Сибирский математический журнал
Июль—август, 2008. Том 49, № 4

УДК 517.968

НЕОБХОДИМЫЕ И ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ КОРРЕКТНОСТИ УРАВНЕНИЯ 2–ГО РОДА В СВЕРТКАХ НА ОТРЕЗКЕ С ЧЕТНЫМ ЯДРОМ

А. Ф. Воронин

Аннотация. Получены необходимые и достаточные условия корректности уравнения 2-го рода в свертках на конечном интервале с четным ядром. Для установления найденных условий корректности достаточно вычислить одномерный определенный интеграл (от известной функции) с точностью $< 0,5$. В качестве промежуточного результата получено усиление альтернативы Фредгольма для рассматриваемого уравнения с произвольным ядром из L_1.

Ключевые слова: интегральное уравнение, свертка, отрезок, корректность, альтернатива Фредгольма, задача Римана.

Введение. В работе продолжено исследование уравнения 2-го рода в свертках на конечном интервале $(0, b)$ [1]:

$$u(t) - \int\limits_0^b k(t-s)u(s)\,ds = f(t), \quad t \in (0,b), \tag{0.1}$$

где

$$k \in L_1(-b,b), \quad f \in L_1(0,b), \quad b > 0, \tag{0.2}$$

при дополнительных условиях

$$k(t) = k(-t), \quad t \in (-b,b), \quad \Lambda^+(x) := 1 - \int\limits_0^b e^{ixt}k(t)\,dt \neq 0,\ x \in R. \tag{0.3}$$

Пусть

$$\kappa := 2\,\mathrm{Ind}\,\Lambda^+(x) \equiv \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} (\Lambda^+(x))' \frac{d\,x}{\Lambda^+(x)}$$

— индекс уравнения (0.1), где $(\Lambda^+(x))' = \frac{\partial}{\partial x}\Lambda^+(x)$. Согласно принципу аргумента $\kappa = 2n \geq 0$, где n — общее число нулей в полуплоскости $\mathrm{Im}\,p > 0$ регулярной в этой полуплоскости функции $\Lambda^+(p)$. При этом все n нулей лежат в некоторой полуокрестности точки $p = 0$ (утверждение 1.1 в [1]).

Целью работы является доказательство следующей теоремы.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 06–01–00422), Совета по грантам Президента РФ и государственной поддержке ведущих научных школ (код проекта НШ–1440.2008.1) и Междисциплинарных интеграционных проектов СО РАН № 3, № 48.

Теорема 1. *Пусть выполнены условия* (0.2), (0.3). *Тогда если* $\kappa = 0$, *то уравнение* (0.1) *безусловно разрешимо в классе* $L_1(0, b)$. *При этом решение устойчиво по правой части* f, *по ядру* k *и по параметру* b (*в норме* L_1).

В противном случае ($\kappa > 0$) *однородное уравнение* (0.1) *имеет нетривиальное решение в* $L_1(0, b)$. *Размерность пространства решений однородного уравнения не превосходит* κ.

Отметим, что неравенство в (0.3) и условие $\kappa = 0$ заведомо выполнены, если

$$\int\limits_0^b |k(s)|\, ds < 1,$$

что следует из неравенства треугольника для функции $\Lambda^+(p)$,

$$|\Lambda^+(x + iy)| \geq 1 - \int\limits_0^b e^{-ys}|k(s)|\, ds, \quad y \geq 0.$$

Для уравнения (0.1) при условии (0.2) известны лишь достаточные условия разрешимости, вытекающие из теоремы Банаха об обратном операторе [2, с. 206, 207]:

$$\int\limits_0^b |k(s)|\, ds < 1/2.$$

В работах автора [1, 3] декларированы достаточные условия разрешимости рассматриваемого уравнения, которые совпадают с условиями разрешимости настоящей теоремы.

Как следствие теоремы 1 в данной работе получены необходимые и достаточные условия корректности для следующего уравнения второго рода:

$$u_0(t) - \int\limits_0^{b/2} (k(t - s) + k(t + s))u_0(s)\, ds = f_0(t), \quad t \in (0, b/2), \tag{0.4}$$

где

$$k \in L_1(-b/2, b), \quad k(-t) = k(t),\ t \in (-b/2, b/2), \quad f_0 \in L_1(0, b/2). \tag{0.5}$$

В отличие от уравнения (0.1) уравнение (0.4) при условии (0.5) не имеет столь широкого применения. Отметим лишь теорию переноса частиц, где уравнение (0.4) (при условии (0.5)) моделирует, в частности, перенос тепловых нейтронов в однородном сферическом слое толщины $b/2$ [4, с. 39].

Прежде чем формулировать теорему 2, доопределим ядро уравнения (0.4) в интервале $(-b, -b/2)$ по четности,

$$k(-t) = k(t), \quad t \in (b/2, b). \tag{0.6}$$

Тогда из теоремы 1 вытекает

Теорема 2. *Пусть выполнены условия* (0.5), (0.6) *и справедливо неравенство в* (0.3). *Тогда если* $\kappa = 0$, *то уравнение* (0.4) *безусловно разрешимо в классе* $L_1(0, b/2)$. *При этом решение устойчиво по правой части* f_0, *по ядру* k *и по параметру* b (*в норме* L_1).

В противном случае ($\kappa > 0$) *однородное уравнение* (0.4) *имеет нетривиальное решение в* $L_1(0, b/2)$. *Размерность пространства решений однородного уравнения не превосходит* κ.

Отметим, что эквивалентность уравнений (0.1) и (0.4) с ядром интегрального уравнения переноса частиц установлена, например, в [4, с. 39]. В общем случае (для произвольного четного $k \in L_1(-b, b)$) доказательство эквивалентности аналогичное.

Кроме того, в работе в качестве промежуточного результата получено усиление альтернативы Фредгольма для уравнения (0.1) (лемма 3), имеющее самостоятельное значение. Для выполнения леммы 3 достаточно лишь условия (0.2).

