \beta \Delta \frac{V(x)}{x}(1 + o(1)).$$

Аналогично оценим

$$P_{1,2} \leq \mathbf{E}(R(\Delta, x - S(n-1)); \nu_n \sqrt{n \ln n} \leq S(n-1) < x + \Delta - y)$$
$$\leq \sup_{t \geq y - \Delta} R(\Delta, t) \mathbf{P}(\nu_n \sqrt{n \ln n} \leq S(n-1)) = O\left(\frac{V(x)}{x}\right) o(1) = o\left(\frac{V(x)}{x}\right).$$

Таким образом,

$$\widetilde{P}_{\geq 1} \leq P_{1,1} + P_{1,2} \leq \beta \Delta \frac{V(x)}{x}(1 + o(1)). \tag{3.14}$$

В силу (3.13), (3.11), (3.14) неравенство (3.8) установлено. Таким образом, неравенства (3.7), (3.8) для уклонений (3.9) обоснованы.

Докажем теперь, не привлекая условие [D], неравенства (3.7) и (3.8) для зоны

$$x \geq \sqrt{n}, \quad x \leq (1 - \nu)\sqrt{(\beta - 2) n \ln n}, \tag{3.15}$$

где $\nu > 0$ фиксировано. Эти неравенства для зоны (3.15) вырождаются в неравенства: для любого $\Delta > 0$

$$\mathbf{P}(S(n) \in \Delta[x)) \geq \frac{\Delta}{\sqrt{2\pi n}} e^{-\frac{x^2}{2n}}(1 + o(1)), \tag{3.16}$$

$$\mathbf{P}(S(n) \in \Delta[x)) \leq \frac{\Delta}{\sqrt{2\pi n}} e^{-\frac{x^2}{2n}}(1 + o(1)) \tag{3.17}$$

соответственно. Выберем $y = \delta_+(2s)\sqrt{n \ln n}$, $s = (1 - \nu)\sqrt{\beta - 2}$, и воспользуемся очевидными неравенствами (см. (3.13))

$$P_0 \leq \mathbf{P}(S(n) \in \Delta[x)) \leq P_0 + n \widetilde{P}_{\geq 1}. \tag{3.18}$$

В силу леммы 3.1 величина P_0 в зоне (3.11) удовлетворяет соотношению (3.16). Поэтому неравенства (3.16), (3.17) в зоне (3.15) следуют из (3.11) и соотношения

$$n\widetilde{P}_{\geq 1} = o(P_0) \tag{3.19}$$

в зоне (3.15). Докажем (3.19). В силу интегро-локальной теоремы Стоуна (см. [10])

$$n\sqrt{n}\widetilde{P}_{\geq 1} \leq n\sqrt{n}\sup_t \mathbf{P}(S(n-1)\in\Delta[t])\mathbf{P}(\xi\geq y)$$
$$= n\sqrt{n}O(1/\sqrt{n})O(V(\sqrt{n\ln n})) = O(nV(\sqrt{n\ln n})).$$

Поскольку в зоне (3.15)

$$\sqrt{n}P_0 \geq \frac{\Delta}{\sqrt{2\pi}}e^{-(1-\nu)^2\frac{\beta-2}{2}\ln n}(1+o(1)) = c\frac{1}{n^{(1-\nu)^2\frac{\beta-2}{2}}}(1+o(1)),$$

то (3.19) следует из того, что для любого $\alpha > 0$

$$nV(\sqrt{n\ln n}) = o(1/n^{(1-\alpha)\frac{\beta-2}{2}}), \quad n\to\infty.$$

Таким образом, неравенства (3.7), (3.8) в зоне $x\in[\sqrt{n}, O(\sqrt{n\ln n})]$ доказаны, при этом в зоне $x\in[\sqrt{n}, (1-\nu)\sqrt{(\beta-2)n\ln n}]$ без привлечения условия [D]. Теорема 2.1 доказана.

§ 4. Доказательство леммы 3.1

Прежде чем доказывать лемму 3.1, приведем несколько вспомогательных утверждений.

4.1. Теорема непрерывности для преобразования Лежандра. Пусть для любого $r\in[0,1]$ задана выпуклая вниз функция $A_{(r)}(\lambda)$; $\lambda\in[0,\infty)$, принимающая значения на множестве $(-\infty,\infty]$, зависящая от параметра r, конечная и дважды непрерывно дифференцируемая по λ из множества $\lambda\in[0,\varepsilon]$, где константа $\varepsilon\in(0,1]$ фиксирована. При этом $A_{(0)}(\lambda)=\lambda^2/2$. Пусть $A_{(r)}(0)=0$ при всех $r\in[0,1]$, а производная $A'_{(r)}(\lambda)$ функции $A_{(r)}(\lambda)$ по аргументу λ удовлетворяет соотношению $A'_{(r)}(0)\leq 0$ при всех $r\in[0,1]$. Обозначим при $\alpha\geq 0$, $r\in[0,1]$ через

$$\Lambda_{(r)}(\alpha) := \sup_{\lambda\geq 0}\{\lambda\alpha - A_{(r)}(\lambda)\} \tag{4.1}$$

