Сибирский математический журнал
Сентябрь—октябрь, 2007. Том 48, № 5

УДК 517.53

ЦЕЛЫЕ ФУНКЦИИ С ЗАДАННОЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬЮ НУЛЕЙ, ИМЕЮЩИЕ ПРАВИЛЬНОЕ ПОВЕДЕНИЕ НА ВЕЩЕСТВЕННОЙ ОСИ. I

А. М. Гайсин, Д. И. Сергеева

Аннотация: Показано, что если возрастающая до бесконечности последовательность положительных чисел имеет S-плотность, то ее можно дополнить до некоторой последовательности, являющейся нулевым множеством произведения Вейерштрасса с регулярным поведением на вещественной оси.

Ключевые слова: произведение Вейерштрасса, класс Картрайт.

Введение

В задачах аппроксимации линейными комбинациями экспонент $e^{\lambda_n z}$ $(n \geq 1)$ на различных множествах комплексной плоскости, в теории рядов Дирихле $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n e^{\lambda_n z}$ особую роль играет бесконечное произведение (произведение Вейерштрасса)

$$Q(z) = \prod_{\lambda_n \in \Lambda} \left(1 - \frac{z^2}{\lambda_n^2}\right) \quad (0 < \lambda_n \uparrow \infty), \tag{1}$$

определяющее целую функцию экспоненциального типа.

В статье изучается поведение целых функций вида (1) на вещественной оси. Естественно ограничиться рассмотрением только тех последовательностей $\Lambda = \{\lambda_n\}$, которые имеют конечную верхнюю плотность

$$D = \varlimsup_{n\to\infty} \frac{n}{\lambda_n}.$$

Актуальность обсуждаемых здесь задач вызвана тем, что в общем случае функция Q может вести себя очень нерегулярно.

Имеет место

Теорема А [1, гл. I, § 2, п. 7]. *Пусть последовательность* Λ *имеет конечную плотность*

$$\sigma = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{\lambda_n}.$$

Тогда для функции Q*, заданной формулой* (1)*, верны утверждения:*

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 05–01–00417–а).

© 2007 Гайсин А. М., Сергеева Д. И.

1) *для* $z = re^{i\theta}$ $(\theta \neq 0, \pi)$ *существует предел*

$$\lim_{r\to\infty} \frac{\ln|Q(re^{i\theta})|}{r} = \pi\sigma|\sin\theta|;$$

2) *имеются число* $p > 0$ *и последовательность* $\{r_n\}$, $0 < r_n \uparrow \infty$, $\frac{r_{n+1}}{r_n} \to 1$ *при* $n \to \infty$, *такие, что при любом* $\varepsilon > 0$

$$\ln|Q(re^{i\theta})| > [\pi\sigma|\sin\theta| - \varepsilon]r$$

для $r_n - p \le r \le r_n + p,\ n \ge N(\varepsilon)$;

3) *если дополнительно известно, что*

$$\lambda_{n+1} - \lambda_n \ge h > 0 \quad (n \ge 1), \tag{2}$$

то в качестве r_n *в п.* 2 *можно взять*

$$r_n = \frac{\lambda_n + \lambda_{n+1}}{2} \quad (n \ge 1);$$

4) *при условии* (2)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\lambda_n} \ln\left|\frac{1}{Q'(\lambda_n)}\right| = 0.$$

При дополнительных требованиях на распределение точек последовательности Λ можно получить более точные оценки (как сверху, так и снизу) для функции Q на вещественной оси.

Справедливы следующие теоремы (см., например, [2]).

Теорема B (Пэли, Винер, 1934 г.). *Пусть* $0 < \lambda_n \uparrow \infty$ *и*

$$|\lambda_n - n| \le d < \infty. \tag{3}$$

Тогда для функции

$$Q(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{\lambda_n^2}\right) \quad (z = x + iy)$$

справедливы оценки:

1) $|xQ(x)| \le \mathrm{const}\,|x|^{4d}$;

2) *для* $|x - \lambda_n| \ge \varepsilon > 0$ $(n \ge 1)$

$$|xQ(x)| \ge \mathrm{const}\,|x|^{-4d} \quad (|x| \ge 1).$$

Теорема C (Б. Я. Левин, 1949 г.). *Если выполняется условие* (3), *то*

$$|Q(z)| \le \mathrm{const}(1 + |z|^{4d})e^{\pi|y|}.$$

При условии $\inf\limits_{n\neq j} |\lambda_n - \lambda_j| > 0$

$$|Q'(\lambda_j)| \ge \mathrm{const}\,\lambda_j^{-4d} \quad (j \ge 1).$$

Отметим, что функция Q, удовлетворяющая условиям теорем B или C, принадлежит классу Картрайт. Напомним, что *классом Картрайт* называется множество целых функций $C = \{f\}$ экспоненциального типа, удовлетворяющих условию

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln^+|f(x)|}{1 + x^2}\,dx < \infty, \quad a^+ = \max(a, 0).$$

Через σ_f будем обозначать экспоненциальный тип функции f:

$$\sigma_f = \varlimsup_{|z|\to\infty} \frac{\ln|f(z)|}{|z|}.$$

Функции из класса C не могут вести себя слишком нерегулярно. Однако во многих случаях приходится предполагать, что сужения функций класса C на вещественную ось удовлетворяют некоторым дополнительным условиям «правильности роста». Эти условия обычно имеют следующий вид: существует неотрицательная и, например, возрастающая функция φ такая, что $\ln|f(x)| \le \varphi(x)$ и

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(x)}{1+x^2}\,dx < \infty. \tag{4}$$

В работе [3] показано, что существует четная целая функция f с вещественными нулями, принадлежащая классу C и обладающая свойством: для любой возрастающей функции $\varphi(x) \ge 0$, удовлетворяющей условию $\ln|f(x)| \le \varphi(x)$, интеграл (4) расходится.