1. Предварительные результаты работы. Интегральный оператор в уравнении (0.1) ограничен из $L_1(0, b)$ в $L_1(0, b)$. Это следует из неравенства

$$\int\limits_0^b \int\limits_0^b |k(t-s)u(s)|\,dsdt \le \int\limits_{-b}^b |k(t)|\,dt \int\limits_0^b |u(s)|\,ds,$$

перемена порядка интегрирования в левой части неравенства законна в силу леммы Фубини. Более того, данный интегральный оператор компактен [5, с. 71, 72] (доказательство компактности интегрального оператора [5, с. 71, 72] проходит и в общем случае — без условия четности ядра k). Следовательно, для уравнения (0.1) справедлива альтернатива Фредгольма [2, с. 506, 516].

Пусть $L_\pm := \{f_\pm \in L_1(R) : f_\pm(t) = 0,\ \mp t > 0\}$ — пространство односторонних функций, $\mathscr{R}_0^\pm := \{\mathscr{F} f(p) : f \in L_\pm\}$ — класс образов Фурье функций из $L_\pm$ соответственно, $\mathscr{R}_0 := \mathscr{R}_0^+ \oplus \mathscr{R}_0^-$, где $\oplus$ — прямая сумма. Обозначим через $\mathscr{R}$, $\mathscr{R}^\pm$ классы функций, полученные расширением на одно измерение классов $\mathscr{R}_0$, $\mathscr{R}_0^\pm$ соответственно путем присоединения к ним постоянных. Тогда элементы из классов $\mathscr{R}^\pm$ имеют следующий общий вид:

$$\mathscr{G}^\pm(p) = C^\pm + \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{ipt} g_\pm(t)\,dt \equiv C^\pm + \mathscr{F} g_\pm(p), \quad p \in R,$$

где $C^\pm = \mathrm{const}$, $g_\pm \in L_\pm$, $\mathscr{F}$ — преобразование Фурье.

Очевидно, что $\mathscr{G}^\pm(-x) \in \mathscr{R}^\mp$, $\mathscr{R}_0 \subset \mathscr{R}$; $\mathscr{G}^\pm(\infty) = \mathscr{G}^\pm(-\infty) = C^\pm$.

Через P_0^+ и P_0^- обозначим дополнительные друг другу проекторы:

$$P_0^\pm : \mathscr{R}_0 \to \mathscr{R}_0^\pm, \quad P_0^\pm \mathscr{G}_0(p) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{ipt} g_\pm^0(t)\,dt,\ p \in R,$$

где $\mathscr{G}_0 \in \mathscr{R}_0$, $\mathscr{F}^{-1}\mathscr{G}_0(t) = g_+^0(t) + g_-^0(t)$, $g_\pm^0 \in L_\pm$. Отметим следующие свойства линейных операторов $P_0^\pm$: $P_0^+ + P_0^- = I$, где I — единичный оператор, $\mathscr{F}^{-1}\big\{P_0^\pm \mathscr{G}(p)\big\}(t) = g_\pm^0(t) \in L_\pm$, где $\mathscr{F}^{-1}$ — обратное преобразование Фурье.

Утверждение 1. *Пусть* $\mathscr{G} \in \mathscr{R}$, $\mathscr{G}_0 \in \mathscr{R}_0$. *Тогда*

$$|\mathscr{G}_0(p)\mathscr{G}(p)| \le \|g^0\|_1(|C| + \|g\|_1) \equiv \|\mathscr{G}_0\|\,\|\mathscr{G}\|,$$

$$\big|P_0^\pm\{\mathscr{G}_0(p)\mathscr{G}(p)\}\big| \le \|\mathscr{G}_0\|\,\|\mathscr{G}\|,\ |\mathscr{G}| \le \|\mathscr{G}\|,$$

где $\mathscr{G}_0(p) = \mathscr{F}g^0(p)$, $\mathscr{G}(p) = C + \mathscr{F}g(p)$, $\|\cdot\|_1$ — *норма в* L_1, $\|\cdot\|$ — *индуцированная норма в* $\mathscr{R}$ [6, с. 47].

В самом деле, $\mathscr{G}_0(p)\mathscr{G}(p) = \mathscr{F}\{Cg^0(t) + g^0 * g(t)\}(p)$, где

$$g^0 * g(t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} g^0(s)g(t-s)\,ds,$$

причем в силу леммы Фубини $\|g^0 * g\|_1 \le \|g^0\|_1\|g\|_1$. Тогда

$$|\mathscr{G}_0(p)\mathscr{G}(p)| \le \int\limits_{-\infty}^{\infty} |Cg^0(t) + g^0 * g(t)|\,dt \le \|g^0\|_1(|C| + \|g\|_1).$$

Второе неравенство утверждения доказывается аналогично. Имеем

$$\left|P_0^{\pm}\{\mathscr{G}_0(p)\mathscr{G}(p)\}\right| = |\mathscr{F}\{\theta(\pm t)(Cg^0(t) + g^0 * g(t))\}(p)| \le |C|\,\|g^0\|_1 + \|g^0\|_1\|g\|_1,$$

где θ — функция Хевисайда. Последнее неравенство в утверждении очевидно.

Пусть

$$k(t) := 0,\ t \notin (-b,b), \quad f(t) := 0,\ t \notin (0,b), \quad k_{\pm}(t) := \theta(\pm t)k(t),\ t \in R,$$

$$\Lambda^{\pm}(p) := 1 - \mathscr{F}k_{\pm}(p), \quad \mathscr{F}\tilde{k}_{\pm}(p) = e^{\pm ipb}\mathscr{F}k_{\mp}(p),$$

$$G(p) := -\frac{1}{\Lambda^-(p)}\begin{pmatrix} 1 & -\mathscr{F}\tilde{k}_+(p) \\ \mathscr{F}\tilde{k}_-(p) & 1 - \mathscr{F}k(p) \end{pmatrix}$$

— матрица-функция размера 2×2 с элементами из $\mathscr{R}$.