преобразование Лежандра над функцией $A_{(r)}(\lambda)$. В частности, $\Lambda_{(0)}(\alpha)=\alpha^2/2$. Вторую производную функции $A_{(r)}(\lambda)$ по λ обозначим через $A''_{(r)}(\lambda)$. Пусть на отрезке $[0,1]$ задана вещественная непрерывная возрастающая функция $\psi(r)$, $\psi(0)=0$, и выберем $r_0\in(0,1]$ такое, что $\psi(r_0)\leq 1/2$. Ниже везде в настоящем разделе считаем, что $r\in(0,r_0]$.

Лемма 4.1. *Пусть для всех $r\in(0,\ r_0]$ выполнены неравенства*

$$\sup_{0\leq\lambda\leq r}|A'_{(r)}(\lambda)-\lambda| \leq r\psi(r), \tag{4.2}$$

$$\sup_{0\leq\lambda\leq r}|A''_{(r)}(\lambda)-1| \leq \psi(r). \tag{4.3}$$

Тогда уравнение

$$A'_{(r)}(\lambda) = \alpha \tag{4.4}$$

имеет единственное решение $\lambda_{(r)}(\alpha)$ *при* $\alpha \in \left[0, \frac{1}{2}r\right]$; *при этом для всех* $\alpha \in \left[0, \frac{1}{2}r\right]$

$$\Lambda_{(r)}(\alpha) = -A_{(r)}(\lambda_{(r)}(0)) + \int\limits_0^\alpha \lambda_{(r)}(t)\,dt, \tag{4.5}$$

$$\sup_{0\le\alpha\le\frac{1}{2}r} |\lambda_{(r)}(\alpha) - \alpha| \le 2r\psi(r), \tag{4.6}$$

$$\sup_{0\le\alpha\le\frac{1}{2}r} |\Lambda_{(r)}(\alpha) - \alpha^2/2| \le 4r^2\psi(r). \tag{4.7}$$

Доказательство. Везде в доказательстве будем считать, что $0 \le \lambda \le r \le r_0$. Тогда в силу (4.3)

$$A''_{(r)}(\lambda) \ge 1 - \psi(r) \ge 1 - 1/2 = 1/2.$$

Следовательно, функция $A'_{(r)}(\lambda)$ возрастает по λ на отрезке $[0, r]$, и для $\alpha \in [0, A'_{(r)}(r)]$ уравнение (4.4) имеет единственное решение $\lambda_{(r)}(\alpha)$. Далее, в силу (4.2)

$$A'_{(r)}(r) \ge r - r\psi(r) \ge r(1 - \psi(r)) \ge \frac{1}{2}r.$$

Поэтому при $r \in (0, r_0]$ выполняется $\left[0, \frac{1}{2}r\right] \subseteq [0, A'_{(r)}(r)]$ и, следовательно, для $\alpha \in [0, \frac{1}{2}r]$ уравнение (4.4) имеет единственное решение $\lambda_{(r)}(\alpha)$.

Единственное решение $\lambda_{(r)}(\alpha)$ уравнения (4.4) является единственной точкой, в которой достигается супремум функции $\lambda\alpha - A_{(r)}(\lambda)$ по множеству $\lambda \ge 0$ (см. (4.1)):

$$\Lambda_{(r)}(\alpha) = \lambda_{(r)}(\alpha)\alpha - A_{(r)}(\lambda_{(r)}(\alpha)), \quad \alpha \in [0, (1/2)r]. \tag{4.8}$$

Дифференцируя тождество (4.8) по α, получаем $\Lambda'_{(r)}(\alpha) = \lambda_{(r)}(\alpha)$, поэтому

$$\Lambda_{(r)}(\alpha) = \Lambda_{(r)}(0) + \int\limits_0^\alpha \lambda_{(r)}(t)\,dt, \quad \alpha \in [0, (1/2)r].$$

Поскольку $\Lambda_{(r)}(0) = -A_{(r)}(\lambda_{(r)}(0))$, тождество (4.5) установлено.

Пусть теперь $m := r\psi(r)$, $\alpha \in [0, \frac{1}{2}r]$. Тогда

$$\alpha + m \le r/2 + r\psi(r_0) \le r(1/2 + 1/2) \le r$$

и в силу (4.2)

$$A'_{(r)}(\alpha + m) \ge \alpha + m - r\psi(r) \ge \alpha.$$

Следовательно, при $\alpha \in \left[0, \frac{1}{2}r\right]$

$$\lambda_{(r)}(\alpha) \le \alpha + m. \tag{4.9}$$

Аналогично в силу (4.2) при $\alpha \ge m$

$$A'_{(r)}(\alpha - m) \le \alpha - m + r\psi(r) \le \alpha,$$

поэтому $\lambda_{(r)}(\alpha) \ge \alpha - m$,

$$\sup_{m\le\alpha\le\frac{1}{2}r} |\lambda_{(r)}(\alpha) - \alpha| \le m = r\psi(r). \tag{4.10}$$

