Сибирский математический журнал
Ноябрь—декабрь, 2007. Том 48, № 6

УДК 510.6+510.67+512.8

АВТОУСТОЙЧИВАЯ ДВУСТУПЕННО НИЛЬПОТЕНТНАЯ ГРУППА БЕЗ СЕМЕЙСТВА СКОТТА, СОСТОЯЩЕГО ИЗ КОНЕЧНЫХ ФОРМУЛ

Д. А. Тусупов

Аннотация. Построена автоустойчивая двуступенно нильпотентная группа с единственной конструктивизацией с точностью до автоэквивалентности, которая не имеет семейства Скотта, состоящего из конечных формул.

Ключевые слова: теория вычислимости, вычислимая структура, нильпотентная группа, граф, семейство Скотта.

§ 1. Введение

Одной из проблематик теории вычислимости является нахождение синтаксических условий, эквивалентных вычислимым свойствам. В качестве примера таких исследований можно привести результат из [1, 2]: вычислимая структура относительно вычислимо категорична тогда и только тогда, когда она имеет вычислимо перечислимое семейство Скотта. С. С. Гончаров [3] построил пример вычислимой структуры, которая вычислимо категорична, но не относительно вычислимо категорична. Он в [4] показал, что любая вычислимая структура, двухкванторная диаграмма которой разрешима, является относительно вычислимо категоричной. О. В. Кудинов [5] доказал, что существует вычислимо категоричная структура, однокванторная диаграмма которой разрешима, но не относительно вычислимо категорична. В [6] построена вычислимо стабильная структура без семейства Скотта, состоящего из конечных формул. В настоящей работе построен аналогичный пример в классе нильпотентных групп.

Пусть $\mathscr{M}$ — счетная структура счетного языка, $|\mathscr{M}|$ — подмножество множества натуральных чисел ω. *Степенью структуры* $\mathscr{M}$, которая обозначается через $\deg(\mathscr{M})$, называется тьюрингова степень атомной диаграммы структуры $\mathscr{M}$. Структура называется *вычислимой*, если ее тьюрингова степень атомной диаграммы вычислима.

Вычислимая структура $\mathscr{M}$ называется *автоустойчивой* или *вычислимо категоричной*, если для любых двух конструктивизаций μ, ν структуры $\mathscr{M}$ существуют автоморфизм φ данной структуры и вычислимая функция f такие, что $\mu \cdot f = \varphi \cdot \nu$, в этом случае автоморфизм φ называется *вычислимым.* Конструктивизации μ, ν бесконечной структуры $\mathscr{M}$ называются *автоэквивалентными*, если существуют автоморфизм φ данной структуры и вычислимая перестановка p множества ω такие, что $\mu \cdot p = \varphi \cdot \nu$.

Вычислимая структура $\mathscr{M}$ называется *относительно вычислимо категоричной*, если для любого представления $\mathscr{N}$ (т. е. изоморфной $\mathscr{M}$ структуры) существует $\deg(\mathscr{N})$-вычислимый изоморфизм из $\mathscr{M}$ на $\mathscr{N}$. Вычислимая структура $\mathscr{M}$ называется *вычислимо стабильной*, если для любого вычислимого представления $\mathscr{N}$ любой изоморфизм из $\mathscr{M}$ на $\mathscr{N}$ является вычислимым изоморфизмом.

Семейством Скотта для структуры $\mathscr{M}$ называется множество формул Φ с фиксированным конечным множеством констант из $|\mathscr{M}|$ таких, что

1) любой кортеж из $|\mathscr{M}|$ удовлетворяет некоторой формуле φ из Φ,

2) если $\bar{a}$ и $\bar{b}$ удовлетворяют одной и той же формуле из Φ, то существует автоморфизм структуры $\mathscr{M}$, переводящий $\bar{a}$ в $\bar{b}$.

Теорема 1 [1, 2]. *Вычислимая структура относительно вычислимо категорична тогда и только тогда, когда она имеет вычислимо перечислимое семейство Скотта конечных $\exists$-формул.*

Структура называется *жесткой*, если нет нетривиальных автоморфизмов. Семейство Скотта жесткой структуры называется *определимым семейством.*

Теорема 2 [6]. *Существует жесткий вычислимо стабильный граф $\mathscr{G}$, не имеющий семейства Скотта конечных формул.*

Сформулируем несколько результатов, необходимых для дальнейшего.

Теорема 3 [6]. *Существуют частично вычислимая функция ψ, отношение R^2, при котором $R(x, y)$ имеет место тогда и только тогда, когда функция $\psi(x, y)$ сходится, и семейство в. п. множеств A такие, что*

1) *вычислимое отношение R^2 есть одно-однозначная нумерация семейства S (которая обозначается через $\{A_i : i \in \omega\}$), т. е. $R(i, n)$ имеет место тогда и только тогда, когда $n \in A_i$;*

2) *семейство S имеет единственную одно-однозначную нумерацию с точностью до вычислимой эквивалентности,*

3) *нумерация R^2 обладает свойством*

$$\exists^\infty d \exists^\infty s \exists m \neq d (A_{d,s} \subseteq A_{m,s+1}); \tag{$*$}$$

для каждого из индексов d со свойством $(*)$ выполняются условия:

(а) *A_d бесконечно,*

(б) *для каждого k существует шаг s_k такой, что для всех шагов $t > s_k$ и всех индексов $m \neq d$ если $A_{d,t} \subseteq A_{m,t+1}$, то $A_{m,t}$ не содержит чисел, меньших k,*

(в) *для любого индекса z существует шаг s_z такой, что для всех шагов $t > s_z$ и индексов $m \neq d$ если $A_{d,t} \subseteq A_{m,t+1}$, то $m > z$,*

(г) *для любого индекса $m \neq d$ существует шаг s такой, что если добавить все элементы из $A_{d,s}$ к множеству $A_{m,s}$, т. е. обеспечить $A_{d,s} \subseteq A_{m,s+1}$, то получим $A_m = A_{m,s+1}$.*

§ 2. Автоустойчивая двуступенно нильпотентная группа

Пусть дано семейство множеств S из § 1 с однозначной вычислимой нумерацией R^2. По данному семейству строим жесткий граф $\mathscr{G}$ следующим образом. В качестве множества вершин берется множество

$$\left\{d_{i,0}, d_{i,1}, d_{i,2}, d_{i,3}, d_{i,4}, c_i, x^k_{i,j} : i \in \omega \wedge R(i, k) \wedge 1 \leq j \leq 7^{k+1} - 1\right\}.$$

Определим отношение F на $|\mathscr{G}|$: для каждого $i \in \omega$ положим

а) $F(c_i, d_{i,0})$, $F(d_{i,0}, d_{i,1})$, $F(d_{i,1}, d_{i,2})$, $F(d_{i,2}, d_{i,3})$, $F(d_{i,3}, d_{i,4})$, $F(c_i, d_{i,4})$;

б) если для $k \in \omega$ имеет место $R(i,k)$ и $n_k = 7^{k+1} - 1$, то $F\big(c_i, x^k_{i,1}\big)$, $F\big(x^k_{i,1}, x^k_{i,2}\big)$, $F\big(x^k_{i,2}, x^k_{i,3}\big)$, $\ldots$, $F\big(x^k_{i,n_k-1}, x^k_{i,n_k}\big)$, $F\big(x^k_{i,n_k}, c_i\big)$.