Отметим, что исследования в [1] остановились на проблеме нахождения частных индексов матрицы $G(p)$. Здесь эту проблему решает

Лемма 1. *Пусть* $k \in L_1(-b,b)$ *и выполнено условие* (0.3). *Тогда все частные индексы матрицы* $G(x)$ *равны* $\kappa/2$. *Другими словами, матрица* $G(x)$ *допускает следующую факторизацию:*

$$G(x) = \left(\frac{x-i}{x+i}\right)^{\kappa/2} G^+(x)G^-(x), \quad x \in R, \tag{1.1}$$

где $G^{\pm}, (G^{\pm})^{-1} \in \mathscr{R}^{\pm}_{2\times 2}$, ($G^{\pm}, (G^{\pm})^{-1}$ — *матрицы размера* 2×2 *с элементами из* $\mathscr{R}^{\pm}$ *соответственно,* $(G^{\pm})^{-1}$ — *обратные матрицы*). *При этом* $G^{\pm}(\infty) = \pm E$, *где* E — *единичная матрица.*

Доказательство леммы 1 проведем методом от противного. По теореме 7.3 из [6, с. 35] матрица $G(x)$ допускает стандартную факторизацию

$$G(x) = G^+(x)D(x)G^-(x), \quad x \in R, \tag{1.2}$$

где

$$G^{\pm},\ (G^{\pm})^{-1} \in \mathscr{R}^{\pm}_{2\times 2}, \quad D(x) = \left\{\left(\frac{x-i}{x+i}\right)^{\kappa_1}, \left(\frac{x-i}{x+i}\right)^{\kappa_2}\right\},$$

$D(x)$ — диагональная матрица размера 2×2, κ_1, κ_2 — частные индексы такие, что $\kappa_1 \ge \kappa_2$, $\kappa_1 + \kappa_2 = \kappa$.

Предположим противное: $\kappa_1 > \kappa_2$.

Докажем вспомогательное утверждение и проведем некоторые дополнительные построения.

Утверждение 2. *Имеют место равенства*

$$\mathscr{F}k_{\mp}(-p) = \mathscr{F}k_{\pm}(p), \quad \mathscr{F}\tilde{k}_{\pm}(-p) = \mathscr{F}\tilde{k}_{\mp}(p), \quad \Lambda^{\pm}(-p) = \Lambda^{\mp}(p).$$

Справедливость утверждения получаем из следующих очевидных равенств:

$$\mathscr{F}k_{+}(-p) = \int\limits_{-b}^{0} e^{ipt}k(-t)\,dt = \mathscr{F}k_{-}(p), \quad \mathscr{F}\tilde{k}_{-}(-p) = e^{ipb}\mathscr{F}k_{+}(-p) = \mathscr{F}\tilde{k}_{+}(p).$$

Из утверждения 2 непосредственно вытекает, что

$$G(-p) = -\frac{1}{\Lambda^{+}(p)}\begin{pmatrix} 1 & -\mathscr{F}\tilde{k}_{-}(p) \\ \mathscr{F}\tilde{k}_{+}(p) & 1-\mathscr{F}k(p) \end{pmatrix}. \tag{1.3}$$

Для произвольной матрицы $B = \|b_{lj}\|$ размера 2×2 определим операцию типа транспонирования $\mathscr{T}$ таким образом: $B^{\mathscr{T}} = \left\|b^{0}_{lj}\right\|$, где $b^0_{ll} = b_{ll}$, $l = 1,2$, $b^0_{lj} = -b_{jl}$, $l\neq j$, $l,j = 1,2$. Операция $\mathscr{T}$ обладает следующими свойствами:

1) $(BC)^{\mathscr{T}} = C^{\mathscr{T}}B^{\mathscr{T}}$, где B, C — произвольные матрицы размера 2×2,
2) $(B^{-1})^{\mathscr{T}} = (B^{\mathscr{T}})^{-1}$, где $\det B \neq 0$.

В самом деле, свойство 2 следует из равенств

$$B^{-1} = \frac{1}{\det B}\begin{pmatrix} b_{22} & -b_{12} \\ -b_{21} & b_{11} \end{pmatrix}, \quad (B^{\mathscr{T}})^{-1} = \frac{1}{\det B}\begin{pmatrix} b_{22} & b_{21} \\ b_{12} & b_{11} \end{pmatrix}.$$

Свойство 1 проверяется непосредственно, если заметить, что

$$B^{\mathscr{T}} = (E_0BE_0)^T, \quad E_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

где T — обычное транспонирование.

Применим теперь операцию $\mathscr{T}$ к равенствам (1.2) и (1.3) соответственно:

$$G^{\mathscr{T}}(p) = (G^{-}(p))^{\mathscr{T}}D(p)(G^{+}(p))^{\mathscr{T}}, \tag{1.4}$$

$$G^{\mathscr{T}}(-p) = -\frac{1}{\Lambda^{+}(p)}\begin{pmatrix} 1 & -\mathscr{F}\tilde{k}_{+}(p) \\ \mathscr{F}\tilde{k}_{-}(p) & 1-\mathscr{F}k(p) \end{pmatrix} = \frac{\Lambda^{-}(p)}{\Lambda^{+}(p)}G(p). \tag{1.5}$$

Из (1.5) при $p = -p$ и последнего равенства в утверждении 2 имеем

$$G^{\mathscr{T}}(p) = \frac{\Lambda^{+}(p)}{\Lambda^{-}(p)}G(-p).$$

Из полученного равенства и факторизации (1.2) следует, что

$$G^{\mathscr{T}}(p) = \frac{\Lambda^{+}(p)}{\Lambda^{-}(p)}G^{+}(-p)D(-p)G^{-}(-p). \tag{1.6}$$

Подействуем операцией $\mathscr{T}$ на обе части равенства (1.6). С учетом свойств этой операции и равенства (1.2) получим

$$G^{+}(p)D(p)G^{-}(p) = \frac{\Lambda^{+}(p)}{\Lambda^{-}(p)}(G^{-}(-p))^{\mathscr{T}}D(-p)(G^{+}(-p))^{\mathscr{T}}. \tag{1.7}$$