В силу (4.9) для $\alpha \in [0,m]$ выполняется $\lambda_{(r)}(\alpha) \le 2m$, и ввиду $A'_{(r)}(0) \le 0$ будет $\lambda_{(r)}(\alpha) \ge 0$. Поэтому для $\alpha \in [0,m]$ справедливы неравенства

$$0 \le \lambda_{(r)}(\alpha) \le 2m, \quad -m \le -\alpha \le 0,$$

из которых вытекают неравенства

$$-m \le \lambda_{(r)}(\alpha) - \alpha \le 2m, \quad \sup_{0\le\alpha\le m} |\lambda_{(r)}(\alpha) - \alpha| \le 2m.$$

Последнее вместе с (4.10) доказывает (4.6).

В силу тождества (4.5)

$$\sup_{0\le\alpha\le\frac{1}{2}r} |\Lambda_{(r)}(\alpha) - \alpha^2/2| \le I_1 + I_2,$$

где

$$I_1 := \sup_{0\le\alpha\le\frac{1}{2}r} \int\limits_0^\alpha |\lambda_{(r)}(t) - t|\,dt, \quad I_2 := |A_{(r)}(\lambda_{(r)}(0))|.$$

Ввиду неравенства (4.6) для $\alpha \in \left[0, \frac{1}{2}\alpha\right]$

$$I_1 \le 2r\psi(r) \int\limits_0^\alpha dt \le 2r\psi(r)\alpha \le r^2\psi(r).$$

По формуле Тейлора для некоторого $\theta \in [0,1]$

$$I_2 \le |A_{(r)}(0)| + |\lambda_{(r)}(0)||A'_{(r)}(\theta r)| = |\lambda_{(r)}(0)||A'_{(r)}(\theta r)|.$$

Применяя (4.2) и (4.6), получаем

$$I_2 \le 2r\psi(r)(\theta r + r\psi(r)) \le 2r\psi(r)(r + (1/2)r) = 3r^2\psi(r).$$

Следовательно,

$$I_1 + I_1 \le (1+3)r^2\psi(r) = 4r^2\psi(r).$$

Неравенство (4.7) доказано. Лемма 4.1 доказана.

4.2. Равномерные интегро-локальные теоремы для сумм случайных величин в области нормальных уклонений. Пусть для каждого $n = 1, 2, \dots$ задана случайная величина $\xi_{(n)}$ с распределением $\mathbf{F}_{(n)}$ и характеристической функцией $\mathfrak{f}_{(n)}(t) = \mathbf{E}e^{it\xi_{(n)}}$, $t \in \mathbb{R}$. Будем предполагать, что при всех $n \ge 1$

$$\mathbf{E}\xi_{(n)} = 0, \quad \lim_{n\to\infty} \mathbf{E}\xi^2_{(n)} = 1. \tag{4.11}$$

Обозначим через

$$S(n) = \xi_{(n)}(1) + \dots + \xi_{(n)}(n)$$

сумму независимых случайных величин, распределенных как $\xi_{(n)}$.

Следующее условие для последовательности $\{\mathbf{F}_{(n)}\}$ является аналогом условия [R] (см. п. 1.1) для распределения $\mathbf{F}$ случайной величины ξ.

[R]. *Для любых $c > 0$, $N < \infty$*

$$\limsup_{n\to\infty} \sup_{c\le|t|\le N} |\mathfrak{f}_{(n)}(t)| < 1.$$

Будем говорить, что для распределения $\mathbf{F}$ случайной величины ξ *выполнено условие* $[\mathrm{Z}_h]$, если для некоторого вещественного c выполнено условие $[\mathrm{Z}_{h,c}]$ (см. п. 3.1). Следующее условие для последовательности $\{\mathbf{F}_{(n)}\}$ является аналогом условия $[\mathrm{Z}_h]$ для распределения $\mathbf{F}$ случайной величины ξ.

$[\mathrm{Z}_h]$. *Для любого $c>0$ при всех $n\ge 1$ выполнены соотношения*

$$|\mathfrak{f}_{(n)}(2h^{-1}\pi)| = 1, \quad \limsup_{n\to\infty} \sup_{c\le|t|\le h^{-1}\pi} |\mathfrak{f}_{(n)}(t)| < 1.$$

Введем в рассмотрение условие равномерной интегрируемости квадрата случайной величины $\xi_{(n)}$:

[I]. $\lim\limits_{T\to\infty}\sup\limits_{n\ge 1}\mathbf{E}(|\xi_{(n)}|^2; |\xi_{(n)}|\ge T) = 0.$

Сформулированная ниже теорема 4.1 является непосредственным следствием теорем 1 и 2 работы [11]. Эти теоремы обобщают соответствующие локальную и интегро-локальную теоремы из работ [17, 18] на схему серий.