Для построенного графа выполнено следующее свойство.

Предложение 1 [6]. *Вычислимый граф $\mathscr{G}$ вычислимо стабильный.*

Заметим, что построенный граф $\langle \mathscr{A}, F^2\rangle$ является симметрическим и иррефлексивным и удовлетворяет условиям:

(i) для любых различных вершин x, y существует не более одной общей вершины;

(ii) для любых связных вершин x, y не существует вершины z такой, что $F(x,z)$ и $F(y,z)$;

(iii) для любой вершины x существуют различные y, z такие, что $F(x,y)$, $F(x,z)$.

Сразу отметим, что построенный нами граф удовлетворяет условиям (i)–(iii).

Пусть G — мультипликативная группа, $[g_1, g_2] = g_1^{-1} g_2^{-1} g_1 g_2$ — коммутатор. Пусть $Z(G) = \{g : \forall h \in G[g,h] = 1\}$ — центр группы G. Если $X \subseteq G$, то $\langle X\rangle$ — подгруппа, порожденная множеством X. Подгруппа $G' = \langle [g_1, g_2] : g_1, g_2 \in G\rangle$ называется *коммутантом группы* G. Группа G называется *двуступенно нильпотентной группой*, если коммутант G' группы G содержится в ее центре $Z(G)$. Перечислим некоторые свойства метабелевой группы: $[[x,y],z] = [x,[y,z]] = 1$; $[xy, z] = [x,z][y,z]$; $[x, yz] = [x,y][x,z]$. Пусть p — простое число. Группа G называется *группой экспоненты* p, если p-степень g^p любого элемента g группы равна единице. Введем обозначения: C_p — циклическая группа порядка p; $Z(p)$ — конечное поле мощности p; $\mathscr{N}_2^p$ — двуступенно нильпотентное свободное произведение $\prod\limits_{i\in\omega} \langle x_i\rangle$ циклических групп $\langle x\rangle$ порядка p. Для всех элементов g данной группы выполняется условие $g^p = 1$.

Пусть $\mathscr{A} \rightleftharpoons \mathscr{G}$ — граф, построенный выше. Зафиксируем простое число $p > 2$. Пусть даны сигнатуры $\sigma = \langle F^2\rangle$ и $\sigma_0 = \langle *\rangle$, где F^2 — двуместный предикат и $*$ — двуместная функция.

Предложение 2 [7]. *Для любого счетного симметрического графа $\mathscr{A}$ со свойствами* (i)–(iii) *существует двуступенно нильпотентная группа $\mathscr{A}_0$ экспоненты p такая, что имеется алгоритм построения по любой конструктивизации ν графа $\mathscr{A}$ конструктивизации μ_ν двуступенно нильпотентной группы $\mathscr{A}_0$, при этом*

1) *конструктивизация ν_{μ_0} неавтоэквивалентна конструктивизации ν_{μ_1} тогда и только тогда, когда конструктивизации μ_0 и μ_1 неавтоэквивалентны,*

2) *для любой конструктивизации μ группы $\mathscr{A}_0$ существует конструктивизация ν графа $\mathscr{A}$ такая, что конструктивизации μ и μ_ν автоэквивалентны.*

Обозначим через $\mathscr{A}_0'$ фактор-группу $\mathscr{A}_0/Z(\mathscr{A}_0)$.

Доказательство. Пусть $\bar{a}, \bar{b} \in \mathscr{A}_0'$. Определим отношение $\sim$, полагая $\bar{a} \sim \bar{b}$ тогда и только тогда, когда для любого $c \in \mathscr{A}_0$ выполняется $[a,c] = 1 \Leftrightarrow [b,c] = 1$. Через $[\bar{a}]$ обозначим класс эквивалентности элемента $\bar{a}$. Для $[\bar{a}] \neq [\bar{b}]$ и $[\bar{a}], [\bar{b}] \neq [\bar{1}]$ определим отношение $\overline{F}(x,y)$ на множестве $(\mathscr{A}_0' - \{\bar{1}\})/\sim$ следующим образом: $\overline{F}([\bar{a}],[\bar{b}])$, если $[a,b] = 1$ в группе $\mathscr{A}_0$. Данную структуру обозначим через $\mathscr{G}_1$. Через $\mathscr{G}_2$ обозначим структуру с основным множеством $\{[\bar{a}] : \exists [\bar{b}] \in \mathscr{G}_1\ (\overline{F}([\bar{a}],[\bar{b}]) \wedge \|[\bar{a}]\| = p-1)\}$, где $\|[\bar{a}]\|$ означает число элементов в классе $[\bar{a}]$, и бинарным отношением $\overline{F}$.

Рассмотрим различные виды [7] представления элемента $a \in \mathscr{A}_0 - Z(\mathscr{A}_0)$.

1. Пусть $a = x_i^\alpha$, где $0 < \alpha < p$ и x_i принадлежит множеству порождающих группы $\mathscr{A}_0$. Элемент $[\bar{x}]$ из $\mathscr{G}_1$ как класс содержит $p-1$ элементов из $\mathscr{A}_0'$, и существуют y_1, y_2 из $\mathscr{A}_0$ такие, что $[x, y_1] = 1$, $[x, y_2] = 1$ и $[y_1, y_2] \neq 1$. Тогда элементы $[\bar{y}_1]$, $[\bar{y}_2]$ из $\mathscr{G}_1$ таковы, что $\overline{F}([\bar{x}], y_1)$ и $\overline{F}([\bar{x}], y_2)$. Таким образом, элемент $[\bar{x}]$ принадлежит графу $\mathscr{G}_2$.

2. Пусть x_1, x_2 — различные элементы, $0 < \alpha, \beta < p$ и $[x_1, x_2] = 1$. Тогда $[\overline{x_1 x_2}] = \{\overline{x_1^\alpha x_2^\beta} : 0 < \alpha, \beta < p\}$ и элемент $[\overline{x_1 x_2}]$ связан только с элементами $[\bar{x_1}]$ и $[\bar{x_2}]$ в графе $\mathscr{G}_1$ и $|[\overline{x_1, x_2}]| = (p-1)^2$. Заметим, что элементы $[\bar{x_1}]$ и $[\bar{x_2}]$ в графе $\mathscr{G}_1$ связаны, так как $[x_1, x_2] = 1$, следовательно, элемент $[\overline{x_1 x_2}]$ не принадлежит графу $\mathscr{G}_2$.