Преобразуем правую часть равенства (1.7) так, чтобы она имела вид стандартной факторизации. Начнем с преобразования $D(-p)$. Очевидно, что

$$\left(\frac{p-i}{p+i}\right)^{\kappa} D(-p) = E_1\,D(p)\,E_1,$$

где

$$E_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad D(-p) = \left\{ \left(\frac{p-i}{p+i} \right)^{-\kappa_1}, \left(\frac{p-i}{p+i} \right)^{-\kappa_2} \right\}.$$

Тогда из (1.7) с учетом следующей формулы факторизации функции Λ^+/Λ^- на R [7, с. 32]:

$$\frac{\Lambda^+(p)}{\Lambda^-(p)} = \left(\frac{p-i}{p+i} \right)^{\kappa} \Lambda_0^+(p)/\Lambda_0^-(p),$$

где $\Lambda_0^\pm$, $1/\Lambda_0^\pm \in \mathscr{R}^\pm$, имеем

$$G(p) = G^+(p)D(p)G^-(p) = \frac{\Lambda_0^+(p)}{\Lambda_0^-(p)} (G^-(-p))^{\mathscr{T}} E_1 D(p) E_1 (G^+(-p))^{\mathscr{T}}. \qquad (1.8)$$

Левая и правая части равенства (1.8) представляют собой две различные стандартные факторизации матрицы G. Из (1.8) вытекает, что

$$G^-(p) = \frac{1}{\Lambda_0^-(p)} E_1 (G^+(-p))^{\mathscr{T}}, \quad p \in R. \qquad (1.9)$$

Из (1.8), (1.9) получим $G(p) = \Lambda_0^+(p)(G^-(-p))^{\mathscr{T}} E_1 D(p) G^-(p)$. В вышестоящем разложении матрица-функция G^- определена с точностью до левого множителя $A_- \in \mathscr{R}^-_{2\times 2}$,

$$A_-(p) = \begin{pmatrix} c_1 & Q^-(p) \\ 0 & 1/c_1 \end{pmatrix},$$

где $Q^-(p) = c_2 \left(\frac{p-i}{p+i}\right)^{-m}$, c_1, c_2 — произвольные постоянные ($|c_1| \neq 0$), $m = (\kappa_1 - \kappa_2)/2$ (m — целое положительное число, так как $\kappa_1 > \kappa_2$ и $\kappa_1 + \kappa_2$ четное) ввиду того, что $A_-^{\mathscr{T}}(-p) E_1 D(p) A_-(p) = E_1 D(p)$. Последнее равенство устанавливается непосредственно.

Из (1.9) при $p = \infty$ имеем

$$E_1 = -G^-(\infty) \quad ((G^-(\infty))^{\mathscr{T}} := (a_{lj})) \qquad (1.10)$$

в силу того, что

$$-E = G(\infty) = G^+(\infty)G^-(\infty), \quad G^+(-\infty) = G^+(\infty), \quad E_1^{-1} = E_1, \quad \Lambda_0^-(\infty) = 1.$$

Из (1.10) непосредственно получим

$$0 = a_{11} = g_{12}^2 - g_{11}^2, \quad 0 = a_{22} = g_{21}^2 - g_{22}^2, \quad 1 = a_{12} = g_{11}g_{21} - g_{12}g_{22}, \qquad (1.11)$$

где g_{lj} $(l, j = 1, 2)$ — элементы матрицы $G^-(\infty)$. Очевидно, что равенство (1.10) будет выполняться, если в нем заменить $G^-(\infty)$ на

$$\widetilde{G}^-(\infty) := A_-(\infty) G^-(\infty). \qquad (1.12)$$

Тогда из первого равенства в (1.11) следует, что

$$0 = \tilde{g}_{12}^2 - \tilde{g}_{11}^2, \qquad (1.13)$$

где $\tilde{g}_{lj}$ $(l, j = 1, 2)$ — элементы матрицы $\widetilde{G}^-(\infty)$. Из (1.12), (1.13) имеем

$$(c_1 g_{12} + c_2 g_{22})^2 - (c_1 g_{11} + c_2 g_{21})^2 = 0. \qquad (1.14)$$

Положим в (1.14) $c_1 = c_2 := 1$. Тогда из (1.14) и первых двух равенств в (1.11) вытекает, что $g_{11}g_{21} - g_{12}g_{22} = 0$. Полученное равенство противоречит третьему равенству в (1.11). Значит, предположение $\varkappa_1 > \varkappa_2$ не выполняется. Лемма 1 доказана.

2. Доказательство теоремы 1. Для кусочно аналитического вектора Φ рассмотрим на прямой $\operatorname{Im} p = 0$ краевую задачу Римана

$$\Phi^+(p) = G(p)\Phi^-(p) + g(p), \quad p \in R, \tag{2.1}$$

$$\Phi_l^\pm \in \mathscr{R}_0^\pm, \quad g_l \in \mathscr{R}_0, \quad l = 1, 2, \tag{2.2}$$

где $\Phi^\pm(p) = \left(\Phi_1^\pm(p), \Phi_2^\pm(p)\right)^T$, $g(p) = (g_1(p), g_2(p))^T$ — векторы-столбцы. В [1] показано, что краевая задача (2.1), (2.2) для

$$g(p) = \frac{\mathscr{F} f(p)}{\Lambda^-(p)} V^-(p), \quad \text{где } V^- = (\mathscr{F} k_-, \mathscr{F} \tilde{k}_-)^T, \tag{2.3}$$

при дополнительном условии

$$e^{\pm ipb} \Phi_l^\mp \in \mathscr{R}_0^\pm, \quad l = 1, 2, \tag{2.4}$$

эквивалентна уравнению (0.1) (с условием (0.2)). Решения уравнения (0.1) и краевой задачи (2.1)–(2.4) связаны равенством

$$\Phi(p) = \mathscr{F} u(p) V^-(p), \quad \text{где } \Phi = \Phi^+ + \Phi^-.$$

С другой стороны, из теории краевой задачи Римана для кусочно аналитического вектора [8, с. 17, 18; 9, с. 54] и леммы 1 вытекает