Пусть L — класс положительных, непрерывных и неограниченно возрастающих на $\mathbb{R}_+ = [0,\infty)$ функций,

$$W = \left\{\omega \in L : \int_0^{\infty} \frac{\omega(x)}{1+x^2}\,dx < \infty\right\}.$$

В. И. Мацаев (1966 г.) доказал, что если существуют $a \ge 0$ и $h \in W$ такие, что

$$|n(t) - at| \le h(t), \quad n(t) = \sum_{\lambda_n \le t} 1, \tag{5}$$

то целая функция Q, определенная формулой (1), принадлежит классу C [4]. Из (5) видно, что последовательность Λ имеет плотность a. Так что при условии (5) сопряженной диаграммой функции Q является вертикальный отрезок $I_a = [-\pi ai, \pi ai]$. Через $\psi_n(t)$ $(n \ge 1)$ обозначим функцию, ассоциированную по Борелю с целой функцией

$$Q_n(\lambda) = \frac{Q(\lambda)}{(\lambda-\lambda_n)Q'(\lambda_n)} \quad (n \ge 1).$$

Функции $\psi_n(t)$, $\psi_n(\infty) = 0$, аналитичны вне отрезка I_a и образуют систему, биортогональную к системе экспонент $\{e^{\lambda_n z}\}$:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \psi_n(t) e^{\lambda_m t}\,dt = \delta_{n,m} = \begin{cases} 1, & \text{если } n = m, \\ 0, & \text{если } n \ne m. \end{cases}$$

Здесь C — граница прямоугольника

$$P = \{t : |\operatorname{Re} t| \le \delta,\ |\operatorname{Im} t| \le b\ (b > a)\}.$$

Во многих вопросах (например, в теории рядов Дирихле) полезно знать поведение функций $\psi_n(t)$ при $n \to \infty$ и $|\operatorname{Re} t| = \delta \to 0$. Поскольку при $|\operatorname{Re} t| = \delta$

$$|\psi_n(t)| \le \left|\frac{1}{Q'(\lambda_n)}\right| \int_0^{\infty} \left|\frac{Q(x)}{x-\lambda_n}\right| e^{-\delta x}\,dx,$$

видим, что требуемая оценка для ψ_n зависит от скорости убывания последовательности $\{Q'(\lambda_n)\}$ и оценки сверху для функции Q на вещественной оси. Отметим, что условие (5) еще не гарантирует какого-нибудь условия правильности роста функции Q на вещественной оси. Так, согласно теореме 54 из [2] имеет место утверждение: для любого a $(0 < a < 1)$ существует последовательность Λ натуральных чисел λ_n $(n \geq 1)$, для которой выполняется условие (5), но функция $\ln^+ |Q(x)|$ не имеет мажоранты из класса W.

Естественно возникает желание заменить функцию Q другой целой функцией P, имеющей достаточно правильное поведение на вещественной оси, причем такой, что $P(\lambda_n) = 0$, $P'(\lambda_n) \neq 0$. Для этого можно воспользоваться следующей теоремой Берлинга — Маллявена о мультипликаторе (см., например, [3]): для любой функции f из класса C и для любого $\varepsilon > 0$ существует мультипликатор — функция g экспоненциального типа $\sigma_g < \varepsilon$ такая, что

$$\sup_{\mathbb{R}} |g(x)| < \infty, \quad \sup_{\mathbb{R}} |f(x)g(x)| < \infty.$$

Согласно теореме о мультипликаторе для любого $\varepsilon > 0$ существует целая функция g экспоненциального типа $\sigma_g < \varepsilon$ такая, что

$$|g(x)| \leq M, \quad |Q(x)g(x)| \leq 1.$$

Но теорема Берлинга — Маллявена никакой информации о нулях функции $P(\lambda) = Q(\lambda)g(\lambda)$ не дает (доказательство теоремы неконструктивно). Поэтому в качестве биортогональной системы нет смысла рассматривать систему функций, ассоциированных по Борелю с функцией

$$P_n(\lambda) = \frac{P(\lambda)}{(\lambda - \lambda_n)P'(\lambda_n)} \quad (n \geq 1),$$

если даже $P'(\lambda_n) \neq 0$ $(n \geq 1)$. Дело в том, что последовательность $\{P'(\lambda_n)\}$ может стремиться к нулю сколь угодно быстро. Ситуация упрощается, если

$$\ln |Q(x)| \leq W(x), \quad w \in W. \tag{6}$$

В этом случае мультипликатор g имеет вполне конкретный вид [5], но, как отмечено выше, оценка (6), вообще говоря, может не выполняться, даже если имеет место условие (5).

