Сибирский математический журнал
Сентябрь—октябрь, 2007. Том 48, № 5

УДК 517.95

УСТОЙЧИВОСТЬ РЕШЕНИЙ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ НА ПЛОСКОСТИ С ПЕРИОДИЧЕСКИМИ ПО ВРЕМЕНИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Р. К. Романовский, М. В. Мендзив

Аннотация: Для гиперболической системы на плоскости с периодическими по времени коэффициентами построен вариант прямого метода Ляпунова с ослабленным за счет периодичности коэффициентов условием на производную функционала Ляпунова вдоль траекторий системы. Приведен иллюстрирующий пример.

Ключевые слова: функционал Ляпунова, оператор сдвига вдоль характеристик.

Введение

В работах [1–4] изучалось поведение при большом времени решений задачи Коши для гиперболической системы с одной пространственной переменной — устойчивость, дихотомия, экспоненциальное расщепление — на основе построенного в [1, 5] аппарата матриц Римана первого и второго рода, представляющих собой соответственно сингулярную и регулярную компоненты фундаментальной матрицы гиперболической системы. В частности, в [3] на этом пути получены спектральные признаки экспоненциальной устойчивости и дихотомии в C-норме для систем указанного класса с периодическими по времени коэффициентами; в пространственно-однородном случае эффективно вычислены резольвента и спектр оператора монодромии.

В работах [6, 7] исследовалась в рамках первого метода Ляпунова устойчивость решений смешанной задачи для автономных почти линейных гиперболических систем с одной пространственной переменной, возникающей при моделировании процессов в химических реакторах [8–11]. Получен спектральный признак экспоненциальной устойчивости в C^1-норме. В [12] доказана теорема об устойчивости по первому приближению решений задачи Коши для таких систем. В [13] рассмотрена задача Коши для квазилинейной гиперболической системы с несколькими пространственными переменными и малым параметром при нелинейном члене, получено достаточное условие асимптотической устойчивости в терминах спектра символа невозмущенной системы.

В работах [14–16] к анализу устойчивости решений задачи Коши и смешанной задачи указанного выше типа для гиперболической системы с одной пространственной переменной применен прямой метод Ляпунова. Установлены достаточные условия асимптотической устойчивости в различных нормах; в [15, 16] получены приложения к задаче об устойчивости стационарных режимов в химических реакторах.

Данная работа является продолжением исследований по прямому методу Ляпунова для систем этого класса. Как и в [3], рассматривается задача Коши для гиперболической системы с периодическими по времени коэффициентами. Построен вариант прямого метода с ослабленным условием на производную $\dot{v}$ функционала Ляпунова вдоль траекторий системы по сравнению со случаем любых гладких коэффициентов. Полученный признак устойчивости проиллюстрирован на примере задачи Коши для телеграфной системы с периодически подключаемым трением: здесь $\dot{v} = 0$ при всех $t \in \mathbb{R}$, за исключением отдельных периодически повторяющихся островков, где производная отрицательна, тем не менее L_2-норма решения убывает к нулю по экспоненте при $t \to +\infty$.

Введенный ранее в [14] оператор сдвига вдоль характеристик системы, позволивший привести задачу Коши для гиперболической системы к задаче Коши для обыкновенного дифференциального уравнения в гильбертовом пространстве с ограниченным операторным коэффициентом, используется здесь в несколько ином варианте. Ниже в п. 1 изложены используемые далее сведения из [14] об этом операторе в удобном для последующего виде.

Отметим, что из общих результатов по анализу притягивающих множеств эволюционных уравнений [17–19] следуют достаточные условия асимптотической устойчивости решений задачи Коши для некоторых классов нелинейных гиперболических уравнений, в том числе с использованием функционалов Ляпунова.

1. Оператор сдвига вдоль характеристик

Рассмотрим гиперболический оператор с кратными характеристиками

$$L = \frac{\partial}{\partial t} + A(x,t)\frac{\partial}{\partial x} + B(x,t). \tag{1}$$

Здесь A, B — матрицы порядка N, $A = \operatorname{diag}(a_1 I_1, \dots, a_n I_n)$, I_k — единичная матрица порядка N_k, $\sum N_k = N$, $a_1 > a_2 > \dots > a_n$, $A \in C^1(\mathbb{R}^2)$, $B \in C(\mathbb{R}^2)$, A, A'_x, A'_t, B ограничены в $\mathbb{R}^2$, $|a_k| \geq \text{const} > 0$. В частности, при указанных условиях проходящие через каждую точку (x,t) характеристики

$$l_k(x,\tau) = \{(s,t) : s = x_k(t;x,\tau),\ x'_{kt} = a_k(x_k,t),\ x_k(t;x,t) = x\},$$

$k = \overline{1,n}$, определены глобально и пересекают каждую горизонталь и каждую вертикаль один раз. Далее будем представлять векторы $h \in \mathbb{C}^N$ в виде $h = (h_1, \dots, h_n)$, где h_k имеет размер N_k.