Теорема 4.1. *Пусть последовательность распределений* $\{\mathbf{F}_{(n)}\}$ *удовлетворяет условиям* (4.11), [I] *и либо условию* [R], *либо условию* $[\mathrm{Z}_h]$. *Пусть $\Delta>0$ — любое фиксированное число, если выполнено условие* [R], *и $\Delta = h$, если выполнено условие* $[\mathrm{Z}_h]$. *Тогда при $n\to\infty$ имеет место соотношение*

$$\mathbf{P}(S(n)\in\Delta[x)) = \frac{\Delta}{n^{1/2}}[\phi(x/\sqrt{n}) + \varepsilon_n(x,\Delta)],$$

где

$$\phi(t) = \frac{1}{(2\pi)^{1/2}}e^{-|t|^2/2}, \quad \lim_{n\to\infty}\sup_{x\in\mathbb{R}}|\varepsilon_n(x,\Delta)| = 0.$$

4.3. Доказательство леммы 3.1. Обозначим $\alpha^+ := \frac{s_+\sqrt{\ln n}}{\sqrt{n}}$. Рассуждения, приведенные перед формулировкой леммы 3.1, дают основание утверждать: *если равномерно по $\alpha\in[0,\alpha^+]$ выполнены соотношения* $(A1)$–$(A3)$, *то соотношение* (3.6) *справедливо равномерно по $x\in[0, s_+\sqrt{n\ln n}]$*. Таким образом, осталось показать, что соотношения $(A1)$–$(A3)$ выполнены равномерно по $\alpha\in[0,\alpha^+]$.

Обозначим $\overline{\varphi}(\lambda) := \mathbf{E}(e^{\lambda\xi}; \xi<y)$, так что

$$A_y'(\lambda) = \frac{\overline{\varphi}'(\lambda)}{\overline{\varphi}(\lambda)}, \quad A''(\lambda) = \frac{\overline{\varphi}''(\lambda)}{\overline{\varphi}(\lambda)} - \left(\frac{\overline{\varphi}'(\lambda)}{\overline{\varphi}(\lambda)}\right)^2.$$

Докажем сначала справедливость предпосылок $(A1)$, $(A3)$. Для этого воспользуемся следующими соотношениями, которые будут доказаны несколько позже: *для некоторой непрерывно возрастающей, выходящей из нуля функции $\psi(t)$, $t\ge 0$, удовлетворяющей при $t\downarrow 0$ соотношению*

$$\psi(t) = o(1/|\ln t|), \tag{4.12}$$

имеют место при $r := 2\alpha^+$, $n\to\infty$ следующие соотношения:

$$\sup_{0\le\lambda\le r}|A_y'(\lambda)-\lambda| = O(r\psi(r)), \quad \sup_{0\le\lambda\le r}|A_y''(\lambda)-1| = O(\psi(r)). \tag{4.13}$$

Воспользуемся леммой 4.1, в силу которой из (4.13) вытекают соотношения

$$\sup_{0\le\alpha\le\frac{1}{2}r}|\lambda_y(\alpha)-\alpha| = O(r\psi(r)), \tag{4.14}$$

$$\sup_{0\le\alpha\le\frac{1}{2}r}|\Lambda_y(\alpha)-\alpha^2/2|=O(r^2\psi(r)). \tag{4.15}$$

Поскольку $(A1)$ следует из (4.14), а $(A3)$ — из (4.15) и (4.12), то выполнение предпосылок $(A1)$, $(A3)$ установлено.

Докажем теперь (4.13). Очевидно, что эти соотношения вытекают из следующих трех: при $n\to\infty$

$$\sup_{0\le\lambda\le r}|\overline{\varphi}(\lambda)-(1+\lambda^2/2)|=O(r^2\psi(r)), \tag{4.16}$$

$$\sup_{0\le\lambda\le r}|\overline{\varphi}'(\lambda)-\lambda|=O(r\psi(r)), \tag{4.17}$$

$$\sup_{0\le\lambda\le r}|\overline{\varphi}''(\lambda)-1|=O(\psi(r)). \tag{4.18}$$

Докажем теперь соотношения (4.16)–(4.18).

Поскольку при $n\to\infty$

$$r^2\psi(r)=o(1/n),\quad r\psi(r)=o(1/(\sqrt{n\ln n})),\quad \psi(r)=o(1/\ln n),$$

для доказательства (4.16)–(4.18) достаточно убедиться, что при $n\to\infty$

$$\sup_{0\le\lambda\le r}|\overline{\varphi}(\lambda)-(1+\lambda^2/2)|=o\big(g_n^{(0)}\big),\quad g_n^{(0)}:=1/n; \tag{4.19}$$

$$\sup_{0\le\lambda\le r}|\overline{\varphi}'(\lambda)-\lambda|=o\big(g_n^{(1)}\big),\quad g_n^{(1)}:=1/\sqrt{n\ln n}; \tag{4.20}$$

$$\sup_{0\le\lambda\le r}|\overline{\varphi}''(\lambda)-1|=o\big(g_n^{(2)}\big),\quad g_n^{(2)}:=1/\ln n. \tag{4.21}$$