В статье ставится и решается следующая задача: *при каких условиях на последовательность $\Lambda = \{\lambda_n\}$ существует целая функция P экспоненциального типа, $P(\lambda_n) = 0$, $P'(\lambda_n) \neq 0$, имеющая достаточно правильное поведение на вещественной оси*?

§ 1. Оценка произведения Вейерштрасса с правильным распределением нулей

Пусть $\Lambda = \{\lambda_n\}$ $(0 < \lambda_n \uparrow \infty)$ — последовательность, имеющая конечную верхнюю плотность. Тогда

$$Q(\lambda) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\lambda^2}{\lambda_n^2}\right) \quad (\lambda = x + iy)$$

— целая функция экспоненциального типа. Если существует предел

$$D = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{\lambda_n},$$

то говорят, что последовательность Λ *измерима и имеет плотность* D. Обозначим через K подкласс функций из класса L таких, что $h(0) = 0$, $h(t) = o(t)$ при $t \to \infty$, $\frac{h(t)}{t} \downarrow$ при $t \uparrow$.

Теорема 1. *Пусть последовательность* Λ *имеет плотность* D $(0 \le D < \infty)$, $\Lambda(t) = \sum\limits_{\lambda_n \le t} 1$. *Если для некоторой функции* $H \in K$

$$|\Lambda(u) - Du| \le H(u) \quad (u \ge 0), \tag{7}$$

то для любого $x \in \mathbb{R}$

$$\ln|Q(x)| \le 6H(x)\ln^{+}\frac{x}{H(x)} + A \quad (0 < A < \infty).$$

Доказательство. Можно проверить (см., например, [2]), что для $x \ne \lambda_n$ $(n \ge 1)$

$$\ln|Q(x)| = \int\limits_0^\infty \Lambda(u)K(x,u)\,du, \quad \int\limits_0^\infty uK(x,u)\,du = 0,$$

где $K(x,u) = \frac{2x^2}{u(x^2-u^2)}$ (интегралы понимаются в смысле главного значения). Следовательно, для всех $x \ne \lambda_n$ $(n \ge 1)$

$$\ln|Q(x)| = \int\limits_0^\infty [\Lambda(u) - Du]K(x,u)\,du. \tag{8}$$

Используя данное представление, оценим функцию $\ln|Q(x)|$ сверху. Функция Q четная. Поэтому достаточно рассмотреть случай $x > 0$. Заметим, что $K(x,u) < 0$ при $u > x$ и $K(x,u) > 0$, если $0 < u < x$. Так как $H(x) < \frac{x}{2}$ при $x \ge x_0 > 0$, то для $x \ne \lambda_n$ $(n \ge 1)$ имеем

$$I = \ln|Q(x)| = \left(\int\limits_0^{\lambda_1} + \int\limits_{\lambda_1}^{H} + \int\limits_{H}^{x-H} + \int\limits_{x-H}^{x+H} + \int\limits_{x+H}^{\infty}\right)[\Lambda(u) - Du]K(x,u)\,du$$

$$= \sum_{i=0}^{4} I_i, \quad H = H(x).$$

Далее вместо $H(x)$ в некоторых выражениях будем писать просто H.

Поскольку $\Lambda(u) = 0$ для $0 \le u < \lambda_1$, то при $x \to \infty$

$$I_0 = -2x^2 D\int\limits_0^{\lambda_1}\frac{du}{x^2-u^2} = -xD\ln\left|\frac{x+\lambda_1}{x-\lambda_1}\right| = O(1).$$

Значит, при $x \ge x_1 = \max(x_0, 2\lambda_1)$

$$|I_0| \le M_0 \quad (0 < M_0 < \infty). \tag{9}$$

Оценим I_1. Для этого воспользуемся условием (7) и тем обстоятельством, что $\frac{H(u)}{u} \downarrow$ при $u \uparrow$. При $x \ge x_1$, учитывая (7), (8), имеем

$$|I_1| \le 2x^2\int\limits_{\lambda_1}^{H}\frac{H(u)}{u}\frac{du}{x^2-u^2} \le \frac{H(\lambda_1)}{\lambda_1}x\ln\left(\frac{x+H}{x-H}\right)\left(\frac{x-\lambda_1}{x+\lambda_1}\right).$$

Следовательно, при $x \ge x_2 \ge x_1$

$$|I_1| \le M_1 H(x) \quad (0 < M_1 < \infty). \tag{10}$$

Далее, при $x \geq x_3 \geq x_2$

$$|I_2| \leq \int\limits_H^{x-H} |\Lambda(u) - Du|\, K(x,u)\, du \leq H(x) \int\limits_H^{x-H} \frac{2x^2}{u(x^2-u^2)}\, du$$

$$= H(x) \ln \left(\frac{x-H}{H}\right)^2 + H(x) \ln \frac{x^2-H^2}{2xH-H^2} \leq 3H(x) \ln \frac{x}{H(x)}. \quad (11)$$

Оценим I_3. Пусть $x \neq \lambda_n$ $(n \geq 1)$. Для любого ε $(0 < \varepsilon \leq 1)$ имеем

$$I_3 = \left(\int\limits_{x-H}^{x-\varepsilon} + \int\limits_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} + \int\limits_{x+\varepsilon}^{x+H}\right) [\Lambda(u) - Du] K(x,u)\, du = I_{31} + I_{32} + I_{33}.$$

Проверяется, что при $x \to \infty$

$$I_{31} \leq 2x^2 \left[\Lambda(x) \int\limits_{x-H}^{x-\varepsilon} \frac{Du}{u(x^2-u^2)} - D \int\limits_{x-H}^{x-\varepsilon} \frac{du}{x^2-u^2}\right] = O(H) + [\Lambda(x) - Dx] \ln \frac{H}{\varepsilon}.$$

Здесь величина $O(H)$ не зависит от ε.