3. Пусть $a = x_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot x_m^{\alpha_m}$ и не выполнены условия из пп. 1, 2. Тогда существует элемент x такой, что $[x, x_i] = 1$ для всех i, $1 \le i \le m$, $[a] = \{\overline{a^\alpha x^\beta} : (\alpha \neq 0) \wedge (\alpha, \beta < p)\}$, элемент $[\bar{a}]$ связан только с одним элементом $[\bar{x}]$ и $|[\bar{a}]| = p \cdot (p-1)$. Следовательно, элемент $[\overline{x_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot x_m^{\alpha_m}}]$ не принадлежит графу $\mathscr{G}_2$.

4. Пусть не выполнены условия пп. 1–3 и $a = x_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot x_m^{\alpha_m}$. Тогда $|[\bar{a}]| = p-1$ и $[\bar{a}]$ не связан ни с одним элементом. Тем самым элемент $[\overline{x_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot x_m^{\alpha_m}}]$ не принадлежит графу $\mathscr{G}_2$.

Запишем данные факты на языке теории групп:

$$\Psi_0(x) = \exists g_1, g_2 (x \neq 1 \wedge [g_1, g_2] \neq 1 \wedge [x, g_1] = 1 \wedge [x, g_2] = 1),$$

$$\Psi_1(x) = \exists g_1, g_2 ([g_1, g_2] = 1 \wedge [x, g_1] = 1 \wedge [x, g_2] = 1),$$

$$\begin{aligned}\Psi_2(x) = \exists g_1 \exists g_2 ((\Psi_0(g_1) \wedge \Psi_0(g_2) \wedge [g_1, g_2] \neq 1 \wedge x = g_1 g_2) \\ \vee \exists g([g_1, g] \neq 1 \wedge [g_2, g] \neq 1 \wedge x = g_1 g_2 g)).\end{aligned}$$

Формулы $\Psi_i(x)$, $0 \le i \le 2$, образуют разбиение группы $\exists$-формулами. Следовательно, формульные множества являются $\deg(\mathscr{A}_0)$-вычислимыми.

Предложение 3. *Двуступенно нильпотентная группа $\mathscr{A}_0$, построенная по вычислимо стабильному симметрическому графу $\mathscr{A}$, с условиями* (i)–(iii) *автоустойчива и имеет единственную конструктивизацию с точностью до вычислимого автоморфизма.*

Доказательство непосредственно следует из приведенных ниже лемм.

Лемма 1 [7]. *Граф $\mathscr{A}$ изоморфен графу $\mathscr{G}_2$, построенному по группе $\mathscr{A}_0$.*

Лемма 2 [7]. *Если $\mathscr{A}$ — вычислимый симметричный граф. Тогда структура $\mathscr{G}_2$, построенная по группе $\mathscr{A}_0$, будет вычислимой. Граф $\mathscr{A}$ формульно определим в группе $\mathscr{A}_0$.*

Лемма 3. *Отображение из множества* $\mathrm{Iz}(\mathscr{A}, \mathscr{B})$ *всех изоморфизмов $\mathscr{A}$ на $\mathscr{B}$ на множество* $\mathrm{Iz}(\mathscr{A}_0, \mathscr{B}_0)$ *всех изоморфизмов $\mathscr{A}_0$ на $\mathscr{B}_0$ является биекцией.*

Доказательство. Пусть $\varphi^* \in \mathrm{Iz}(\mathscr{A}_0, \mathscr{B}_0)$. Определим процедуру нахождения базисного элемента x_a группы $\mathscr{A}_0$ по элементу a из $\mathscr{G}_2^{\mathscr{A}_0}$.

Пусть $a \in \mathscr{G}_2^{\mathscr{A}_0}$ и $a = [\bar{x}']$ для некоторого x'. Найдем наибольшее $\alpha \bmod p$ такое, что уравнение $x^\alpha = x'$ имеет решение в группе $\mathscr{A}_0$, и пусть x есть искомое решение. Положим $x_a = x$.

Пусть $a \in \mathscr{G}_2^{\mathscr{A}_0}$ и $b \in \mathscr{G}_2^{\mathscr{B}_0}$ такие, что $a = [\bar{x}_a]$, $b = [\overline{\varphi^*(x_a)}]$ и $y_b = (\varphi^*(x_a))_b$. Тогда отображение $\varphi(x_a) = y_b$ будет изоморфизмом. Лемма доказана.

Лемма 4. *Пусть* $\mathscr{A}$ — $\mathbf{d}$*-вычислимый симметричный граф с условиями* (i)–(iii). *Тогда структуры* $\mathscr{A}_0$, $\mathscr{A}'_0$, $\mathscr{G}_2^{\mathscr{A}_0}$, *ранее построенные по* $\mathscr{A}$, *также будут* $\mathbf{d}$*-вычислимыми.*

Доказательство. Пусть даны $\mathbf{d}$-вычислимая структура $\mathscr{A}$, $\mathbf{d}$-вычислимое отношение F на этой структуре и простое число $p > 2$. Рассмотрим группу $\mathscr{A}_0$, которая является двуступенно нильпотентной группой простой экспоненты p, и свободную группу, порожденную $\mathbf{d}$-вычислимым базисом $|\mathscr{A}|$ и условием $[x_i, x_j] = 1$, если $F(x_i, x_j)$. Тогда группа $\mathscr{A}_0$ будет $\mathbf{d}$-вычислимой.

Покажем, что центр группы совпадает с ее коммутантом. Предположим, что существует элемент $a = x_{i_1}^{\alpha_1} \cdot x_{i_2}^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot x_{i_k}^{\alpha_k}$ в $Z(\mathscr{A}_0)\backslash[\mathscr{A}_0, \mathscr{A}_0]$. Рассмотрим произвольные элементы $b_0 = x_{j_1}^{\beta_1} \cdot x_{j_2}^{\beta_2} \cdot \ldots \cdot x_{j_l}^{\beta_l}$ и $b_1 = x_{r_1}^{\gamma_1} \cdot x_{r_2}^{\gamma_2} \cdot \ldots \cdot x_{r_s}^{\gamma_s}$, которые коммутируют. Заметим, что сомножители из представления элемента b_0 коммутируют с сомножителями из представления элемента b_1, т. е. $[x_{j_n}, x_{r_m}]^{\beta_n + \gamma_m} = 1$ или $[x_{j_n}, x_{r_m}] = 1$ для всех $1 \le n \le l$, $1 \le m \le s$. Так как элемент a коммутирует со всеми элементами группы, то для x_{i_t}, где $1 \le t \le k$, имеет место соотношение $[x_{i_t}, x_{j_n}] = 1$ и $[x_{i_t}, x_{r_m}] = 1$. Это условие означает, что на графе $\mathscr{A}$ выполняются отношения $F(x_{i_t}, x_{j_n}), F(x_{i_t}, x_{r_m})$ и $F(x_{j_n}, x_{r_m})$, а это противоречит свойству (ii) графа $\mathscr{A}$. Следовательно, центр группы совпадает с коммутантом группы.