Обозначим через H гильбертово пространство функций $\mathbb{R} \to \mathbb{C}^N$ со скалярным произведением $\langle g, h\rangle = \int\limits_{-\infty}^{\infty} h^* g\, dx$.

Лемма 1 [14]. 1°. *При каждых $t, \tau \in \mathbb{R}$ формула*

$$\Gamma(t,\tau)h = [h_1(x_1(t;x,\tau)), \dots, h_n(x_n(t;x,\tau))] \tag{2}$$

определяет линейный ограниченный обратимый оператор $H \to H$, верны равенства

$$\Gamma(t,t) = I, \quad \Gamma^{-1}(t,\tau) = \Gamma(\tau,t), \quad \Gamma^*\Gamma = E,$$

где E — оператор умножения на матрицу

$$E(x,t,\tau) = \operatorname{diag}(e_1 I_1, \dots, e_n I_n), \quad e_k = \exp\left\{\int\limits_{\gamma_k} a'_{kx}\, d\tau\right\}, \tag{3}$$

γ_k — *отрезок характеристики* $l_k(x,t)$ *от точки* (x,t) *до точки с ординатой* τ.

2°. *Если* $\mathscr{A}$ — *оператор умножения на матрицу* $\mathscr{A} = \operatorname{diag}(\mathscr{A}_1, \dots, \mathscr{A}_n)$, *где* $\mathscr{A}_k$ — *блок порядка* N_k, *то верно равенство* $\Gamma\mathscr{A} = \Gamma\mathscr{A}\Gamma$.

Будем называть $\Gamma(t,\tau)$ *оператором сдвига вдоль характеристик системы* $Lu = 0$. Далее $\|\cdot\|$ — норма в H, $|\cdot|$ — эрмитова норма матрицы.

2. Разрешающий оператор задачи Коши для периодической системы $Lu = 0$

Будем в (1) предполагать

$$A(x,t+T) = A(x,t), \quad B(x,t+T) = B(x,t), \quad T > 0. \tag{4}$$

Рассмотрим задачу Коши в фазовом пространстве H:

$$Lu = 0, \quad u|_{t=\tau} = h, \quad \tau \in \mathbb{R},\ h \in H. \tag{5}$$

В частном случае $h \in H_0 = C_0^1(\mathbb{R})$ задача Коши (5) однозначно разрешима в классе гладких функций $u(x,t) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}^N$, при этом $u(x,t) \in H_0$ при каждом $t \in \mathbb{R}$. Обозначим через $U(t,\tau)$ разрешающий оператор задачи Коши в H_0:

$$u(t) = U(t,\tau)h, \tag{6}$$

где $h \in H_0$, $u(t)$ — функция $\mathbb{R} \to H_0$, удовлетворяющая (5). Простые вычисления дают:

1) $U(t,\tau)$ при любых $t,\tau \in \mathbb{R}$ — ограниченный линейный оператор $H_0 \to H_0$;

2) верно равенство

$$\frac{d}{dt}[\Gamma(t,\tau)U(t,\tau)h] = -\Gamma(t,\tau)B(t)U(t,\tau)h, \quad h \in H_0, \tag{7}$$

где производная понимается в топологии H, $B(t)$ — оператор умножения на $B(x,t)$.

В силу 1 оператор $U(t,\tau)$ продолжается по непрерывности из H_0 в H. Далее под решением задачи Коши (5) при любой $h \in H$ будем понимать функцию (6).

Лемма 2. *При условиях* (4) *для разрешающего оператора задачи Коши* (5) *имеет место свойство стационарности на периоде:*

$$U(t+T,\tau+T) = U(t,\tau), \quad t,\tau \in \mathbb{R}. \tag{8}$$

Доказательство. При условиях (4) функции $u = U(t,\tau)h$, $\tilde{u} = U(t+T, \tau+T)h$, $h \in H_0$, удовлетворяют одним и тем же условиям (5). В силу единственности решения задачи Коши (5) отсюда следует (8).