Так как $x \neq \lambda_n$ $(n \geq 1)$, при $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0 \leq 1$ будет

$$I_{32} = 2x^2 \left[\Lambda(x) \int\limits_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} \frac{du}{u(x^2-u^2)} - D \int\limits_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} \frac{du}{x^2-u^2}\right]$$

$$= \Lambda(x) \ln \left(\frac{x+\varepsilon}{x-\varepsilon}\right)^2 \left(\frac{2x-\varepsilon}{2x+\varepsilon}\right) - Dx \ln \frac{2x+\varepsilon}{2x-\varepsilon},$$

так что $I_{32} = o(1)$ при $\varepsilon \to 0$ для любого $x \neq \lambda_n$ $(n \geq 1)$.

Наконец, при $x \to \infty$ имеем

$$I_{33} \leq 2x^2 \left[\Lambda(x) \int\limits_{x+\varepsilon}^{x+H} \frac{du}{u(x^2-u^2)} - D \int\limits_{x+\varepsilon}^{x+H} \frac{du}{x^2-u^2}\right]$$

$$= \Lambda(x) \ln \left(\frac{x+H}{x+\varepsilon}\right)^2 \left(\frac{2x+\varepsilon}{2x+H}\right) \frac{\varepsilon}{H} - xD \ln \left(\frac{2x+H}{2x+\varepsilon}\right) \frac{\varepsilon}{H}$$

$$= O(H) + [\Lambda(x) - Dx] \ln \frac{\varepsilon}{H}.$$

Таким образом, учитывая оценки для I_{31}, I_{32}, I_{33}, получаем, что для всех $x \neq \lambda_n$ $(n \geq 1)$ и $x \geq x_4 \geq x_3$ выполняется неравенство

$$I_3 \leq M_2 H(x) \quad (0 < M_2 < \infty). \quad (12)$$

Осталось оценить I_4. Имеем

$$|I_4| \leq \int\limits_{x+H}^{\infty} |\Lambda(u) - Du||K(x,u)| du \leq \int\limits_{x+H}^{\infty} \frac{H(u)}{u} |uK(x,u)|\, du$$

$$\leq \frac{H(x)}{x} \int\limits_{x+H}^{\infty} u|K(x,u)| du = -2xH(x) \int\limits_{x+H}^{\infty} \frac{du}{x^2-u^2}.$$

Отсюда при $x \geq x_5 \geq x_4$
$$|I_4| \leq 2H(x) \ln \frac{x}{H(x)}. \tag{13}$$
Таким образом, учитывая оценки (9)–(13), окончательно получаем, что для всех $x \neq \lambda_n$ $(n \geq 1)$, $x \geq x_6 \geq x_5$
$$I = \ln |Q(x)| = \sum_{i=0}^{4} I_i \leq I_0 + |I_1| + |I_2| + I_3 + |I_4| \leq M + 6H(x) \ln \frac{x}{H(x)},$$
где $0 < M < \infty$. Это означает, что для всех $x \geq 0$
$$\ln |Q(x)| \leq 6H(x) \ln^+ \frac{x}{H(x)} + A \quad (0 < A < \infty).$$
Требуемая оценка получена.

Пусть
$$S = \left\{ H \in K : d(H) = \varlimsup_{x \to \infty} \frac{H(x) \ln H(x)}{x \ln \frac{x}{H(x)}} < \infty \right\}, \tag{14}$$
где K — подкласс функций $H \in L$ таких, что $H(0) = 0$, $H(t) = o(t)$ при $t \to \infty$, $\frac{H(t)}{t} \downarrow$ при $t \uparrow$.

Теорема 2. *Пусть $\Lambda = \{\lambda_n\}$ $(0 < \lambda_n \uparrow \infty)$ — последовательность, имеющая плотность D $(0 \leq D < \infty)$, для которой выполняется условие*
$$\Lambda(x + p) - \Lambda(x) \leq ap + b + \frac{\varphi(x)}{\ln^+ p + 1} \quad (p \geq 0), \tag{15}$$
где φ — любая неотрицательная неубывающая функция, заданная на луче $\mathbb{R}_+$, $1 \leq \varphi(x) \leq cx \ln^+ x + q$.

Если для некоторой функции $H \in S$
$$|\Lambda(u) - Du| \leq H(u) \quad (u \geq 0), \tag{16}$$
то существует последовательность $\{r_n\}$, $0 < r_n \uparrow \infty$, $r_{n+1} - r_n = O(H(r_n))$ при $n \to \infty$ такая, что при $x = r_n \to \infty$
$$\ln |Q(x)| \geq -(9 + 2D + 2ad(H))H(x) \ln^+ \frac{x}{H(x)} - 2\varphi(x) + O(1). \tag{17}$$
Здесь $d(H)$, a, D — числа, фигурирующие в формулах (14)–(16).