Лемма 2. *Пусть выполнены условия* (0.2), (0.3). *Тогда краевая задача Римана* (2.1), (2.2) *безусловно разрешима. Размерность пространства решений равна* $\varkappa$. *Само решение дается формулами*

$$\Phi^+(p) = G^+(p)(Q^+(p) + \Psi^+(p)), \quad \Phi^-(p) = \left(\frac{p+i}{p-i}\right)^{\varkappa/2} (G^-(p))^{-1}(Q^+(p) - \Psi^-(p)),$$

где $Q^+(p) = (p+i)^{-\varkappa/2}(R_1(p), R_2(p))^T$ *— рациональный вектор,* R_1, R_2 *— многочлены степени* $\varkappa/2 - 1$ *с произвольными комплексными коэффициентами* ($R_1 = R_2 = 0$ *при* $\varkappa = 0$), $\Psi^\pm(p) = P_0^\pm\{(G^+)^{-1} g\}(p)$.

Из леммы 2 и леммы 1.1 в [1] следует, что при $\varkappa = 0$ уравнение (0.1) может иметь лишь единственное решение. Тогда по альтернативе Фредгольма для уравнения (0.1) условие $\varkappa = 0$ достаточно для разрешимости уравнения (0.1).

Доказательство необходимости условия $\varkappa = 0$ вытекает из следующих лемм.

Лемма 3 (усиленная альтернатива Фредгольма). *Пусть выполнено условие* (0.2). *В этом случае либо уравнение* (0.1) *разрешимо в* $L_1(0, b)$ *для* $f(t) = k(t)$, $t \in (0, b)$, *и тогда оно разрешимо в* $L_1(0, b)$ *для любого* $f \in L_1(0, b)$, *либо однородное уравнение* (0.1) *имеет нетривиальное решение в* $L_1(0, b)$.

Лемма 4. *Пусть выполнены условия* (0.2) *и неравенство в* (0.3). *Если уравнение* (0.1) *имеет решение* $u \in L_1(0, b)$ *при* $f = k$, *то*

$$\Lambda^\pm(p) \neq 0, \quad \pm \operatorname{Im} p > 0. \tag{2.5}$$

Доказательство лемм 3, 4 приведено ниже в пп. 3, 4 соответственно.

Таким образом, если $\varkappa \neq 0$, то из альтернативы Фредгольма следует, что однородное уравнение (0.1) имеет нетривиальное решение. По лемме 2 с учетом леммы 1.1 из [1] для размерности N пространства решений однородного уравнения (0.1) справедливо неравенство $1 \leq N \leq \varkappa$.

Покажем устойчивость решения уравнения (0.1). При $\varkappa = 0$ из леммы 2 имеем

$$\Phi_1^+(p) = G_{11}^+(p)\Psi_1^+(p) + G_{12}^+(p)\Psi_2^+(p), \quad \Phi_2^-(p) = \widetilde{G}_{21}^-(p)\Psi_1^-(p) + \widetilde{G}_{22}^-(p)\Psi_2^-(p),$$

где $(G^-)^{-1} \equiv \big\|\widetilde{G}_{lj}^-\big\|$, $\Psi_j^\pm = P_0^\pm\big\{\widetilde{G}_{j1}^+ g_1 + \widetilde{G}_{j2}^+ g_2\big\}$, $j = 1,2$, $(G^+)^{-1} \equiv \big\|\widetilde{G}_{lj}^+\big\|$. С другой стороны, из леммы 1.1 и утверждения 1.2 в [1] следует, что

$$\mathscr{F}u(p) = \Phi_1^+(p) + e^{ipb}\Phi_2^-(p) + \mathscr{F}f(p). \tag{2.6}$$

Взяв модуль от левой и правой частей равенства (2.6), получим

$$\|u\|_1 \le \big|\Phi_1^+(p)\big| + \big|\Phi_2^-(p)\big| + \|f\|_1. \tag{2.7}$$

Легко установить справедливость следующего утверждения.

Утверждение 3. *Имеют место неравенства* $\big|\Phi_1^+(p)\big| \le C_1\|f\|_1$, $\big|\Phi_2^-(p)\big| \le C_2\|f\|_1$, *где* $C_1, C_2 > 0$.

Из неравенства (2.7) и утверждения 3 непосредственно следует устойчивость решения по правой части.

Осталось показать устойчивость решения по ядру k в норме L_1 (устойчивость по параметру b — частный случай устойчивости по ядру k). Пусть $k_1 \in L_1(-b,b)$, $\|k_1 - k\|_1 < \delta$, $\delta > 0$. Величина частного индекса $\varkappa/2$ в лемме 1 (разложение (1.1)) устойчива при малых изменениях k в норме $L_1(-b,b)$ [9, с. 55]. Тогда при $\varkappa = 0$ частные индексы матрицы-функции G_1, которая отвечает согласно лемме 1.1 из [1] ядру k_1, равны нулю. Следовательно, по теореме 1.1 из [1; 9, с. 54] краевая задача Римана (2.1), (2.2) с $G = G_1$ имеет единственное решение. По лемме 1.1 из [1] однородное уравнение (0.1) с ядром k_1 также имеет единственное (тривиальное) решение. Тогда по альтернативе Фредгольма уравнение (0.1) с ядром k_1 имеет единственное решение $u_1 \in L_1(0,b)$ для любого $f \in L_1(0,b)$. Следовательно, справедливо равенство

$$u(t) - u_1(t) - \int_0^b k(t-s)(u(s) - u_1(s))\,ds = f_1(t), \quad t \in (0,b), \tag{2.8}$$

где

$$f_1(t) = \int_0^b (k(t-s) - k_1(t-s))u_1(s)\,ds \in L_1(0,b).$$

В силу устойчивости уравнения (0.1) по правой части из (2.8) получим, что

$$\|u - u_1\|_1 < C_2\|f_1\|_1 < C_3\|u_1\|_1, \quad \|k - k_1\|_1 < C_4\delta, \quad C_4 > C_3 > C_2 > 0,$$

что доказывает устойчивость решения (0.1) по ядру k.