Рассмотрим свободную абелеву группу $\mathscr{M}$ экспоненты p, порожденную базой $\{[x_i, x_j] : i < j,\ \mathscr{A} \models \neg F(x_i, x_j)\}$. Данная группа является $\mathbf{d}$-вычислимой и совпадает с коммутантом группы. Группа $\mathscr{A}'_0$, являющаяся фактор-группой $\mathbf{d}$-вычислимой группы $\mathscr{A}_0$ по $\mathbf{d}$-вычислимой абелевой подгруппе $\mathscr{M}$, есть $\mathbf{d}$-вычислимая группа.

Покажем, что отношение $\bar{a} \sim \bar{b}$, введенное на элементах фактор-группы $\mathscr{A}'_0$, является $\mathbf{d}$-вычислимым. Пусть $\bar{a} \sim \bar{b}$. Тогда по определению этой эквивалентности централизаторы элементов a и b в группе $\mathscr{A}_0$ совпадают. Отношение $\neg(\bar{a} \sim \bar{b})$ определяется $\exists$-формулой

$$\exists h(([a,h] \neq 1 \wedge [b,h] = 1) \vee ([a,h] = 1 \wedge [b,h] \neq 1)).$$

Пусть даны два фиксированных элемента $\bar{a}$, $\bar{b}$ такие, что $\bar{a} \sim \bar{b}$, и имеются представления элементов $a = x_{i_1}^{\alpha_1} \cdot x_{i_2}^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot x_{i_k}^{\alpha_k} \cdot g'_0$ и $b = x_{j_1}^{\beta_1} \cdot x_{j_2}^{\beta_2} \cdot \ldots \cdot x_{j_l}^{\beta_l} \cdot g'_1$. Пусть h — произвольный элемент вида $h = x_{r_1}^{\gamma_1} \cdot x_{r_2}^{\gamma_2} \cdot \ldots \cdot x_{r_s}^{\gamma_s} \cdot g'_2$, который коммутирует с элементами a, b, где g'_0, g'_1, g'_2 — коммутаторы. Рассмотрим коммутатор

$$[a,h] = \prod_{1 \le n \le k, 1 \le t \le s} [x_{i_n}, x_{r_t}]^{\alpha_n + \gamma_t} \cdot [x_{i_n}, g'_1]^{\alpha_n} \cdot [g'_0, x_{r_t}]^{\gamma_t} = \prod_{1 \le n \le k, 1 \le t \le s} [x_{i_n}, x_{r_t}]^{\alpha_n + \gamma_t}.$$

Предположим, что для всех n, t таких, что $1 \le n \le k$, $1 \le t \le s$, справедливо $\alpha_n + \gamma_t \neq \operatorname{mod} p$. Имеем

$$[a,h] = 1 \text{ тогда и только тогда, когда } \prod_{1 \le n \le k, 1 \le t \le s} [x_{i_n}, x_{r_t}] = 1.$$

Следовательно, каждый коммутатор из данного произведения равен 1.

Аналогично

$$[b,h] = 1 \text{ тогда и только тогда, когда } \prod_{1 \le m \le l, 1 \le t \le s} [x_{j_m}, x_{r_t}] = 1.$$

Для простоты вычислений предположим, что $a = x_i^\alpha \cdot g_0'$, $a = x_j^\beta \cdot g_1'$ и элемент h коммутирует с этими элементами. Тогда $[a,h] = [b,h] = 1$ тогда и только тогда, когда $[x_i, x_{r_t}] = 1$ и $[x_j, x_{r_t}] = 1$ для всех t таких, что $1 \le t \le s$.

Рассмотрим следующие случаи.

(а) Пусть $i \ne j$ и $[x_i, x_j] = 1$. Тогда в графе $\mathscr{A}$ имеют место отношения $F(x_i,x_j)$,$F(x_i,x_{r_1})$, $F(x_j,x_{r_t})$, где $1 \le t \le s$. В силу свойства (ii) графа $\mathscr{A}$ такая ситуация невозможна.

(б) Пусть $i \ne j$ и $[x_i, x_j] \ne 1$. Тогда в силу (i) и (iii) графа $\mathscr{A}$ найдется элемент x_q такой, что $F(x_q,x_i), F(x_i,x_{r_t}), F(x_j,x_{r_t}), \neg F(x_j,x_q)$. Тогда в группе $\mathscr{A}_0$ выполняются отношения

$$[x_q, x_i] = 1, \quad [x_i, x_{r_t}] = 1, \quad [x_j, x_{r_t}] = 1, \quad [x_j, x_q] \ne 1.$$

Следовательно, $[x_q, x_i] = 1$ и $[x_j, x_q] \ne 1$, т. е. централизаторы элементов a и b не совпадают. Таким образом, отношение $\bar a \sim \bar b$ неверно.

(в) Пусть $i = j$. Тогда

$$a = x_i^\alpha \cdot g_0', \quad a = x_i^\beta \cdot g_1'$$

и централизаторы этих элементов совпадают, т. е. $\bar a \sim \bar b$.

Мы показали, что $\bar a \sim \bar b$ тогда и только тогда, когда существуют целые положительные числа $\alpha, \beta < p$ такие, что $a^\alpha = b^\beta$. Таким образом, отношение $\bar a \sim \bar b$ является $\mathbf{d}$-вычислимым.

Пусть $G_2 = \{[\bar g] : \Psi_0(g)\}$, где $[\bar g]$ — классы эквивалентности на $\mathscr{A}_0'$ по отношению $\sim$, и пусть $\overline{F}(x,y)$ — отношение на множестве $(\mathscr{A}_0' \setminus \bar 1)/\sim$, определенное следующим образом: $\overline{F}([\bar a)], [\bar b])$, если $[a,b] = 1$ в группе $\mathscr{A}_0$. Тогда фактор-структура $\mathscr{G}_2^{\mathscr{A}_0} = \langle G_2, \overline{F}\rangle$ является $\mathbf{d}$-вычислимой. Лемма доказана.