Доказательство. Для $x \neq \lambda_n$ $(n \geq 1)$ в обозначениях теоремы 1 имеем $\ln |Q(x)| = \sum\limits_{i=0}^{4} I_i$. Из оценок (9)–(11), (13) получаем, что для всех $x \neq \lambda_n$ $(n \geq 1)$, $x \geq x_7 \geq x_6$
$$\ln |Q(x)| \geq -M_0 - 5H(x) \ln \frac{x}{H(x)} - M_1 H(x) + I_3, \tag{18}$$
где
$$I_3 = \int\limits_{x-H}^{x+H} [\Lambda(u) - Du] K(x, u)\, du, \quad H = H(x).$$
Так как $\frac{H(x)}{x} < 1$ при $x \geq x_7$, то $\frac{H^2(x)}{x} < H(x)$. Пусть $x \neq \lambda_n$ $(n \geq 1)$, $x \geq x_7$ фиксировано. Тогда при достаточно малом $\varepsilon > 0$
$$x - H < x - h < x - \varepsilon < x < x + \varepsilon < x + h < x + H,$$

где $h = \frac{H^2}{x}$, $H = H(x)$. При $\varepsilon \to 0$

$$I_3 = \left(\int\limits_{x-H}^{x-\varepsilon} + \int\limits_{x+\varepsilon}^{x+H} \right) [\Lambda(u) - Du] K(x,u)\, du + o(1).$$

Далее,

$$-D \left(\int\limits_{x-H}^{x-\varepsilon} + \int\limits_{x+\varepsilon}^{x+H} \right) uK(x,u)\, du = -xD \ln \left(\frac{2x-\varepsilon}{2x+\varepsilon} \right) \left(\frac{2x+H}{2x-H} \right).$$

Устремляя ε к нулю, видим, что при $x \geq x_8 \geq x_7$

$$-D \int\limits_{x-H}^{x+H} K(x,u) u\, du = -xD \ln \frac{2x+H}{2x-H} \geq -C_1 H(x), \tag{19}$$

где $0 < C_1 < \infty$. Для $x \neq \lambda_n$ $(n \geq 1)$

$$\int\limits_{x-H}^{x+H} K(x,u)\Lambda(u) du = \left[\left(\int\limits_{x-H}^{x-h} + \int\limits_{x+h}^{x+H} \right) + \left(\int\limits_{x-h}^{x-\varepsilon} + \int\limits_{x+\varepsilon}^{x+h} \right) + \int\limits_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} \right] K(x,u)\Lambda(u)\, du$$
$$= J_1 + J_2 + J_3.$$

Легко проверяется, что если $x \neq \lambda_n$ $(n \geq 1)$, то $J_3 \to 0$ при $\varepsilon \to 0$. Далее,

$$J_1 = 2x^2 \left(\int\limits_{x-H}^{x-h} \frac{\Lambda(u)}{u(x^2-u^2)}\, du + \int\limits_{x+h}^{x+H} \frac{\Lambda(u)}{u(x^2-u^2)}\, du \right) = i_1 + i_2.$$

Но при $x \geq x_7$

$$i_1 \geq 2x^2 \Lambda(x-H) \int\limits_{x-H}^{x-h} \frac{du}{u(x^2-u^2)} \geq \Lambda(x-H) \ln \frac{H}{h} + \Lambda(x-H) \ln \frac{2x-H}{2x+H},$$

где $h = \frac{H^2}{x}$, $H = H(x)$. Учитывая то, что $\Lambda(x) = O(x)$, $H(x) = o(x)$ при $x \to \infty$, для $x \geq x_9 \geq x_8$ получаем

$$i_1 \geq \Lambda(x-H) \ln \frac{x}{H} - C_2 H(x), \quad H = H(x), \quad 0 < C_2 < \infty. \tag{20}$$

Аналогично оценим i_2. Имеем

$$i_2 \geq \Lambda(x+H) \ln \frac{h}{H} + \Lambda(x+H) \ln \frac{2x+h}{2x+H},$$

где $h = \frac{H^2}{x}$, $H = H(x)$. Отсюда при $x \geq x_{10} \geq x_9$

$$i_2 \geq -\Lambda(x+H) \ln \frac{x}{H} - C_3 H(x), \quad H = H(x), \quad 0 < C_3 < \infty. \tag{21}$$

Следовательно, учитывая (20), (21), при некотором $C_4 > 0$ для $x \geq x_{11} \geq x_{10}$ получаем оценку

$$J_1 = i_1 + i_2 \geq -C_4 H(x) - [\Lambda(x+H) - \Lambda(x-H)] \ln \frac{x}{H}, \quad H = H(x). \tag{22}$$

Далее, согласно теореме A существует последовательность $\{r_n\}$ $(0 < r_n \uparrow \infty)$ такая, что $\Lambda \cap \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} I_n = \varnothing$, где $I_n = \{x : |x - r_n| \le p \ (0 < p < \infty)\}$. Убедимся, что последовательность $\{r_n\}$ можно выбрать так, что $r_{n+1} - r_n = O(H(r_n))$ при $r_n \to \infty$. Действительно, из (16) следует, что при $t \ge t_0$

$$\mu_\Lambda(\omega(t)) \le (D+3)|\omega(t)|, \quad \omega(t) = [t, t + H(t)),$$