Докажем (4.19)–(4.21). Для этого, обозначив $\overline{\varphi}(\lambda):=\overline{\varphi}^{(0)}(\lambda)$, $\overline{\varphi}'(\lambda):=\overline{\varphi}^{(1)}(\lambda)$, $\overline{\varphi}''(\lambda):=\overline{\varphi}^{(2)}(\lambda)$, воспользуемся следующим представлением:

$$\overline{\varphi}^{(j)}(\lambda)=\sum_{l=1}^{4}\overline{\varphi}_i^{(j)}(\lambda),\quad j=0,1,2, \tag{4.22}$$

где

$$\overline{\varphi}_1^{(j)}(\lambda):=\mathbf{E}(e^{\lambda\xi}\xi^j;\xi<-1/r),\quad \overline{\varphi}_2^{(j)}(\lambda):=\mathbf{E}(e^{\lambda\xi}\xi^j;-1/r\le\xi<0),$$

$$\overline{\varphi}_3^{(j)}(\lambda):=\mathbf{E}(e^{\lambda\xi}\xi^j;0\le\xi<1/(r\ln^2 n)),\quad \overline{\varphi}_4^{(j)}(\lambda):=\mathbf{E}(e^{\lambda\xi}\xi^j;1/(r\ln^2 n)\le\xi<y).$$

Оценим каждое слагаемое в правой части (4.22). Сначала, используя интегрирование по частям, получим следующее полезное для дальнейшего «грубое» неравенство:

$$\mathbf{E}\bigg(\xi^2;\xi\ge\frac{1}{r\ln^2 n}\bigg)=-\int\limits_{\frac{1}{r\ln^2 n}}^{\infty}t^2dV(t)=O\bigg(\frac{1}{n^{(\beta-2)/3}}\bigg). \tag{4.23}$$

В силу выбора $y=\delta\sqrt{n\ln n}$ имеем

$$\sup_{0\le\lambda\le r,\,\frac{1}{r\ln^2 n}\le\xi<y}e^{\lambda\xi}=e^{2s_+\delta_+(s_+)\ln n}=n^{\frac{\beta-2}{4}}.$$

Поэтому по (4.23) для $j=0,1,2$ и при $n\to\infty$

$$\overline{\varphi}_4^{(j)}(\lambda)\le n^{\frac{\beta-2}{4}}\mathbf{E}(\xi^j;\xi\ge1/(r\ln^2 n))$$
$$\le n^{\frac{\beta-2}{4}}(r\ln^2 n)^j\mathbf{E}(\xi^2;\xi\ge1/(r\ln^2 n))=n^{\frac{\beta-2}{4}}(r\ln^2 n)^jO(1/n^{(\beta-2)/3})=o\big(g_n^{(j)}\big).$$

Таким образом, для $j=0,1,2$ и при $n\to\infty$

$$\sup_{0\le\lambda\le r}\overline{\varphi}_4^{(j)}(\lambda)=o\big(g_n^{(j)}\big). \tag{4.24}$$

Заметим, что

$$\sup_{0\le\lambda\le r, 0\le\xi\le\frac{1}{r\ln^2 n}} e^{\lambda\xi}=1+o\big(g_n^{(2)}\big).$$

Поэтому

$$\begin{aligned}\overline{\varphi}_3^{(2)}(\lambda)&=\big(1+o\big(g_n^{(2)}\big)\big)\mathbf{E}(\xi^2;0\le\xi<1/r\ln^2 n)\\&=\big(1+o\big(g_n^{(2)}\big)\big)(\mathbf{E}(\xi^2;0\le\xi)-\mathbf{E}(\xi^2;1/(r\ln^2 n)\le\xi)),\end{aligned}$$

и в силу (4.23)

$$\sup_{0\le\lambda\le r}\big|\overline{\varphi}_3^{(2)}(\lambda)-\mathbf{E}(\xi^2;0\le\xi)\big|=o\big(g_n^{(2)}\big). \tag{4.25}$$

Ввиду формулы Тейлора равномерно по $\lambda\in[0,r]$

$$\begin{aligned}\overline{\varphi}_3^{(1)}(\lambda)&=\mathbf{E}(\xi;0\le\xi<1/(r\ln^2 n))+\lambda\mathbf{E}(\xi^2;0\le\xi<1/(r\ln^2 n))\\&\quad+O(r^2)\mathbf{E}(\xi^3;0\le\xi<1/(r\ln^2 n))=\mathbf{E}(\xi;0\le\xi)-\mathbf{E}(\xi;1/(r\ln^2 n)\le\xi)\\&\quad+\lambda(\mathbf{E}(\xi^2;0\le\xi)-\mathbf{E}(\xi^2;1/(r\ln^2 n)\le\xi))+O(r^2)\mathbf{E}(\xi^3;0\le\xi<1/(r\ln^2 n)).\end{aligned}$$