Лемма 5. *Для любой $\mathbf{d}$-вычислимой группы $\mathscr{A}_0'$ сигнатуры σ, $\mathbf{d}$-изоморфной $\mathbf{d}$-вычислимой структуре $\mathscr{A}_0$, найдется $\mathbf{d}$-вычислимая структура $\mathscr{A}'$ сигнатуры σ_0 такая, что $\mathbf{d}$-вычислимая структура $\mathscr{A}_0''$, соответствующая $\mathscr{A}'$, есть структура сигнатуры σ, $\mathbf{d}$-изоморфная $\mathbf{d}$-вычислимой структуре $\mathscr{A}_0$.*

Доказательство. Пусть $\mathscr{A}_0'$ — $\mathbf{d}$-вычислимая структура сигнатуры σ и φ — изоморфизм из $\mathscr{A}_0$ на $\mathscr{A}_0'$. Рассмотрим $\mathbf{d}$-вычислимо перечислимое формульное подмножество $\mathscr{G}_2^{\mathscr{A}'_0}$. Пусть f — $\mathbf{d}$-вычислимое одно-однозначное отображение множества $\left|\mathscr{G}_2^{\mathscr{A}_0}\right|$ на ω. Рассмотрим произвольное $\mathbf{d}$-вычислимое одно-однозначное отображение f_1 множества $\left|\mathscr{G}_2^{\mathscr{A}'_0}\right|$ на ω. Пусть $\psi = \varphi \restriction \mathscr{G}_2^{\mathscr{A}_0}$. Тогда отображение μ такое, что $\mu = f_1 \cdot \psi \cdot f_0$, будет $\mathbf{d}$-вычислимой нумерацией графа $A' = \langle |A|, F'\rangle$ и имеют место соотношения $F(i,j) \Leftrightarrow F(\mu(i),\mu(j))$ и $F'(i,j) \rightleftharpoons F(\mu(i),\mu(j))$. Тогда группа A'', построенная описанным выше способом, имеет $\mathbf{d}$-вычислимое представление ν_μ и $\mathbf{d}$-изоморфна группе $\mathscr{A}_0$. Данный изоморфизм индуцируется отображением μ. Лемма доказана.

Следствие 1. *Существует автоустойчивая двуступенно нильпотентная группа простой экспоненты p.*

Следствие 2. *Существует автоустойчивая двуступенно нильпотентная группа без кручения.*

Доказательство. Рассмотрим две вычислимые копии G_0, G_1 группы G. Пусть ν_0, ν_1 — два вычислимых представления графа $\mathscr{G}$, по которым построены вычислимые группы G_0 и G_1, т. е. одно-однозначные отображения на инвариантные формульные подмножества $C(G_0)$, $C(G_1)$, которые являются базисами групп G_0 и G_1. Так как граф $\mathscr{G}$ вычислимо категоричен, существует вычислимая перестановка p множества ω такая, что $\nu_0(n) = \nu_1(p(n))$ для всех $n \in \omega$. Тогда структуры $\mathscr{C}_i \rightleftharpoons \langle C(G_i), F_i\rangle$ для $i \in \{0,1\}$, где $F_i(x,y) \Leftrightarrow G_i \models ([x,y]=1)$, изоморфны посредством вычислимой перестановки p следующим образом: для $i \in \{0,1\}$ и $n \in \omega$ определим отображение $x^i_{\nu_i(n)} \mapsto x^{C_i}_n$, где элементы $x^i_n \in \mathscr{G}_i$ и $x^{C_i}_n$ из структуры $\mathscr{C}_i$. Изоморфизм структур $\mathscr{C}_i$ продолжается до изоморфизма групп G_i. При $p = 0$ построенная группа является группой без кручения. Следствия доказаны.

§ 3. Частичная элиминация кванторов формул языка теории групп

Мы показали, что структура $\mathscr{F} \rightleftharpoons \langle|\mathscr{G}_2|, \overline{F}\rangle$ изоморфна графу $\mathscr{A}$. Рассмотрим множество $C(\mathscr{A}_0)$ представителей a каждого класса $[\bar{a}]$ элементов $\mathscr{G}_2$ и определим отношение $F^*(x,y)$ на элементах из $C(\mathscr{A}_0)$ следующим образом: $F^*(a,b) \Leftrightarrow \mathscr{A}_0 \models [a,b]=1$. Пусть $G \rightleftharpoons \mathscr{A}_0$.

Лемма 1 (о представлении). *Для любого элемента x, где $x \in \bar{x}$ и $\bar{x} \in G_0$, эффективно определяется его представление в виде $x = x^{\alpha_0}_{i_0} \cdot \ldots \cdot x^{\alpha_m}_{i_m}$, где элементы x_i, $0 \le i \le m$, из базиса группы G и $0 < \alpha_0, \ldots, \alpha_m < p$.*

Доказательство. Пусть $A \rightleftharpoons \{x_i : i \in \omega\}$, где x_i — представитель $\bar{x}_i$, $\bar{x}_i$ — представитель элемента $[\bar{x}_i]$ из $\mathscr{G}_2$ и для любого $y \in \bar{x}_i$ имеет место $y = x^{\alpha}_i$, где $0 < \alpha < p$. Данное множество является базисом группы G_A. Зафиксируем вычислимое представление группы G_A с базисом A. Тогда по любому элементу группы можно эффективно определить его представление через элементы базиса.

Используем результаты из предыдущего параграфа.

Случай 1. Пусть $|[\bar{x}]| = p-1$ и существует y такой, что $[\bar{x}] \ne [\bar{y}]$ и $[x,y]=1$. Тогда $x = x^{\alpha}_i$ для некоторого α такого, что $1 \le \alpha \le p-1$, и x_i из базиса группы G_A.

Случай 2. Пусть $|[\bar{x}]| = (p-1)^2$, тогда существуют различные элементы x_0, x_1, $[x_0,x_1]=1$, базиса группы G_A и числа α_0, α_1, $1 \le \alpha_0, \alpha_1 \le (p-1)$, такие, что $x = x^{\alpha_0}_0 \cdot x^{\alpha_1}_1$.

Случай 3. Пусть $|[\bar{x}]| = p \cdot (p-1)$, тогда существуют элементы x_0, x_1 и y из базиса группы G_A такие, что

$$x = x^{\alpha_0}_0 \cdot x^{\alpha_1}_1 \quad \text{и} \quad [x_0,x_1] \ne 1, \quad [x_0,y]=1, \quad [x_1,y]=1.$$

Случай 4. Пусть не выполнены случаи 1–3. Тогда для элемента x найдется элемент y группы $G_A - Z(G_A)$ такой, что $[x,y]=1$. В качестве представления элемента x через базис A рассмотрим уже известное представление элемента y группы G_A. Лемма доказана.

Вернемся к рассмотрению построенного выше графа. В работе [6] дано описание метода, позволяющего элиминировать кванторы формул языка графов. Далее мы используем этот метод для элиминации кванторов формул языка групп. Рассмотрим неформальное описание графа. *Особыми точками* назовем точки c_i, $i \in \omega$, с каждой из которых связаны петли длины, кратной числу 7. С каждой точкой c_i связана петля длины $k+1$ тогда и только тогда, когда $k \in A_i$, где $A_i \in S$. Каждая точка c_i выделяет связную компоненту графа $\mathscr{G}$. *Расстоянием $d(x,y)$ между вершинами x,y* из одной компоненты назовем наименьшую длину пути между ними. Если вершины x,y из разных компонент, то $d(x, y) = \infty$. При неявной ориентации петель компоненты графа по типу движения часовой стрелки будем различать отсчет от точки вправо (прямо) и отсчет от точки влево (обратно).