3. Доказательство леммы 3. Лемма 3 согласно альтернативе Фредгольма вытекает из следующего утверждения.

Утверждение 4. *Пусть выполнено условие* (0.2). *Тогда если уравнение* (0.1) *разрешимо в* $L_1(0,b)$ *для* $f(t) = k(t)$, $t \in (0,b)$, *то однородное уравнение* (0.1) *имеет только тривиальное решение в* $L_1(0,b)$.

Ниже приведем доказательство утверждения 4, что и завершит доказательство леммы 3.

Как и в [1], получим аналог уравнения (0.1) в образах Фурье. Для $t \in R$ положим

$$v(t) := -\int_0^b k(t-s)u(s)\,ds,\ t \notin (0,b), \quad v(t) := 0,\ t \in (0,b), \quad v_\pm(t) := \theta(\pm t)v(t). \tag{3.1}$$

Из (3.1) следует, что

$$v \in L_1(-b,2b), \quad v_-(t) = 0,\ t \notin (-b,0), \quad v_+(t) = 0,\ t \notin (b,2b). \tag{3.2}$$

Тогда уравнение (0.1) распространяется на всю вещественную прямую R следующим образом:

$$u(t) - \int_{-\infty}^{\infty} k(t-s)u(s)\,ds = f(t) + v_-(t) + v_+(t), \quad t \in R, \tag{3.3}$$

где $u(t) = f(t) = 0$, $t \notin (0,b)$.

Применив к уравнению (3.3) преобразование Фурье, получим требуемый аналог

$$(1 - \mathscr{F}k_-(p) - \mathscr{F}k_+(p))\mathscr{F}u(p) = \mathscr{F}f(p) + \mathscr{F}v_-(p) + \mathscr{F}v_+(p), \quad p \in R. \tag{3.4}$$

Положим

$$T^-(p) := 1 + \mathscr{F}v_-(p) - \mathscr{F}k_-(p). \tag{3.5}$$

Из (3.4), (3.5) при $f = k_+$ имеем

$$1 - \mathscr{F}k(p) = \frac{T^-(p)}{1+\mathscr{F}u(p)} + \frac{\mathscr{F}v_+(p)}{1+\mathscr{F}u(p)}, \quad p \in R. \tag{3.6}$$

Предположим противное, т. е. что однородное уравнение (0.1) имеет нетривиальное решение $u_0 \in L_1(0,b)$. Тогда из (3.4) следует, что

$$(1 - \mathscr{F}k(p))\mathscr{F}u_0(p) = \mathscr{F}v_-^0(p) + \mathscr{F}v_+^0(p), \quad p \in R, \tag{3.7}$$

где функции $v_\pm^0$ определены аналогично $v_\pm$ в (3.1). Из (3.7) и (3.6) имеем

$$(T^-(p) + \mathscr{F}v_+(p))\frac{\mathscr{F}u_0(p)}{1+\mathscr{F}u(p)} = \mathscr{F}v_-^0(p) + \mathscr{F}v_+^0(p), \quad p \in R. \tag{3.8}$$

Умножив уравнение (3.8) на $e^{-ipb}(1+\mathscr{F}u(p))$, получим

$$\begin{aligned} e^{-ipb}\mathscr{F}u_0(p)T^-(p) - \mathscr{F}v_-^0(p)(1+\mathscr{F}u(p))e^{-ipb}& \\ = e^{-ipb}\mathscr{F}v_+^0(p)(1+\mathscr{F}u(p)) - e^{-ipb}\mathscr{F}v_+(p)\mathscr{F}u_0(p),& \quad p \in R. \end{aligned} \tag{3.9}$$

Левая часть уравнения (3.9) из $\mathscr{R}_0^-$, правая — из $\mathscr{R}_0^+$ ввиду того, что

$$e^{-ipb}\mathscr{F}v_+^0(p), e^{-ipb}\mathscr{F}v_+(p) \in \mathscr{R}_0^+, \quad e^{-ipb}\mathscr{F}u_0(p), \mathscr{F}v_-^0(p), \mathscr{F}v_-(p) \in \mathscr{R}_0^-$$

(справедливость первого включения в вышестоящих двух следует из (3.2)). Применив к левой и правой частям уравнения (3.9) проектор P_0^- (при этом в правой части получим нуль) и разделив вновь полученное уравнение на $e^{-ipb}(1+\mathscr{F}u(p))T^-(p)$, имеем

$$\frac{\mathscr{F}u_0(p)}{1+\mathscr{F}u(p)} = \frac{\mathscr{F}v_-^0(p)}{T^-(p)}, \quad p \in R. \tag{3.10}$$

Все функции в (3.10) целые по построению. Кроме того, функции из левой части (3.10) регулярны в полуплоскости $\operatorname{Im} p > C$, $C < 0$, а функции из правой части (3.10) регулярны в полуплоскости $\operatorname{Im} p < -C$, функция, стоящая в знаменателе дроби левой части (правой части) (3.10), отделена от нуля на бесконечности в полуплоскости $\operatorname{Im} p > C$ ($\operatorname{Im} p < -C$). Тогда по теореме единственности для аналитических функций существует $y_1 \geq 0$ такое, что

$$|1 + \mathscr{F}u(p)| > 0, \quad \operatorname{Im} p \geq y_1, \quad T^-(p) \neq 0, \quad \operatorname{Im} p = y_1,$$