где $\mu_\Lambda(w(t))$ — число точек λ_n из полуинтервала $w(t)$. Следовательно, $[t_0, \infty) = \bigcup\limits_{i=0}^{\infty} \omega_i$, где $\omega_i = [t_i, t_i + H(t_i))$, причем $\mu_\Lambda(\omega_i) \le b|\omega_i|$, $b \ge 3$ $(i \ge 0)$. Не умаляя общности, можно считать, что $|\omega_0| \ge 1$. Пусть $\rho_i = \frac{t_i + t_{i+1}}{2}$ $(i \ge 0)$ — центр ω_i. Тогда каждый полуинтервал $\omega_i' = [\alpha_i, \beta_i)$ с центром в точке ρ_i, имеющий длину $\frac{1}{2}|\omega_i|$, содержит отрезок $I_i = \left\{x : |x - r_i| \le \frac{1}{4b}\right\}$, свободный от точек Λ. Далее,

$$r_{i+1} - r_i \le \frac{3}{4}|\omega_i| + \frac{3}{4}|\omega_{i+1}| \le \frac{3}{2}|\omega_{i+1}| = \frac{3}{2}H(t_{i+1}).$$

Так как $H \in S$, отсюда получаем, что $r_{i+1} - r_i \le dH(t_i)$ $(i \ge 0)$.

Оценим J_2 в точках последовательности $\{r_n\}$. Пусть $0 < \varepsilon < \tau$, $\tau = \frac{1}{4b}$. При $\tau \le h$ имеем

$$J_2 = 2x^2 \left[\left(\int\limits_{x-\tau}^{x-\varepsilon} + \int\limits_{x+\varepsilon}^{x+\tau} \right) + \left(\int\limits_{x-h}^{x-\tau} + \int\limits_{x+\tau}^{x+h} \right) \right] \frac{\Lambda(u)}{u(x^2 - u^2)}\, du = i_3 + i_4.$$

При $h < \tau$ считаем, что $i_4 = 0$. Так как $\Lambda(u) = \Lambda(x)$ при $u \in [x - \tau, x + \tau]$, $x = r_n$ $(n \ge 1)$, то

$$i_3 = \Lambda(x) \left[\ln \left(\frac{x - \varepsilon}{x + \varepsilon} \right)^2 \left(\frac{x + \tau}{x - \tau} \right)^2 + \ln \left(\frac{2x + \varepsilon}{2x - \epsilon} \right) \left(\frac{2x - \tau}{2x + \tau} \right) \right]$$
$$\ge \Lambda(x) \ln \frac{2x - \tau}{2x + \tau} + \Lambda(x) \ln \left(\frac{x - \varepsilon}{x + \varepsilon} \right)^2 = O(1) + o(1)$$

при $x \to \infty$ и $\varepsilon \to 0$ соответственно. Значит, при $x = r_n \ge x_{12} \ge x_{11}$, $0 < \varepsilon < \tau$

$$i_3 \ge -C_5 \quad (0 < C_5 < \infty). \tag{23}$$

Чтобы оценить i_4, воспользуемся тем, что для достаточно больших x

$$0 < h = \frac{H^2}{x} < H < H \ln \frac{x}{H}, \quad H = H(x). \tag{24}$$

Имеем

$$i_4 \ge 2x^2 \left(\Lambda(x - h) \int\limits_{x-h}^{x-\tau} \frac{du}{u(x^2 - u^2)} + \Lambda(x + h) \int\limits_{x+\tau}^{x+h} \frac{du}{u(x^2 - u^2)} \right).$$

Отсюда, учитывая (24), получаем, что при $x \to \infty$

$$i_4 \ge -[\Lambda(x + h) - \Lambda(x - h)] \ln \frac{h}{\tau} + O(h) + o(1). \tag{25}$$

Из (22)–(25) при $x = r_n \ge x_{13} \ge x_{12}$ заключаем, что

$$J_2 \ge -C_6 H(x) - [\Lambda(x + h) - \Lambda(x - h)] \ln \frac{h}{\tau}, \quad 0 < C_6 < \infty. \tag{26}$$

Таким образом, из (18), (19), (22), (24), (26) окончательно получаем, что для $x = r_n \geq x_{14} \geq x_{13}$

$$\ln|Q(x)| \geq -6H\ln\frac{x}{H} - C_7H - [\Lambda(x+H) - \Lambda(x-H)]\ln\frac{x}{H} - [\Lambda(x+h) - \Lambda(x-h)]\ln\frac{h}{\tau}, \quad (27)$$

где $h = \frac{H^2}{x}$, $H = H(x)$, $0 < C_7 < \infty$.