Поскольку согласно (4.23)

$$\begin{aligned}&\mathbf{E}(\xi;1/(r\ln^2 n)\le\xi)+r\mathbf{E}(\xi^2;1/(r\ln^2 n)\le\xi)+r^2\mathbf{E}(\xi^3;0\le\xi<1/(r\ln^2 n))\\&\qquad\le(r\ln^2 n+r+r^2 1/(r\ln^2 n))\mathbf{E}(\xi^2;1/(r\ln^2 n)\le\xi)=o\big(g_n^{(1)}\big),\end{aligned}$$

то

$$\sup_{0\le\lambda\le r}\big|\overline{\varphi}_3^{(1)}(\lambda)-\mathbf{E}(\xi;0\le\xi)-\lambda\mathbf{E}(\xi^2;0\le\xi)\big|=o\big(g_n^{(1)}\big). \tag{4.26}$$

Совершенно аналогично устанавливаем, что

$$\sup_{0\le\lambda\le r}\big|\overline{\varphi}_3^{(0)}(\lambda)-\mathbf{P}(\le\xi)-\lambda\mathbf{E}(\xi;0\le\xi)-(\lambda^2/2)\mathbf{E}(\xi^2;0\le\xi)\big|=o\big(g_n^{(1)}\big). \tag{4.27}$$

Для $\lambda\in[0,r]$

$$\overline{\varphi}_1^{(2)}(\lambda)+\overline{\varphi}_2^{(2)}(\lambda)\le\mathbf{E}(\xi^2;\xi>0),$$

$$\begin{aligned}\overline{\varphi}_1^{(2)}(\lambda)+\overline{\varphi}_2^{(2)}(\lambda)&\ge\mathbf{E}(e^{\lambda\xi}\xi^2;-1/(r\ln^2 n)\le\xi<0)\\&\ge e^{-\frac{1}{\ln^2 n}}\mathbf{E}(\xi^2;-1/(r\ln^2 n)\le\xi<0)\\&=\big(1-o\big(g_n^{(2)}\big)\big)(\mathbf{E}(\xi^2;\xi<0)-\mathbf{E}(\xi^2;\xi<-1/(r\ln^2 n))).\end{aligned}$$

Поскольку в силу условия (1.4)

$$|\mathbf{E}(\xi^2;\xi<-1/(r\ln^2 n))|=o\big(g_n^{(2)}\big),$$

при $n\to\infty$ имеем

$$\sup_{0\le\lambda\le r}\big|\overline{\varphi}_1^{(2)}(\lambda)+\overline{\varphi}_2^{(2)}(\lambda)-\mathbf{E}(\xi^2;\xi<0)\big|=o\big(g_n^{(2)}\big). \tag{4.28}$$

Ввиду условия (1.4) для любого $\lambda\ge0$ при $n\to\infty$

$$\big|\overline{\varphi}_1^{(1)}(\lambda)\big|\le\mathbf{E}(|\xi|;\xi<-1/r)\le r\mathbf{E}(\xi^2;\xi<-1/r)=o\big(g_n^{(1)}\big).$$

С помощью формулы Тейлора представим $\overline{\varphi}_2^{(1)}(\lambda)$ в виде

$$\begin{aligned}\overline{\varphi}_2^{(1)}(\lambda) &= \mathbf{E}(\xi; -1/r \le \xi < 0) + \lambda \mathbf{E}(\xi^2; -1/r \le \xi < 0) + \varepsilon \\ &= \mathbf{E}(\xi;\xi<0) - \mathbf{E}(\xi;\xi<-1/r) + \lambda(\mathbf{E}(\xi^2;\xi<0) - \mathbf{E}(\xi^2;\xi<-1/r)) + \varepsilon,\end{aligned}$$

где

$$|\varepsilon| \le \frac{r^2}{2}\mathbf{E}(\xi^3; -1/r \le \xi < 0) \le \varepsilon_1 + \varepsilon_2,$$

$$\varepsilon_1 = \frac{r^2}{2}\mathbf{E}(\xi^3; -1/r \le \xi < -n^{1/7}), \quad \varepsilon_2 = (r^2/2)\mathbf{E}(\xi^3; -n^{1/7} \le \xi < 0).$$

Очевидно, что в силу условия (1.4) при $n \to \infty$

$$\varepsilon_1 \le \frac{r}{2}\mathbf{E}(\xi^2; -1/r \le \xi < -n^{\frac{1}{7}}) = o\big(g_n^{(1)}\big), \quad \varepsilon_2 \le \frac{r^2}{2} n^{\frac{3}{7}} = o\big(g_n^{(1)}\big),$$

$$|\mathbf{E}(\xi;\xi<1/r)| \le r\mathbf{E}(\xi^2;\xi<1/r) = o\big(g_n^{(1)}\big), \quad r\mathbf{E}(\xi^2;\xi<-1/r) = o\big(g_n^{(1)}\big).$$