функция $T^-(p)$ может иметь в полуплоскости $\operatorname{Im} p < y_1$ лишь конечное число нулей. Левая часть равенства (3.10) — регулярная в полуплоскости $\operatorname{Im} p > y_1$ и непрерывная вплоть до границы функция, правая часть равенства (3.10) — регулярная в полуплоскости $\operatorname{Im} p < y_1$ и непрерывная вплоть до границы за исключением конечного числа полюсов функция. По теоремам об аналитическом продолжении и Лиувилля [7, с. 29] для $p = x + iy_1$, $x \in R$, имеем

$$\frac{\mathscr{F}u_0(p)}{1 + \mathscr{F}u(p)} = \frac{\mathscr{F}v_-^0(p)}{T^-(p)} = \sum_{j=1}^{J} \sum_{l=1}^{L_j} \frac{c_{jl}}{(p - a_j)^l} := Q_0^+(p), \tag{3.11}$$

где a_j $(j = 1, \ldots, J)$ — все нули функции $T^-(p)$ в полуплоскости $\operatorname{Im} p < y_1$, L_j — кратность j-го нуля, c_{jl} — произвольные комплексные постоянные, $j = 1, \ldots, J$, $l = 1, \ldots, L_j$. Из (3.11) следует, что Фурье-образ общего решения однородного уравнения (0.1) должен иметь следующий вид:

$$\mathscr{F}u_0(p) = (1 + \mathscr{F}u(p))Q_0^+(p), \quad p = x + iy_1. \tag{3.12}$$

Из (3.12) получим, что при $p = x + iy_1$

$$\mathscr{F}u_0(p) = (1 + \mathscr{F}u(p))\frac{1}{p - a_1} \tag{3.13}$$

— частное решение однородного уравнения (0.1). Из (3.13) и леммы 4.1 в [10] следует, что функция $1 + \mathscr{F}u(p)$ имеет нуль в точке $p = a_1$. Предположим для простоты, что кратность этого нуля не более 1. Положим $u_1 = u + u_0$. Тогда u_1 также решение уравнения (0.1) при $f = k_+$. Из (3.13) при $p = x + iy_1$ имеем

$$\mathscr{F}u_0(p) = \frac{1 + \mathscr{F}u_1(p)}{p - a_1} = \frac{1 + \mathscr{F}u(p)}{p - a_1} + \frac{1 + \mathscr{F}u(p)}{(p - a_1)^2} \tag{3.14}$$

— Фурье-образ частного решения однородного уравнения (0.1). Из (3.14) и леммы 4.1 в [10] следует, что функция $1 + \mathscr{F}u(p)$ имеет в точке $p = a_1$ нуль кратности 2. Полученное противоречие доказывает утверждение 4.

Отметим, что лемма 3 анонсирована в [11] в многомерном случае.

4. Доказательство леммы 4. По лемме 3 уравнение (0.1) однозначно разрешимо для любого $f \in L_1(0, b)$. Предположим, что (2.5) не выполняется. Тогда существует p_1: $\operatorname{Im} p_1 > 0$, $\Lambda^+(p_1) = 0$. Положим

$$\mathscr{F}f(p) := \frac{\Lambda^+(p)}{p - p_1}, \quad p \in R. \tag{4.1}$$

По лемме 4.1 из [10] имеем $f(t) = 0$, $t \notin (0, b)$, $f \in L_1(R)$. Пусть u_1 — решение уравнения (0.1). Как и в п. 3, найдем аналог уравнения (0.1) в образах Фурье. Из (3.4) следует, что

$$(1 - \mathscr{F}k(p))\left(\frac{1}{p - p_1} + \mathscr{F}u_1(p)\right) = \mathscr{F}v_-^1(p) + \mathscr{F}v_+^1(p) - \frac{\mathscr{F}k_-(p)}{p - p_1}, \quad p \in R, \tag{4.2}$$

где

$$v^1(t) = -\int\limits_0^b k(t-s)u_1(s)\,ds,\ t \notin (0,b), \quad v^1(t) = 0,\ t \in (0,b), \quad v^1_\pm(t) = \theta(\pm t)v(t).$$

Подставим в (4.2) выражение для $1 - \mathscr{F}k(p)$ из (3.6). Имеем

$$\left(\frac{1}{p-p_1^+} + \mathscr{F}u_1(p)\right)(T^-(p) + \mathscr{F}v_+(p))\frac{1}{1+\mathscr{F}u(p)} = \mathscr{F}\bar{v}^1_-(p) + \mathscr{F}v^1_+(p), \quad (4.3)$$

где $\mathscr{F}\bar{v}^1_-(p) = \mathscr{F}v^1_-(p) - \frac{\mathscr{F}k_-(p)}{p-p_1}$. Умножив уравнение (4.3) на $e^{-ipb}(1+\mathscr{F}u(p))$, получим

$$\begin{aligned} &e^{-ipb}\left(\frac{1}{p-p_1} + \mathscr{F}u_1(p)\right)T^-(p) - \mathscr{F}\bar{v}^1_-(p)(1+\mathscr{F}u(p))e^{-ipb} \\ &= e^{-ipb}\mathscr{F}v^1_+(p)(1+\mathscr{F}u(p)) - e^{-ipb}\mathscr{F}v_+(p)\left(\frac{1}{p-p_1} + \mathscr{F}u_1(p)\right), \quad p \in R. \quad (4.4)\end{aligned}$$

Левая часть равенства (4.4) — регулярная в полуплоскости $\operatorname{Im} p < 0$, правая — в полуплоскости $\operatorname{Im} p > 0$ функции, за исключением полюса в точке $p = p_1$. Тогда из (4.4) по теоремам об аналитическом продолжении и Лиувилля [7, с. 29] имеем

$$\left(\frac{1}{p-p_1} + \mathscr{F}u_1(p)\right)T^-(p) - \mathscr{F}\bar{v}^1_-(p)(1+\mathscr{F}u(p)) = e^{ipb}\frac{c_1^+}{p-p_1}, \quad (4.5)$$

где c_1^+ — некоторая постоянная. Из (4.5) следует, что

$$\frac{\mathscr{F}u_1(p)}{1+\mathscr{F}u(p)} = \frac{\mathscr{F}\bar{v}^1_-(p)}{T^-(p)} + h(p), \quad p = x + iy_0, \quad (4.6)$$