Пользуясь условием (16), оценим разность $\Lambda(x+H) - \Lambda(x-H)$ сверху. Имеем

$$\Lambda(x+H) - \Lambda(x-H) = \Lambda(x+H) - D(x+H) + D(x-H) - \Lambda(x-H) + 2DH \leq H(x+H) + H(x-H) + 2DH(x) \quad (x \geq H).$$

Но $H(x) < x$ при $x \geq x_7$. Так как $H \in K$, то при $x \geq x_7$ будет

$$\Lambda(x+H) - \Lambda(x-H) \leq H(2x) + H(x) + 2DH(x) \leq (2D+3)H(x),$$

тем самым при $x \geq x_7$

$$[\Lambda(x+H) - \Lambda(x-H)]\ln\frac{x}{H} \leq (2D+3)H\ln\frac{x}{H}, \quad H = H(x). \quad (28)$$

Чтобы оценить разность $\Lambda(x+h) - \Lambda(x-h)$, воспользуемся условием (15). Для этого положим $y = x - h$. Тогда из (15) следует, что

$$\Lambda(x+h) - \Lambda(x-h) = \Lambda(y+2h) - \Lambda(y) \leq 2ah + b + \frac{\varphi(y)}{\ln^+ 2h + 1} \leq 2ah + b + \frac{\varphi(x)}{\ln^+ h + 1}.$$

Следовательно, учитывая то, что $\frac{h(x)}{\tau} = \frac{H^2(x)}{\tau x} < H(x)$, $H \in S$, при $x \geq x_{15} \geq x_{14}$ получаем, что для любого $\varepsilon > 0$

$$[\Lambda(x+h) - \Lambda(x-h)]\ln\frac{h}{\tau} \leq 2a\frac{H^2}{x}\ln H + b + 2\varphi(x) \leq 2a(d(H)+\varepsilon)H\ln\frac{x}{H} + 2\varphi(x) + b, \quad H = H(x). \quad (29)$$

Таким образом, из (27)–(29) при $x = r_n \geq x_{16} \geq x_{15}$ окончательно получаем оценку

$$\ln|Q(x)| \geq -[8+2D+2a(d(H)+\varepsilon)]H(x)\ln\frac{x}{H(x)} - C_8H(x) - 2\varphi(x), \quad 0 < C_8 < \infty.$$

Это означает, что для $x = r_n \to \infty$ справедлива оценка (17).

§ 2. Об эффективной оценке произведения Вейерштрасса на лучах

Пусть $M = \{\mu_n\}$ $(0 < \mu_1 \leq \mu_2 \leq \ldots \leq \mu_n \leq \ldots \leq \mu_n \to \infty)$ — последовательность, имеющая конечную верхнюю плотность

$$\tau = \varlimsup_{n\to\infty}\frac{n}{\mu_n}.$$

Положим
$$W(\lambda)=\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{\lambda^2}{\mu_n^2}\right).$$
Наряду с индикатрисой роста
$$h(\varphi)=\varlimsup_{r\to\infty}\frac{\ln|W(re^{i\varphi})|}{r}$$
для функции W вводится другая характеристика — коиндикатриса [6]
$$h^*(\varphi)=\varlimsup_{r\to\infty}\ln\left|\frac{1}{W(re^{i\varphi})}\right|,\quad \varphi\neq 0,\pi.$$
Если последовательность M имеет плотность, то $h^*(\varphi)=-h(\varphi)$. В общем случае функция $h^*(\varphi)$ не ограничена при $\varphi\to 0$.

Последовательность M имеет конечную верхнюю плотность тогда и только тогда, когда $L<\infty$, где
$$L=\lim_{\xi\to 1-0}\varlimsup_{r\to\infty}\frac{n(r)-n(r\xi)}{r}$$
— индекс насыщенности [7], $n(r)=\sum\limits_{\mu_n\le r}1$. Отметим, что внешний предел всегда существует, так как функция
$$\varlimsup_{r\to\infty}\frac{n(r)-n(r\xi)}{r}$$
является возрастающей по ξ. Если последовательность M имеет плотность, то $L=0$. Если конечная максимальная плотность
$$\tau^*=\lim_{\xi\to 1-0}\varlimsup_{r\to\infty}\frac{n(r)-n(r\xi)}{r(1-\xi)}$$
конечна, то опять $L=0$. В [8] показано, что для любого $\epsilon>0$ при $0<|\varphi|<\varphi_0(\epsilon)$
$$(L-\varepsilon)\ln\frac{1}{|\varphi|}<h^*(\varphi)<(L+\varepsilon)\ln\frac{1}{|\varphi|},$$
где L — индекс насыщенности. Но в некоторых случаях удается найти более точную зависимость функции $|W(re^{i\varphi})|^{-1}$ от переменных r и φ.

Теорема 3. *Пусть последовательность $M=\{\mu_n\}$ имеет плотность σ, причем*
$$|n(t)-\sigma(t)|\le H(t)\quad (t\ge 0),\ H\in K. \tag{30}$$
Тогда существует $\rho\ge 0$ такое, что при $r\ge\rho$ для всех $0<|\varphi|\le\frac{\pi}{4}$, $0<|\pi-\varphi|\le\frac{\pi}{4}$
$$|\ln|W(re^{i\varphi})|-\pi\sigma|\sin\varphi|r|\le 6H(r)\ln\frac{r}{H(r)}+\frac{8\pi}{|\varphi|}\frac{H^2(r)}{r}+3\mu_1\sigma. \tag{31}$$

Доказательство. Оценку (31) достаточно установить лишь для $z=re^{i\varphi}$ из угла $0<\varphi\le\frac{\pi}{4}$. Имеем
$$\ln W(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(1-\frac{z^2}{\mu_n^2}\right)=\int_0^{\infty}\ln\left(1-\frac{z^2}{t^2}\right)dn(t).$$