3. Признак экспоненциальной устойчивости

Будем говорить, что решение $u = 0$ задачи Коши (5) *экспоненциально устойчиво*, если для любого решения (6) имеет место оценка

$$\|U(t,\tau)h\| \le \mu\, e^{-\nu(t-\tau)}\|h\| \quad (t \ge \tau) \tag{9}$$

при некоторых $\mu,\nu = \mathrm{const} > 0$. Очевидно, достаточно потребовать выполнения оценки (9) на элементах $h \in H_0$. Далее будем рассматривать задачу Коши (5) в фазовом пространстве H_0.

Зафиксируем матрицу $F(x,t) = \mathrm{diag}(f_1,\dots,f_n)$ с диагональными блоками порядков $N_1,\dots,N_n$ со свойствами

$$\begin{gathered} F(x,t+T) = F(x,t), \quad F^* = F, \quad m_1 I \le F \le m_2 I \qquad (m_i > 0), \\ F \in C^1(\mathbb{R}^2), \quad |F'_x|, |F'_t| \le \mathrm{const}. \end{gathered} \tag{10}$$

Рассмотрим эрмитову форму

$$v(t,h) = \langle Fh, h\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} h^*(x)F(x,t)h(x)\,dx, \quad h \in H_0. \tag{11}$$

Лемма 3. *Производная формы* (11) *вдоль траекторий системы* $Lu = 0$ *в* H_0 *дается формулой*

$$\dot v(t,h) = \langle Gh, h\rangle, \quad G = F'_t + (FA)'_x - FB - B^*F. \tag{12}$$

Доказательство. Подставляя в (11) вместо h решение (6) и учитывая вытекающие из свойств 1°, 2° оператора сдвига вдоль характеристик равенства $\Gamma^*\Gamma E^{-1} = I$, $\Gamma E^{-1}F = \Gamma E^{-1}F\Gamma$, найдем

$$\langle Fu, u\rangle = \langle \Gamma^*\Gamma E^{-1}Fu, u\rangle = \langle [\Gamma E^{-1}F]\Gamma u, \Gamma u\rangle,$$

где $[\Gamma E^{-1}F] = \mathrm{diag}(e_1 f_1|_{x=x_1},\dots,e_n f_n|_{x=x_n})$, $x_k = x_k(t;x,\tau)$. С учетом формул (3) для e_k нетрудно получить

$$\frac{d}{dt}[\Gamma E^{-1}F] = \Gamma E^{-1}(F'_t + (FA)'_x).$$

Из (7) имеем $(\Gamma u)'_t = -\Gamma Bu$. Поэтому

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\langle Fu, u\rangle &= \langle \Gamma E^{-1}(F'_t + (FA)'_x)\Gamma u, \Gamma u\rangle - \langle \Gamma E^{-1}F\Gamma Bu, \Gamma u\rangle \\ &\quad - \langle \Gamma E^{-1}F\Gamma u, \Gamma Bu\rangle = \langle (F'_t + (FA)'_x - FB)\,u, u\rangle - \langle Fu, Bu\rangle = \langle Gu, u\rangle. \end{aligned}$$

Лемма доказана.

Теорема. *Пусть существует матрица* $F(x,t)$ *со свойствами* (10) *такая, что выполняются неравенства*

(i) $G \le 0$ *при* $t \ge \tau$,

(ii) $G \le -mI$ ($m = \mathrm{const} > 0$) *хотя бы на одном отрезке* $[t_0, t_1]$, $t_0 \ge \tau$.

Тогда решение $u = 0$ *задачи Коши* (5) *экспоненциально устойчиво.*

Доказательство. 1. Обозначим через $\mathscr{F} = F^{1/2}$ эрмитово-положительный корень из F. Имеют место соотношения

$$\begin{gathered} \mathscr{F}(x,t+T) = \mathscr{F}(x,t), \quad \sqrt{m_1} I \le \mathscr{F} \le \sqrt{m_2} I, \\ \mathscr{F}, \mathscr{F}^{-1} \in C^1(\mathbb{R}^2), \quad |\mathscr{F}'_x|, |\mathscr{F}'_t| \le \mathrm{const}. \end{gathered} \tag{13}$$

Первые два соотношения очевидны, остальные следуют из представления матриц $\mathscr{F}$, $\mathscr{F}^{-1}$ формулой Коши — Рисса

$$\mathscr{F}^{\pm 1} = (2\pi i)^{-1} \oint_\gamma \lambda^{\pm\frac12}(\lambda I - F)^{-1}\,d\lambda,$$

где $\lambda^{\frac{1}{2}}$ — ветвь $\sqrt{\lambda}$, положительная на положительной полуоси, γ — обходимая в положительном направлении окружность в полуплоскости $\operatorname{Re}\lambda > 0$, охватывающая отрезок $[m_1, m_2]$.