где

$$h(p) = \frac{e^{ipb}c_1^+ - T^-(p)}{(p-p_1)(1+\mathscr{F}u(p))T^-(p)}.$$

По определению функции $1+\mathscr{F}u(p)$, $T^-(p)$ целые регулярные в полуплоскости $\operatorname{Im} p > 0$ и $\operatorname{Im} p < 0$ соответственно. Тогда существует $y_0 < 0$ в (4.6) такое, что

$$\begin{gathered} 1+\mathscr{F}u(p) \neq 0, \quad \operatorname{Im} p = y_0, \quad T^-(p) \neq 0, \quad \operatorname{Im} p \le y_0, \\ 1+\mathscr{F}u(q_j) = 0, \quad \operatorname{Im} q_j > y_0, \quad j = 1,\dots,m,\ m > 1. \end{gathered} \quad (4.7)$$

Для простоты считаем, что $q_1,\dots,q_m$ — все нули функции $1+\mathscr{F}u(p)$ в полуплоскости $\operatorname{Im} p > y_0$ (все нули однократные). Из (4.6) по теоремам об аналитическом продолжении и Лиувилля [7, с. 29] имеем

$$\frac{\mathscr{F}u_1(p)}{1+\mathscr{F}u(p)} - h^+(p) = Q^-(p) = \frac{\mathscr{F}\bar{v}^1_-(p)}{T^-(p)} + h^-(p), \quad p = x + iy_0, \quad (4.8)$$

где

$$Q^-(p) = \sum_{j=1}^m \frac{c_j}{p-q_j}, \quad h^\pm(p) = P_0^\pm h(p),$$

c_j $(j = 1,\dots,m)$ — некоторые постоянные.

Из (4.8) получим формулы для u_1 и $\mathscr{F}\bar{v}_-^1$ в силу разрешимости уравнения (0.1) при $f(t)=k(t)$ и $f(t)=\mathscr{F}^{-1}\{\frac{\Lambda^+(x)}{x-p_1}\}(t)$,

$$\mathscr{F}u_1(p)=(1+\mathscr{F}u(p))(h^+(p)+Q^-(p)),\quad \operatorname{Im}p=y_0, \tag{4.9}$$

$$\mathscr{F}\bar{v}_-^1(p)=T^-(p)(Q^-(p)-h^-(p)),\quad p=x+iy_0. \tag{4.10}$$

Можно считать, что числа $c_1,\dots,c_m$ не все равны нулю. В самом деле, если $c_j=0$, $j=1,\dots,m$, то из (4.10) и равенства $h^-=h-h^+$ для $p=x+iy_0$ имеем

$$e^{ipb}\mathscr{F}\bar{v}_-^1(p)=e^{ipb}T^-(p)h^+(p)-e^{ipb}\frac{e^{ipb}c_1^+-T^-(p)}{(p-p_1)(1+\mathscr{F}u(p))}. \tag{4.11}$$

Левая часть равенства (4.11) — регулярная функция в полуплоскости $\operatorname{Im}p>y_0$, за исключением полюса в точке $p=p_1$ по построению. Правая же часть — регулярная функция в полуплоскости $\operatorname{Im}p>y_0$, за исключением полюсов в точках $p=q_j$, $j=1,\dots,m$. Тогда равенство (4.11) возможно лишь при условии

$$e^{iq_jb}c_1^+-T^-(q_j)=0,\quad j=1,\dots,m. \tag{4.12}$$

Выбирая в (4.7) параметр $y_0<0$ достаточно большим (по модулю), получим, что равенство (4.12) не будет выполняться при $|y_0|>|\operatorname{Im}q_j|>C$, где $C>0$ — достаточно большое число, ввиду того, что $|T^-(p)|=1$ при $\operatorname{Im}p\to-\infty$, и функция $1+\mathscr{F}u(p)$ имеет бесконечно много нулей в окрестности точки $\operatorname{Im}p=-\infty$.

Таким образом, увеличивая по модулю параметр y_0, будем получать по формуле (4.9) различные решения уравнения (0.1), что противоречит единственности решения уравнения (0.1) по условию. Полученное противоречие доказывает лемму 4.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Воронин А. Ф.* Полное обобщение метода Винера — Хопфа для интегральных уравнений в свертках на конечном интервале с интегрируемыми ядрами // Дифференц. уравнения. 2004. Т. 40, № 9. С. 1153–1160.
2. *Канторович Л. В., Акилов Г. П.* Функциональный анализ. М.: Наука, 1984.
3. *Воронин А. Ф.* Теоремы единственности для интегральных уравнений в свертках 1-го и 2-го родов на отрезке // Докл. РАН. 2004. Т. 396, № 1. С. 12–14.
4. *Ершов Ю. И., Шихов С. Б.* Методы решения краевых задач теории переноса. М.: Атомиздат, 1977.
5. *Крейн С. Г.* Линейные уравнения в банаховом пространстве. М.: Наука, 1971.
6. *Гохберг И. Ц., Крейн М. Г.* Системы интегральных уравнений на полупрямой с ядрами, зависящими от разности аргументов // Успехи мат. наук. 1958. Т. 13, № 2. С. 3–7.
7. *Гахов Ф. Д., Черский Ю. И.* Уравнения типа свертки. М.: Наука, 1978.
8. *Гахов Ф. Д.* Краевая задача Римана для системы n пар функций // Успехи мат. наук. 1954. Т. 7, № 4. С. 3–54.
9. *Литвинчук Г. С.* Краевые задачи и сингулярные интегральные уравнения со сдвигом. М.: Наука, 1986.
10. *Крейн М. Г.* Интегральные уравнения на полупрямой с ядром, зависящим от разности аргументов // Успехи мат. наук. 1958. Т. 13, № 5. С. 3–10.
11. *Воронин А. Ф.* Усиление альтернативы Фредгольма для интегральных уравнений в свертках // Докл. РАН. 2002. Т. 387, № 6. С. 737–738.

Статья поступила 13 апреля 2006 г.

Воронин Анатолий Федорович
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090
voronin@math.nsc.ru