Введем конечные подструктуры графа вида $N_k(\bar{x})$, которые порождены конечным множеством $\bar{x}$ элементов из $\mathscr{G}$. О порожденном множестве $N_k(\bar{x})$ можно сказать следующее:

1) оно равно $\{y : d(x, y) \leq 7^k, x \in \bar{x}\}$, если между x, y не встречается особой точки,

2) если при отсчете от точки x прямо или обратно на расстояние 7^k встречается особая точка c, то добавим в основное множество, определенное в п. 1, все точки до c, включая саму точку c,

3) проведем процедуру, которую мы проводим для случая $c \in \bar{x}$, т. е. добавим в определенное до этого момента в пп. 1, 2 множество дополнительно множество петель длины $\leq 7^k$, связанных с особой точкой c, а также не более k штук исходящих из c и не содержащих $x \neq c : x \in \bar{x}$ лучей длины 7^k и не более k штук входящих в c и не содержащих $x : x \in \bar{x}$ лучей длины 7^k.

Если c-связная компонента конечна, то процедуру добавления лучей в основное множество проводим максимально до k штук в одну и k штук в другую стороны.

Определим класс $\mathscr{N}_k(\bar{x})$ конечных подструктур графа вида $N_k(\bar{x})$, порожденных множеством $\bar{x}$. Перечислим основные свойства структур $N_k(\bar{x})$ [1].

1. Каждая из структур содержит конечное множество особых точек.
2. Если c — особая точка и $c \in N_k(\bar{x})$, то $N_k(c) \subseteq N_{k+1}(\bar{x})$.
3. Если $d(a, x_i) < 7^k$ для некоторого $x_i \in \bar{x}$, то существует структура $N_k(\bar{x})$ из $\mathscr{N}_k(\bar{x})$ такая, что $a \in N_k(\bar{x})$.
4. Если $a \in N_k(\bar{x})$, то для некоторого $x_i \in \bar{x}$ имеет место $d(a, x_i) \leq 2 \cdot 7^k$.
5. Если $d(a, x_i) \leq 4 \cdot 7^k$ для некоторого $x_i \in \bar{x}$, то $N_k(a) \subseteq N_{k+1}(\bar{x})$.
6. Если $d(a, x_i) > 4 \cdot 7^k$ для всех $x_i \in \bar{x}$, то $N_k(a) \cap N_k(\bar{x}) = \varnothing$.
7. Если $N_k(a) \cap N_k(\bar{x}) \neq \varnothing$, то $a \in N_{k+1}(\bar{x})$.

Пусть дан конечный граф $\mathscr{G}(\bar{x})$, где $\bar{x}$ — конечное множество выделенных элементов x. Основное множество такого конечного графа описывается конечной Σ_2-формулой

$$\psi(y, \bar{x}) \rightleftharpoons \exists z_0 \dots \exists z_k \Big(\bigvee_{0 \leq i \leq k} y = z_i \wedge \bigwedge_{x \in \bar{x}} y \neq x \wedge \forall u \Big(\Big(\bigwedge_{0 \leq i \leq k} u \neq z_i \wedge \bigwedge_{x \in \bar{x}} u \neq x \Big) \to u \neq y \Big) \Big).$$

Для каждого числа k и пары $\bar{x}, \bar{y}$ одинаковой длины будем говорить, что структуры $N_k(\bar{x})$ и $N_k(\bar{y})$ *изоморфны*, если существует изоморфизм $\varphi : G(\bar{x}) \to G(\bar{y})$ такой, что $\varphi(\bar{x}) = \bar{y}$.

Определим отношение эквивалентности следующим образом: для каждого k и пары кортежей $\bar{x}$ и $\bar{y}$ одинаковой длины определим отношение $\bar{x} E_k \bar{y}$ тогда и только тогда, когда $N_k(\bar{x}) \cong N_k(\bar{y})$.

Лемма 2 [6]. *Пусть $\bar{x} E_{k+1} \bar{y}$ и a — произвольная вершина из графа $\mathscr{G}$. Тогда существует вершина $b \in |\mathscr{G}|$ такая, что $\bar{x} a E_k \bar{y} b$.*

Лемма 3. *Для любых $k \geq 0$ и $n > 0$ число классов эквивалентности вида $\tilde{x} = \{\bar{y} : \bar{x} E_k \bar{y}\}$, где $n = \ln(\bar{x})$, конечно.*

Доказательство. Обозначим через $e(x)$ число k такое, что $x = x^k_{i,j}$ для некоторых $i, j \in \omega$, и пусть

$$e(\bar{x}) = \{k_i : e(x_i) = k_i, x_i \in \bar{x}\}.$$

Из условия $\bar{x}E_k\bar{y}$ следует, что $e(\bar{x}) = e(\bar{y})$. Пусть существует бесконечно много $\bar{y}$ таких, что $e(\bar{x}) = e(\bar{y})$. Тогда согласно описанию семейства S из теоремы 3 существуют множество A_d из S, которое бесконечно и содержит $e(\bar{x})$, и бесконечная последовательность множеств $\{A_{d_i} : i \in \omega\}$ из S, которые содержат $\bar{x}$. Пусть $\{\bar{y}_i : e(\bar{y}_i) = e(\bar{x})\}$ и $\bar{y}_i$ содержатся в связных компонентах графа, определенных особыми точками c_i'.

Пусть $\bar{x} = \{x_0, \dots, x_m, x_{m+1}, \dots, x_{n-1}\}$, $d(c_d, x_j) \leq 7^k$ и для всех $i > m$ имеет место $d(c_d, x_i) > 7^k$. Пусть $\bar{y}_i \subseteq A_{d_i}$, определим множество $\{(d_i, t_i) : A_{d,t_i} \subseteq A_{d_i,t_i+1}\}$ так, что для всех i имеет место $d_i < d_{i+1}$. С каждым c_i', где $i < k$, связаны кроме петель, лучей (исходящих, входящих) и интервалов, содержащих $y \in \bar{y}_i$, еще $i+1$ штук петель длины $\leq 7^k$, исходящих лучей длины 7^k; затем к каждому исходящему лучу добавим входящий луч длины 7^k. Пусть m — наименьшее число такое, что с особой точкой c_m' связаны $2k$ штук лучей длины 7^k, которые не содержат элементов из $\bar{y}_m$. Тогда для $0 \leq i < j \leq m$ имеем $N_k(\bar{y_i}) \not\cong N_k(\bar{y_j})$, так как каждое из $N_k(\bar{y_i})$, $N_k(\bar{y_j})$ содержит разное число петель и лучей, в которых нет точек из соответствующих $\bar{y}_i$ и $\bar{y}_j$. Для всех $i \geq m$ будет $N_k(\bar{x}) \cong N_k(\bar{y}_i)$. Таким образом, существует m неэквивалентных классов. Лемма доказана.