Интегрируя по частям, получаем, что

$$\ln Q(z) = -2z^2 \int_0^\infty \frac{n(t)}{t(t^2 - z^2)}\, dt.$$

Положим $m(t) = n(t) - \sigma t$. Тогда $n(t) = m(t) + \sigma t$ и

$$\ln W(z) = -2z^2\sigma \int_0^\infty \frac{dt}{t^2 - z^2} - 2z^2 \int_0^\infty \frac{m(t)dt}{t(t^2 - z^2)} = I + J.$$

Первый интеграл равен

$$I = -z^2\sigma \int_{-\infty}^\infty \frac{dt}{t^2 - z^2} = -\pi\sigma i z \quad (0 < \varphi \le \pi/4).$$

Рассматривая и остальные значения φ, заключаем, что $\operatorname{Re} I = \pi\sigma|\sin\varphi|r$. Следовательно,

$$|\ln|W(re^{i\varphi})| - \pi\sigma|\sin\varphi|r| \le \left|2z^2 \int_0^\infty \frac{m(t)dt}{t(t^2 - z^2)}\right| = |J|.$$

Пусть r_0 — решение уравнения

$$\frac{H(r)}{r} = \frac{1}{2}.$$

Так как $H \in K$, то $2H(r) \le r$ при всех $r \ge r_0$. При любом $r \ge r_1 = \max(r_0, 2\mu_1)$ интеграл J запишем в виде

$$J = 2z^2 \left(\int_0^{\mu_1} + \int_{\mu_1}^{H} + \int_{H}^{r-H} + \int_{r-H}^{r+H} + \int_{r+H}^{\infty} \right) \frac{m(t)dt}{t(t^2 - z^2)} = \sum_{i=0}^4 J_i, \tag{32}$$

где $H = H(r)$. С учетом (30), т. е. оценки $|m(t)| \le H(t)$ $(H \in K)$, как в теореме 1, показывается, что при $r \ge r_2 > r_1$

$$|J_1| + |J_2| + |J_4| \le 6H(r)\ln\frac{r}{H(r)}, \quad |J_0| \le \sigma r \ln\left|\frac{r + \mu_1}{r - \mu_1}\right| \le 3\mu_1\sigma. \tag{33}$$

Оценим теперь интеграл

$$J_3 = 2z^2 \int_{r-H}^{r+H} \frac{m(t)}{t(t^2 - z^2)}\, dt \quad (z = re^{i\varphi}).$$

Имеем $|t^2 - z^2| = |t - z||t + z|$. Если z лежит в угле $0 < \varphi \le \frac{\pi}{4}$, то $|t + z| \ge t, |t - z| \ge t\sin\varphi$. Значит,

$$|J_3| \le 2r^2 \int_{r-H}^{r+H} \frac{H(t)}{t|t^2 - z^2|}\, dt \le 2r^2\frac{H(r - H)}{r - H} \int_{r-H}^{r+H} \frac{dt}{t^2|\sin\varphi|}.$$

Так как в рассматриваемом случае $|\sin\varphi| \geq \frac{2}{\pi}|\varphi|$, $2H(r) \leq r$, то при $r \geq r_0$

$$|J_3| \leq \frac{4}{|\sin\varphi|}\frac{H^2(r)}{r}\left(\frac{r}{r-H}\right)^2 \leq \frac{8\pi}{|\varphi|}\frac{H^2(r)}{r}.$$

Учитывая это, из (32), (33) получаем, что при $r \geq \rho = r_2$ для всех φ, $0 < |\varphi| \leq \frac{\pi}{4}$,

$$|\ln|W(re^{i\varphi})| - \pi\sigma|\sin\varphi|r| \leq 6H(r)\ln\frac{r}{H(r)} + \frac{8\pi}{|\varphi|}\frac{H^2(r)}{r} + 3\mu_1\sigma.$$

Оценка (31) доказана. Функция W четная. Поэтому данная оценка верна и для $z = re^{i\varphi}$ из угла $0 < |\pi - \varphi| \leq \frac{\pi}{4}$.

Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Леонтьев А. Ф.* Ряды экспонент. М.: Наука, 1976.
2. *Redheffer R. M.* Completeness of sets of complex exponentials // Adv. Math. 1977. V. 24, N 1. P. 1–62.
3. *Кацнельсон В. Э.* Целые функции класса Картрайт с нерегулярным поведением // Функциональный анализ и его приложения. 1976. Т. 10, № 4. С. 35–44.
4. *Мацаев В. И.* История отечественной математики. Киев: Наук. думка, 1970. Т. 4. Книга 1.
5. *Koosis P.* The logarithmic integral. I. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1988.
6. *Леонтьев А. Ф.* О сходимости полиномов Дирихле // Докл. АН СССР. 1956. Т. 108, № 1. С. 23–26.
7. *Baillette A.* Approximation de fonctions par des sommes d'exponentielles // C. R. Acad. Sci. Ser. 1 Math. 1959. V. 249, N 23. P. 2470–2471.
8. *Леонтьев А. Ф.* Последовательность полиномов из экспонент. М.: Наука, 1980.

Статья поступила 30 мая 2005 г., окончательный вариант — 14 ноября 2006 г.

Гайсин Ахтяр Магазович, *Сергеева Дина Ильдаровна*
Институт математики с вычислительным центром
Уфимского научного центра РАН,
ул. Чернышевского, 112, Уфа 450077
Gaisin@imat.rb.ru, SergeevaDI@yandex.ru