Выполняя в (5) замену неизвестной функции по формуле

$$w(t) = \mathscr{F}(t)u(t),$$

где $\mathscr{F}(t)$ — оператор умножения на матрицу $\mathscr{F}(x,t)$, получим задачу Коши для гиперболического оператора с той же матрицей A, T-периодической, непрерывной, ограниченной в $\mathbb{R}^2$ матрицей $\widetilde{B} = \mathscr{F}B\mathscr{F}^{-1} - \mathscr{F}_t'\mathscr{F}^{-1} - A\mathscr{F}_x'\mathscr{F}^{-1}$ и разрешающим оператором

$$W(t,\tau) = \mathscr{F}(t)U(t,\tau)\mathscr{F}^{-1}(\tau).$$

Ввиду T-периодичности $\mathscr{F}(t)$ для оператора W сохраняется свойство (8) оператора $U(t,\tau)$:

$$W(t+T,\tau+T) = W(t,\tau), \quad t,\tau \in \mathbb{R}. \tag{14}$$

В силу оценок (13) для доказательства теоремы достаточно доказать оценку (9) для решений

$$w(t) = W(t,\tau)h \quad (h \in H_0) \tag{15}$$

новой задачи Коши.

2. Покажем существование такого $q \in (0,1)$, что

$$\|w(t)\| \le q\|h\| \quad \text{при } t \ge t_1, \tag{16}$$

где t_1 — постоянная из условия (ii) теоремы. Обозначим

$$\varphi(t) = \langle w(t), w(t)\rangle = \|w(t)\|^2.$$

Имеем $\varphi(t) = \langle \mathscr{F}u, \mathscr{F}u\rangle = \langle Fu, u\rangle$, где $u = \mathscr{F}^{-1}w$ — решение задачи Коши (5) с начальной функцией $\mathscr{F}^{-1}(\tau)h$, откуда в силу леммы 3 следует, что

$$\dot\varphi(t) = \langle Gu, u\rangle = \langle \mathscr{F}^{-1}G\mathscr{F}^{-1}w, w\rangle, \tag{17}$$

где G — матрица (12). Ввиду условия (ii) теоремы при $t \in [t_0, t_1]$ имеет место оценка

$$\mathscr{F}^{-1}G\mathscr{F}^{-1} \le -mF^{-1} \le -cI, \quad c = mm_2^{-1}$$

(учтено, что $F^{-1} \ge m_2^{-1}I$), поэтому справедливо неравенство

$$\dot\varphi(t) \le -c\varphi(t), \quad t \in [t_0, t_1],$$

интегрируя которое по $[t_0, t_1]$, получим

$$\varphi(t_1) \le q^2\varphi(t_0), \quad q = e^{-\frac{c(t_1-t_0)}{2}} < 1. \tag{18}$$

Согласно условию (i) теоремы и равенству (17)

$$\dot\varphi(t) \le 0, \quad t \ge \tau. \tag{19}$$

Из (18), (19) с учетом $\varphi(\tau) = \|h\|^2$ следует (16).

3. Можно считать период T в (14) столь большим, что $\tau + T \ge t_1$. Из (15), (16) получаем

$$\|W(\tau+T,\tau)\| \le q.$$

Из (14) вытекает равенство

$$W(\tau + nT, \tau) = [W(\tau + T, \tau)]^n, \quad n = 0, 1, 2, \dots .$$

Тем самым для решения (15) новой задачи Коши верна оценка

$$\|w(\tau + nT)\| \le q^n \|h\|, \quad n = 0, 1, 2, \dots .$$

Пусть $t \ge \tau$, $n = [(t-\tau)/T]$. Так как ввиду оценки (16) $\|w(t)\|$ не возрастает, имеем

$$\|w(t)\| \le \|w(\tau + nT)\| \le q^n \|h\| \le q^{T^{-1}(t-\tau)-1} \|h\| = \mu e^{-\nu(t-\tau)} \|h\|,$$

где обозначено $\mu = q^{-1}$, $\nu = T^{-1} \ln q^{-1}$.

Теорема доказана.