Пусть G' — произвольная конечная группа. Тогда для каждого элемента g из G по лемме о представлении существуют базисные элементы для представления элемента g. Каждая такая группа описывается конечной Σ_2-формулой подобно записи формулы ψ для графа $\mathscr{G}(\bar{x})$. Пусть $\bar{x}$ — множество всех базисных элементов, участвующих в записи выделенных элементов $\bar{y}$ группы G'. Тогда данную группу $(G', \bar{y})$ будем обозначать через $G'(\bar{x})$. Далее будем рассматривать конечные группы только с такой записью. Группа $H_k(\bar{x})$ строится как 2-ниль-группа экспоненты p с базисным множеством $N_k(\bar{x})$ и множеством определяющих соотношений $\{[x_i, x_j] = 1 : F(x_i, x_j) \wedge\, x_i, x_j \in N_k(\bar{x})\}$.

Описания графа $\mathscr{A}$ и группы $\mathscr{A}_0$ и лемма 1 о представлении позволяют перенести свойства и понятия графов на группы: связность вершин графа переходит в коммутативность произведений базисных элементов; на множестве базисных элементов сохраняются понятия петли, луча, расстояния между элементами, которые уже определяются через коммутаторы.

Введем отношение эквивалентности на конечных множествах элементов $\bar{x}$ и $\bar{y}$ из группы G следующим образом: для каждого k и пар кортежей $\bar{x}$ и $\bar{y}$ одинаковой длины определим отношение, полагая $\bar{x}\mathscr{E}_k\bar{y}$ тогда и только тогда, когда $H_k(\bar{x}) \cong H_k(\bar{y})$.

Замечание. Лемма о представлении позволяет рассматривать только конечные множества элементов $\bar{x}$ и $\bar{y}$ из базиса группы G. В дальнейшем множества элементов $\bar{x}$ и $\bar{y}$ выбираются из базиса группы.

Лемма 4. *Пусть $\bar{x}\mathscr{E}_{k+1}\bar{y}$ и a — произвольный элемент группы G. Тогда существует элемент b группы G такой, что $\bar{x}a\mathscr{E}_k\bar{y}b$.*

Доказательство. Определим формульные множества $C(\bar{x})$ и $C(\bar{y})$ групп $H_k(\bar{x})$, $H_k(\bar{y})$, которые изоморфны $N_k(\bar{x})$ и $N_k(\bar{y})$ соответственно. Из изоморфизма групп $H_k(\bar{x})$ и $H_k(\bar{y})$ следует изоморфизм $C(\bar{x})$ и $C(\bar{y})$, поэтому структуры $N_k(\bar{x})$ и $N_k(\bar{y})$ также изоморфны. Это означает, что $\bar{x}E_k\bar{y}$. Пусть $a \in \bar{a}$, $\bar{a} \in [\bar{a}]$, $[\bar{a}] \in C(\bar{x})$ и для любого $b \in \bar{a}$ существует α, $0 < \alpha < p$, такое, что $b = a^{\alpha}$. Тогда a является вершиной графа $\mathscr{G}$. По лемме 2 для произвольной вершины a графа $\mathscr{G}$ из условия $\bar{x}E_{k+1}\bar{y}$ следует существование вершины $b \in |\mathscr{G}|$ такой, что

$\bar{x}aE_k\bar{y}b$. Тогда в силу предложения 1 группы, построенные по графам $\mathscr{G}(\bar{x}a)$ и $\mathscr{G}(\bar{y}b)$, изоморфны, т. е. имеет место отношение $\bar{x}a\mathscr{E}_k\bar{y}b$. Лемма доказана.

Лемма 5. *Для любых $k \geq 0$ и $n > 0$ число классов эквивалентности вида $\hat{x} = \{\bar{y} : \bar{x}\mathscr{E}_k\bar{y}\}$, где $n = ln(\bar{x})$, конечно.*

Доказательство. Группа $H_k(\bar{x})$ есть

$$\Big(\mathscr{N}_2^p \prod_{m \in |N_k(\bar{x})|} \langle m\rangle\Big)/\mathscr{N}_k^*(\bar{x}), \text{ где } \langle m\rangle \simeq C_p, \mathscr{N}_k^*(\bar{x}) = \langle [m_i, m_j] : F(m_i, m_j)\rangle.$$

Пусть $H_k'(\bar{x}) \rightleftharpoons H_k(\bar{x})/Z(H_k(\bar{x}))$ — фактор-группа по центру. Определим отношение эквивалентности $\bar{a} \sim \bar{b}$ на множестве $H_k'(\bar{x}) - \bar{1}$ следующим образом: для любого $c \in H_k(\bar{x})$

$$H_k(\bar{x}) \models [a, c] = 1 \Leftrightarrow H_k(\bar{x}) \models [b, c] = 1.$$

Пусть $\overline{H}_k(\bar{x}) \rightleftharpoons (H_k'(\bar{x}) - \bar{1})/\sim$. Рассмотрим множество

$$H_k^*(\bar{x}) \rightleftharpoons \{[\bar{a}] : \exists[\bar{b}] \in \overline{H}_k(\bar{x})(H_k(\bar{x}) \models [a, b] = 1)\}.$$

Оно формульно определимо и изоморфно множеству $N_k(\bar{x})$ как структура $\langle H_k^*(\bar{x}), F^*\rangle$, где

$$F^*([\bar{a}], [\bar{b}]) \Leftrightarrow H_k(\bar{x}) \models [a, b] = 1.$$

Пусть S — множество представителей $\{a : a \in \bar{a} \wedge a \bar{\in} [\bar{a}] \wedge [\bar{a}] \in H_k^*(\bar{x})\}$, взятых по одному из каждого класса $[\bar{x}]$, тогда S является формульным множеством и базисом группы $H_k(\bar{x})$. Утверждение леммы вытекает теперь из леммы 3. Лемма доказана.

Следуя Ходжесу [8], определим условие для метода перекидки.

Определение. Пусть $\bar{c}$ — фиксированное конечное множество (возможно, пустое) констант из G. Предположим, что $\mathscr{E}_k^{\bar{c}}$, где $k \in \omega$, есть произвольное семейство отношений эквивалентностей на конечных последовательностях элементов группы $(G, \bar{c})$, обогащенной константами из $\bar{c}$. Тогда $\{\mathscr{E}_k^{\bar{c}} : k \in \omega\}$ образуют ранжированную систему отношений эквивалентности для метода «перекидки» (back-and-forth) для $(G, \bar{c})$, если выполняются следующие свойства.

1. Если $\bar{x}\mathscr{E}_0^{\bar{c}}\bar{y}$, то для всех атомных формул $\psi(\bar{u})$ языка теории групп с выделенными константами $\bar{c}$ имеет место условие

$$(G, \bar{c}) \models \psi(\bar{x}) \Leftrightarrow (G, \bar{c}) \models \psi(\bar{y}).$$

2. Если $\bar{x}\mathscr{E}_{k+1}^{\bar{c}}\bar{y}$ и a из G, то существует b из G такой, что $\bar{x}a\mathscr{E}_{k+1}^{\bar{c}}\bar{y}b$.