Поэтому при $n \to \infty$

$$\sup_{0\le\lambda\le r}\big|\overline{\varphi}_1^{(1)}(\lambda) + \overline{\varphi}_2^{(1)}(\lambda) - \mathbf{E}(\xi;\xi<0) - \lambda\mathbf{E}(\xi^2;\xi<0)\big| = o\big(g_n^{(1)}\big). \tag{4.29}$$

Совершенно аналогично устанавливается неравенство

$$\sup_{0\le\lambda\le r}\big|\overline{\varphi}_1^{(0)}(\lambda) + \overline{\varphi}_2^{(0)}(\lambda) - \mathbf{P}(\xi<0) - \lambda\mathbf{E}(\xi;\xi<0) - \lambda^2/2\mathbf{E}(\xi^2;\xi<0)\big| = o\big(g_n^{(0)}\big). \tag{4.30}$$

Применяя неравенства (4.24)–(4.30) к представлению (4.22), получаем доказательство соотношений (4.19)–(4.21).

Установим теперь выполнение предпосылки $(A2)$. Для этого в силу теоремы 4.1 достаточно убедиться, что для последовательности случайных величин $\{\xi^{(\alpha,y)}\}$, где $\alpha = \alpha(n) \in \big[0, \frac{1}{2}r\big]$, выполнены условия [I], [R].

Проверим выполнения условия [I]. В силу соотношений (4.14) и (4.16) представляется очевидным, что для этого достаточно убедиться в справедливости

$$\lim_{T\to\infty}\sup_{0\le\lambda\le r}\mathbf{E}(e^{\lambda\xi}\xi^2; T \le \xi < y) = 0, \tag{4.31}$$

$$\lim_{T\to\infty}\sup_{0\le\lambda\le r}\mathbf{E}(e^{\lambda\xi}\xi; T \le \xi < y) = 0. \tag{4.32}$$

Поскольку (4.32) следует из (4.31), достаточно проверить (4.31). Используя рассуждения, которые применялись при изучении функции $\overline{\varphi}''(\lambda)$, получаем, что для этого достаточно доказать соотношение

$$\lim_{T\to\infty}\sup_{0\le\lambda\le r}\mathbf{E}(e^{\lambda\xi}\xi^2; T \le \xi < 1/(r\ln^2 n)) = 0,$$

которое в силу того, что

$$\sup_{0\le\lambda\le r}\mathbf{E}(e^{\lambda\xi}\xi^2; T \le \xi < 1/(r\ln^2 n)) \le \mathbf{E}(\xi^2; T \le \xi)(1 + o(1)),$$

очевидным образом выполняется. Условие [I] установлено.

Проверим теперь условие [R] для последовательности $\{\mathbf{F}_{(n)}\}$, где $\mathbf{F}_{(n)}$ — распределение $\xi^{(\alpha,y)}$. Для этого воспользуемся следующим *неравенством для модуля характеристической функции случайной величины, подвергнутой преобразованию Крамера.*

Лемма 4.2 (неравенство Юринского [16, с. 56]). *Пусть Y, Z — две случайные величины, заданные на одном вероятностном пространстве. Пусть $\mathbf{E}e^Z < \infty$. Тогда для $t \in \mathbb{R}$, $p \in (0,1)$, $q = 1-p$, $h = h_p := p(1+\mathbf{E}e^{pZ})\mathbf{E}(e^{pZ}+1)|Z|$ имеет место неравенство*

$$\left(1 - \left|\frac{\mathbf{E}e^{itY+Z}}{\mathbf{E}e^Z}\right|^2\right)^q \geq \frac{1 - |\mathbf{E}e^{itY}| - 2h}{2^p(\mathbf{E}e^Z)^{2q}}. \tag{4.33}$$

Пусть распределение случайного вектора (Y,Z) задается соотношением

$$\mathbf{P}(Y \in U, Z \in V) := \mathbf{P}(\xi^{(y)} \in U, \lambda_y(\alpha)\xi^{(y)} \in V),$$

где $0 \leq \alpha \leq \frac{1}{2}r$. Тогда неравенство (4.33) будет иметь вид

$$(1 - |\mathbf{E}e^{it\xi^{(y,\alpha)}}|^2)^q \geq \frac{1 - |\mathbf{E}e^{it\xi^{(y)}}| - 2h}{2^p(\mathbf{E}e^{\lambda_y(\alpha)\xi^{(y)}})^{2q}}.$$

Из того, что ξ удовлетворяет условию [R], вытекает: для любых $c > 0$, $N < \infty$ найдется $\varepsilon > 0$ такое, что для всех достаточно больших n

$$\sup_{c \leq |t| \leq N} |\mathbf{E}e^{it\xi^{(y)}}| \leq 1 - \varepsilon < 1.$$

Выбирая $p > 0$ достаточно малым, добиваемся того, что

$$2h = 2p(1 + \mathbf{E}e^{p\lambda_y(\alpha)\xi^{(y)}})\mathbf{E}(e^{p\lambda_y(\alpha)\xi^{(y)}} + 1)|\lambda_y(\alpha)\xi^{(y)}|$$