4. Пример

Рассмотрим задачу Коши для телеграфной системы

$$\frac{\partial i}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x} + \varepsilon_1(t) i = 0, \quad \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \frac{\partial i}{\partial x} + \varepsilon_2(t)\mathbf{v} = 0, \quad (i, \mathbf{v})_{t=0} = (\varphi, \psi) \in H_0. \tag{20}$$

Здесь $\varepsilon_k(t)$ — неотрицательные непрерывные периодические функции с периодом $T = 1$ и малыми носителями на периоде $[0, 1]$:

$$\begin{gathered} \varepsilon_k(t+1) = \varepsilon_k(t), \quad \varepsilon_k > 0 \quad \text{при } t \in (\alpha_k, \beta_k) \in [0,1],\ \beta_k - \alpha_k \ll 1, \\ \varepsilon_k = 0 \quad \text{при } t \in [0,1] \backslash (\alpha_k, \beta_k),\ k = 1, 2. \end{gathered} \tag{21}$$

Замена $(i, \mathbf{v}) \to (u_1, u_2)$ по формулам $i = \frac{u_1+u_2}{2}$, $\mathbf{v} = \frac{u_1-u_2}{2}$ приводит задачу (20) к виду (5), где $\tau = 0$, $h \in H_0$,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \varepsilon_1 + \varepsilon_2 & \varepsilon_1 - \varepsilon_2 \\ \varepsilon_1 - \varepsilon_2 & \varepsilon_1 + \varepsilon_2 \end{pmatrix}.$$

Положим в (12) $F = I$, тогда $G = -2B$. При условии

$$(\alpha_1, \beta_1) \cap (\alpha_2, \beta_2) \ne \varnothing$$

выполняются условия теоремы, и тем самым решение $(i, \mathbf{v}) = (0, 0)$ задачи Коши (20) экспоненциально устойчиво.

Здесь не выполняется условие Ляпунова $\dot{v} < 0$: имеет место равенство $\det G = 0$ на множестве $[0,1] \backslash \bigcup\limits_k (\alpha_k, \beta_k)$ и его сдвигах на периоды $n \in \mathbb{Z}$.

5. Класс решений неравенства $G \le -mI$

В общем случае, когда матрицы A, B не являются периодическими, экспоненциальная устойчивость имеет место при более жестком условии

$$F'_t + (FA)'_x - FB - B^*F \le -mI \quad (m = \text{const} > 0,\ t \ge \tau). \tag{22}$$

Укажем возможный подход к поиску матрицы F, удовлетворяющей (22). Для упрощения записей будем считать, что оператор (1) строго гиперболичен ($n = N$) и матрица B вещественна. Тогда

$$F = \operatorname{diag}(f_1, \dots, f_n), \quad f_i \in C^1(\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}), \quad m_1 \le f_i \le m_2 \tag{23}$$

($m_k = \mathrm{const} > 0$), элементы матрицы (22) имеют вид

$$g_{ij} = -(b_{ij} f_i + b_{ji} f_j)\ (i \neq j), \quad g_{ii} = [D_i + (a'_{i\,x} - 2b_{ii})] f_i,$$

где b_{ij} — элементы матрицы B, D_i — оператор дифференцирования по t вдоль характеристики l_i. Обозначим через $\Delta_i(x,t)$ часть характеристики $l_i(x,t)$ с ординатами $s \in [t,\infty)$, через $\delta_i(x,t,s)$ — часть Δ_i с ординатами $\sigma \in [t,s]$. Будем предполагать, что при $t \geq \tau$

$$\beta_i(x,t) = \int\limits_{\Delta_i} \exp\left\{ \int\limits_{\delta_i} (a'_{ix} - 2b_{ii})\, d\sigma \right\} ds \leq \mathrm{const}\,. \tag{24}$$

Будем искать элементы матрицы F в виде

$$f_i = c_i \beta_i(x,t) \quad (c_i = \mathrm{const} > 0). \tag{25}$$

Нетрудно убедиться в том, что функции (25) удовлетворяют условиям (23), при этом

$$-g_{ii} = c_i, \quad -g_{ij} = c_i \beta_i b_{ij} + c_j \beta_j b_{ji} \quad (i \neq j). \tag{26}$$

В этой ситуации задача построения матрицы F, удовлетворяющей (22), (23), приводится к задаче отыскания чисел $c_i > 0$, $m > 0$, удовлетворяющих неравенству

$$-G(x,t,c_1,\dots,c_n) - mI > 0, \tag{27}$$

где $-G$ — матрица с элементами (26). При достаточно малых $|\beta_i b_{ij}|$, $i \neq j$, эта задача разрешима, и при ее решении может быть использован критерий положительной определенности Сильвестра. В частном случае $n = 2$ неравенство (27) принимает вид

$$(c_1 - m)(c_2 - m) - (c_1 \beta_1 b_{12} + c_2 \beta_2 b_{21})^2 > 0 \tag{28}$$

и заведомо выполняется при условиях

$$\beta_0 = \sup |\beta_1 b_{12} + \beta_2 b_{21}| < 1, \quad c_1 = c_2 = 1, \quad 0 < m < 1 - \beta_0.$$

Если матрицы A, B удовлетворяют (4), то такому же условию удовлетворяют функции (25).