Лемма [8]. *Пусть $\{\mathscr{E}_k^{\bar{c}} : k \in \omega\}$ образует ранжированную систему для метода «перекидки» для $(G, \bar{c})$ и для любых k и n отношение эквивалентности $\mathscr{E}_k^{\bar{c}}$ имеет конечное число классов эквивалентности относительно последовательностей элементов длины n в G. Предположим, что каждый из этих классов может быть определен формулой языка теории групп с новыми константами из $\bar{c}$. Пусть $\Psi^{\bar{c}}$ — множество таких формул. Тогда любая формула в языке теории групп с константами из $\bar{c}$ эквивалентна булевой комбинации формул из $\Psi^{\bar{c}}$ над $(G, \bar{c})$.*

Доказательство. Проверим выполнение свойств ранжированной системы отношений для группы. Пусть $\bar{c}$ — пустой список констант. Тогда семейство

$\{\mathscr{E}_k : k \in \omega\}$ удовлетворяет условиям определения ранжированной системы отношений для $(G, \bar{c})$. По определению $\bar{x}\mathscr{E}_0\bar{y}$ имеет место тогда и только тогда, когда группы с базисами $\bar{x}$ и $\bar{y}$ изоморфны. Атомная формула языка теории групп утверждает только то, что два элемента группы коммутируют или нет. Таким образом, первое условие определения имеет место. Второе условие выполняется в силу леммы 4.

Для любого конечного списка констант $\bar{c}$ через $\mathscr{E}_k^{\bar{c}}$ обозначим отношение $\bar{x}\mathscr{E}_k^{\bar{c}}\bar{y} \Leftrightarrow \bar{x}\bar{c}\mathscr{E}_k\bar{y}\bar{c}$. Ясно, что таким образом определенное семейство $\{\mathscr{E}_k^{\bar{c}} : k \in \omega\}$ удовлетворяет условиям определения ранжированной системы для $(G, \bar{c})$. По лемме 5 для любых n и k число классов эквивалентности вида $\hat{x} = \{\bar{y} : \bar{x}\mathscr{E}_k\bar{y}\}$, где $n = \ln(\bar{x})$, конечно и каждый такой класс описывается некоторой Σ_2-формулой языка теории групп с новыми константами из $\bar{c}$. Пусть $\Gamma^{\bar{c}}$ — множество всех формул, описывающих все эти классы. Лемма доказана.

Таким образом, мы доказали

Следствие 3. *Пусть $\bar{c}$ — конечное множество констант* (*возможно, пустое*) *из G. Тогда любая формула $\theta(\bar{x})$ с константами из $\bar{c}$ эквивалентна в G булевой комбинации формул из $\Gamma^{\bar{c}}$.*

Теорема 4. *Существует автоустойчивая двуступенно нильпотентная группа экспоненты p без семейства Скотта, состоящего из конечных формул.*

Доказательство. Рассмотрим структуру $\mathscr{G}_2 = \langle G_2, \overline{F}\rangle$, описание которой дано в начале параграфа.

Предположим, что для группы G существует семейство Скотта Φ, состоящее из конечных формул языка теории групп. Тогда структура $\mathscr{G}_2$ имеет определимое семейство Скотта, состоящее из конечных формул языка структуры сигнатуры $\langle\overline{F}\rangle$, и, следовательно, граф $\mathscr{A}$ также имеет определимое семейство Скотта, состоящее из конечных формул языка теории графов.

Пусть $\bar{c}$ — фиксированное конечное множество констант из группы G и $\phi(x, \bar{c})$ — булева комбинация формул из $\Gamma^{\bar{c}}$, которая записана в дизъюнктивной нормальной форме и принадлежит семейству Скотта для группы $(G, \bar{c})$. Пусть ϕ' — дизьюнктивный член вида

$$\theta_0(x,\bar{c}) \wedge \theta_1(x,\bar{c}) \wedge \ldots \wedge \theta_n(x,\bar{c}) \ \wedge \neg\delta_0(x,\bar{c}) \wedge \neg\delta_1(x,\bar{c}) \wedge \ldots \neg\delta_m(x,\bar{c}),$$

где каждая из формул $\theta_i(x, \bar{c})$ и $\delta_i(x, \bar{c})$ описывает конечную группу вида $M_k(\bar{xc})$ для некоторого $k \in \omega$.

Каждой группе $M_k(\bar{xc})$ соответствует граф $N_k(\bar{xc})$, который описывается конечной формулой вида $\vartheta(x, \bar{c})$.

Пусть $\psi_\phi(x, \bar{c})$ — булева комбинация формул вида $\vartheta(x, \bar{c})$, соответствующая формулам вида $\theta_i(x, \bar{c})$ и $\delta_i(x, \bar{c})$, описывающих $M_k(\bar{xc})$. Тогда $\psi_\phi(x, \bar{c})$ является формулой из семейства Скотта для графа $(\mathscr{A}, \bar{c})$. Таким образом, существует взаимно однозначное соответствие между формулами языка теории графов $\mathscr{A}$ и формулами языка структуры $\mathscr{G}_2$ сигнатуры $\langle\overline{F}\rangle$. Так как граф $\mathscr{A}$ не имеет в. п. определимого семейства Скотта, состоящего из конечных формул, то и структура $\mathscr{G}_2$ не имеет определимого семейства Скотта, состоящего из конечных формул языка структуры сигнатуры $\langle\overline{F}\rangle$. Таким образом, группа G не имеет в. п. семейства Скотта, состоящего из конечных формул. Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ash C. J., Knight J. F., Manasse M., Slaman T.* Generic copies of countable structures // Ann. Pure Appl. Logic. 1989. V. 42, N 3. P. 195–205.

2. *Chisholm J.* Effective model theory versus recursive model theory // J. Symbolic Logic. 1990. V. 55, N 3. P. 1168–1191.
3. *Гончаров С. С.* О числе неавтоэквивалентных конструктивизаций // Алгебра и логика. 1977. Т. 16, № 3. С. 257–282.
4. *Гончаров С. С.* Автоустойчивость и вычислимые семейства конструктивизаций // Алгебра и логика. 1975. Т. 14, № 6. С. 647–680.
5. *Кудинов О. В.* Автоустойчивая 1-разрешимая модель без вычислимого семейства Скотта $\exists$-формул // Алгебра и логика. 1996. Т. 35, № 4. С. 458–467.
6. *Cholak P., Shore R. A., Solomon R.* A computably stable structure with no Scott family of finitary formulas // Arch. Math. Logic. 2006. V. 45, N 5. P. 519–539.
7. *Тусупов Д. А.* Изоморфизмы, определимые отношения и семейства Скотта двуступенно нильпотентных групп // Алгебра и логика. 2007. Т. 46, № 4. С. 514–524.
8. *Hodges W.* Model Theory. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1993.

Статья поступила 22 декабря 2006 г.

Тусупов Джамалбек Алиаскарович
Казахский национальный университет им. аль-Фараби,
механико-математический факультет,
кафедра геометрии, алгебры и математической логики,
ул. Масанчи, 39/47, Алматы 050012, Казахстан
tusupov@gorodok.net; tussupov@mail.ru