будет не больше, чем $\varepsilon/2$. В силу (4.14) и (4.16) для всех $\alpha \in (0, \alpha^+)$ выполняется $\mathbf{E}e^{\lambda_y(\alpha)\xi^{(y)}} \to 1$ при $n \to \infty$. Поэтому для некоторого $\nu > 0$ и всех достаточно больших n

$$\inf_{0 \leq \alpha \leq \alpha^+} \inf_{c \leq |t| \leq N} (1 - |\mathbf{E}e^{it\xi^{(y,\alpha)}}|^2)^q \geq \nu, \quad \sup_{0 \leq \alpha \leq \alpha^+} \sup_{c \leq |t| \leq N} |\mathbf{E}e^{it\xi^{(y,\alpha)}}| \leq \nu.$$

Условие [R] для последовательности $\{\mathbf{F}_{(n)}\}$, а вместе с ним и выполнение условий теоремы 4.1 и предпосылки $(A2)$ установлены.

Автор благодарен А. А. Боровкову, внимание которого в значительной мере стимулировало работу над настоящей статьей.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Боровков А. А., Боровков К. А.* Асимптотический анализ случайных блужданий. Ч. I. Медленно убывающие распределения скачков. М.: Наука. (В печати).
2. *Bingham N. H., Goldie C. M., Teugels J. L.* Regular Variation. Cambridge: Cambrige Univ. Press, 1987.
3. *Боровков А. А., Могульский А. А.* Интегро-локальные предельные теоремы для сумм случайных векторов, включающие большие уклонения. I // Теория вероятностей и ее применения. 1998. Т. 43, № 1. С. 3–17.
4. *Розовский Л. В.* Вероятности больших уклонений сумм независимых случайных величин с общей функцией распределения из области притяжения нормального закона // Теория вероятностей и ее применения. 1989. Т. 34, № 4. С. 686–705.
5. *Nagaev S. V.* Large deviations for sums of independent random variables // Ann. Probab. 1979. V. 7, N 5. P. 745–789.
6. *Нагаев А. В.* Предельные теоремы с учетом больших уклонений при нарушении условия Крамера // Изв. АН УзССР. Сер. физ.-мат. наук. 1969. Т. 6. С. 17–22.
7. *Mikosh T, Nagaev A. V.* Large deviations of heavy-tailed sums with applications in insurance // Extremes. 1998. V. 1. P. 81–110.

8. *Пинелис И. Ф.* Одна задача о больших уклонениях в пространстве траекторий // Теория вероятностей и ее применения. 1981. Т. 26, № 1. С. 73–87.

9. *Stone C.* On local and ratio limit theorems // Proc. Fifth Berkeley symposium on mathematical statistics and probability. Berkeley; Los Angeles: Univ. of California Press, 1966. V. II. P. 217–224.

10. *Stone C.* A local limit theorem for nonlattice multi-dimensional distribution functions // Ann. Math. Statist. 1965. V. 36. P. 546–551.

11. *Боровков А. А., Могульский А. А.* Интегро-локальные теоремы для сумм независимых случайных векторов в схеме серий // Мат. заметки. 2006. Т. 79, № 4. С. 468–482.

12. *Боровков А. А., Могульский А. А.* Предельные теоремы для сумм случайных величин с семиэкспоненциальными распределениями действующие на всей оси // Сиб. мат. журн. 2006. Т. 47, № 6. С. 1219–1257.

13. *Боровков А. А.* Вероятности больших уклонений для для случайных блужданий с семиэкспоненциальными распределениями // Сиб. мат. журн. 2000. Т. 41, № 6. С. 1290–1324.

14. *Боровков А. А.* О субэкспоненциальных распределениях и асимптотике распределения максимума последовательных сумм // Сиб. мат. журн. 2002. V. 43, N 6. P. 1253–1364.

15. *Боровков А. А., Могульский А. А.* О больших и сверхбольших уклонениях сумм независимых случайных векторов при выполнении условия Крамера. I // Теория вероятностей и ее применения. 2006. Т. 51, № 2. С. 260–294.

16. *Боровков А. А., Могульский А. А.* О больших и сверхбольших уклонениях сумм независимых случайных векторов при выполнении условия Крамера. II // Теория вероятностей и ее применения. 2006. Т. 51, № 4. С. 641–673.

17. *Гнеденко Б. В.* О локальной предельной теореме теории вероятностей // Успехи мат. наук. 1948. Т. 3, № 3. С. 187–194.

18. *Shepp L. A.* A local limit theorem // Ann. Math. Statist. 1964. V. 35. P. 419–423.

19. *Боровков А. А., Могульский А. А.* Большие уклонения и проверка статистических гипотез. Новосибирск: Наука, 1992.

Статья поступила 16 января 2007 г., окончательный вариант — 14 мая 2007 г.

Могульский Анатолий Альфредович
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090
`mogul@math.nsc.ru`