В рассмотренном выше примере требование (24) выполняется, решение неравенства (28) требует дополнительных сведений о функциях $\varepsilon_k(t)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Романовский Р. К.* О матрицах Римана первого и второго рода // Докл. АН СССР. 1982. Т. 267, № 3. С. 577–580.
2. *Романовский Р. К.* Экспоненциально расщепляемые гиперболические системы с двумя независимыми переменными // Мат. сб. 1987. Т. 133, № 3. С. 341–355.
3. *Романовский Р. К.* Об операторе монодромии гиперболической системы с периодическими коэффициентами // Применение методов функционального анализа в задачах математической физики. Киев: Изд-во ИМ АН УССР, 1987. С. 47–52.
4. *Романовский Р. К.* Усреднение гиперболических уравнений // Докл. АН СССР. 1989. Т. 306, № 2. С. 286–289.
5. *Романовский Р. К.* О матрицах Римана первого и второго рода // Мат. сб. 1985. Т. 127, № 4. С. 494–501.
6. *Елтышева Н. А.* О качественных свойствах решений некоторых гиперболических систем на плоскости // Мат. сб. 1988. Т. 135, № 2. С. 186–209.

7. *Елтышева Н. А.* К вопросу об устойчивости стационарных решений некоторых гиперболических систем // Докл. АН СССР. 1986. Т. 289, № 1. С. 30–32.
8. *Зеленяк Т. И.* О стационарных решениях смешанных задач, возникающих при изучении некоторых химических процессов // Дифференц. уравнения. 1966. Т. 2, № 2. С. 205–213.
9. *Зеленяк Т. И.* К вопросу об устойчивости решений смешанных задач для одного квазилинейного уравнения // Дифференц. уравнения. 1967. Т. 3, № 1. С. 19–29.
10. *Годунов С. К.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 1979.
11. *Лаврентьев М. М. (мл.), Люлько Н. А.* Повышение гладкости решений некоторых гиперболических задач // Сиб. мат. журн. 1997. Т. 38, № 1. С. 109–124.
12. *Xu Cheng-Zhong, Feng De-Xing.* Linearization method to stability analysis for nonlinear hyperbolic systems // C. R. Acad. Sci. Ser. 1. 2001. V. 332, N 9. P. 809–814.
13. *Kreiss H-O., Ortiz O. E., Reula O. A.* Stability of quasi-linear hyperbolic dissipative systems // Differential Equations. 1998. V. 142, N 1. P. 78–96.
14. *Воробьева Е. В., Романовский Р. К.* Об устойчивости решений задачи Коши для гиперболических систем с двумя независимыми переменными // Сиб. мат. журн. 1998. Т. 39, № 6. С. 1290–1292.
15. *Акрамов Т. А.* О поведении решений одной гиперболической задачи // Сиб. мат. журн. 1998. Т. 39, № 1. С. 3–19.
16. *Романовский Р. К., Воробьева Е. В., Макарова И. Д.* Об устойчивости решений смешанной задачи для почти линейной системы на плоскости // Сиб. журн. индустриальной математики. 2003. Т. 6, № 1. С. 118–124.
17. *Бабин А. В., Вишик М. И.* Аттракторы эволюционных уравнений. М.: Наука, 1989.
18. *Vishik M. I.* Asymptotic behaviour of solutions of evolutionary equations. Lezioni Lincee. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1992.
19. *Chepyzhov V. V., Vishik M. I.* Attractors for non-autonomous evolution equations with almost periodic symbols // C. R. Acad. Sci. Ser. 1. 1993. V. 316, N 4. P. 357–361.

Статья поступила 20 апреля 2005 г., окончательный вариант — 6 сентября 2006 г.

Романовский Рэм Константинович, Мендзив Марьяна Вирославовна
Омский гос. технический университет, кафедра высшей математики,
пр. Мира, 11, Омск 644050
`mmvmath@mail.ru, menmar@mail.ru`