Сибирский математический журнал
Июль—август, 2007. Том 48, № 4

УДК 519.71

СОВЕРШЕННЫЕ 2–РАСКРАСКИ ГИПЕРКУБА

Д. Г. Фон-Дер-Флаас

Аннотация: Раскраска вершин графа называется *совершенной*, если для каждой вершины набор цветов ее соседей зависит только от ее собственного цвета. Изучаются параметры совершенных раскрасок в два цвета n-мерного гиперкуба. Получены необходимые условия существования таких раскрасок; найдена рекурсивная конструкция, производящая раскраски для всех известных параметров и дающая бесконечно много новых, ранее неизвестных раскрасок.

Ключевые слова: гиперкуб, раскраска, совершенный код.

Понятие совершенной раскраски графа естественно возникает в теории графов, алгебраической комбинаторике (дистанционно регулярные графы) и в теории кодирования (совершенные коды). Раскраска вершин графа называется *совершенной*, если для каждой вершины набор цветов ее соседей зависит только от ее собственного цвета. Другими терминами, используемыми в литературе для этого понятия, являются «правильное разбиение» (“a partition design”), и «дистрибутивная раскраска». В работе [1] можно найти обсуждение этого понятия в его связи с дистанционно регулярными графами. Одно из классических понятий теории кодирования — совершенный код — является частным случаем совершенной раскраски гиперкуба. Можно также упомянуть работу [2], в которой классифицированы совершенные 2-раскраски бесконечных квадратных решеток; в [3] описаны возможные параметры совершенных 2-раскрасок плоских триангуляций.

В настоящей работе изучается вопрос существования совершенных 2-раскрасок гиперкубов с заданными параметрами. Мы находим общую конструкцию таких раскрасок (дающую, в частности, все множества параметров, для которых такие раскраски известны) и получаем некоторые необходимые условия. Вопрос классифицирования таких раскрасок с точностью до изоморфизма лежит вне рамок настоящей работы.

1. Определения и основные свойства

Определение 1. Пусть G — простой граф, I — конечное множество. Отображение $T : V(G) \to I$ называется *совершенной раскраской с матрицей* $(s_{ij})_{i,j\in I}$, если оно сюръективно и для каждых i, j у каждой вершины цвета i число соседей цвета j равно s_{ij}.

Множество всех вершин цвета $i \in I$ будем обозначать через T_i; по определению все множества T_i непусты.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (коды проектов 05–01–00816, 06–01–00694).

Когда мы говорим, что $T : V(G) \to \{c_1, \dots, c_k\}$ является совершенной раскраской с матрицей

$$\begin{pmatrix} s_{11} & \dots & s_{1k} \\ & \dots & \\ s_{k1} & \dots & s_{kk} \end{pmatrix},$$

то предполагаем, что строки и столбцы матрицы соответствуют цветам в предписанном порядке.

В этой работе изучим совершенные 2-раскраски гиперкубов. Гиперкуб размерности n будем обозначать через H_n. Первый вопрос формулируется следующим образом: *для каких* n, a, b, c, d *существует совершенная раскраска* $T : H_n \to \{1, 0\}$ *с матрицей* $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$?

Два необходимых условия могут быть получены непосредственно:

$$a + b = c + d = n; \tag{$*$}$$

$$b \neq 0 \neq c, \quad \frac{b+c}{(b,c)} \quad \text{является степенью 2.} \tag{$**$}$$

Первое условие очевидно. Чтобы доказать второе, рассмотрим двудольный граф, порожденный долями T_1 и T_0. Он является бирегулярным; вершины цвета 1 имеют степень b, а вершины цвета 0 — степень c. Следовательно, $|T_1| = 2^n \cdot c/(b+c)$ должно быть целым. Отсюда следует требуемое.

Нам потребуются некоторые конструкции.

Предложение 1. (a) *Для каждого* $n = 2^k - 1$ *и любого* c, $1 \leq c \leq n$, *существует совершенная раскраска* H_n *с матрицей*

$$\begin{pmatrix} c-1 & n-c+1 \\ c & n-c \end{pmatrix}.$$

(b) *Если существует раскраска с матрицей* $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, *то для любого* $k \geq 1$ *существует раскраска с матрицей* $\begin{pmatrix} a+k & b \\ c & d+k \end{pmatrix}$.

(c) *Если существует раскраска с матрицей* $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, *то для каждого* $k \geq 1$ *существует раскраска с матрицей* $\begin{pmatrix} ka & kb \\ kc & kd \end{pmatrix}$.

Доказательство. (a) Для каждого $k \geq 1$ в гиперкубе размерности $n = 2^k - 1$ существует совершенный код с минимальным расстоянием 3 (например, код Хемминга). Характеристическая функция такого кода является совершенной раскраской с матрицей $\begin{pmatrix} 0 & n \\ 1 & n-1 \end{pmatrix}$ (это эквивалентно определению такого кода). Поэтому если мы возьмем в качестве T_1 объединение c комножеств кода Хемминга, то получим совершенную раскраску с требуемой матрицей: каждая вершина комножества смежна в точности одной вершине из любого другого комножества и несмежна вершинам из самого множества. Таким образом, вершина из T_1 имеет $c - 1$ соседей в T_1, а вершины вне T_1 имеют c соседей в T_1, что и требуется.

(b) Пусть $V = \{(x_1, \dots, x_n)\}$ — гиперкуб, $T : V \to \{1, 0\}$ — его раскраска с матрицей $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Возьмем $(n+k)$-мерный гиперкуб

$$W = \{(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_k)\},$$

определим

$$T'((x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_k)) = T((x_1, \dots, x_n)).$$

Раскраска T' имеет требуемый массив.

(c) Пусть $V = \{(x_1, \dots, x_n)\}$ — гиперкуб, $T : V \to \{1, 0\}$ — его раскраска с матрицей $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Возьмем (nk)-мерный гиперкуб

$$W = \{(y_{11}, \dots, y_{1k}, \dots, y_{n1}, \dots, y_{nk})\},$$

определим

$$T'((y_{11}, \dots, y_{1k}, \dots, y_{n1}, \dots, y_{nk})) = T((y_{11} + \dots + y_{1k}, \dots, y_{n1} + \dots + y_{nk}))$$

(сложение по модулю 2). Раскраска T' имеет требуемый массив. $\square$

Следующая теорема впервые была доказана С. В. Августиновичем и А. Э. Фрид (не опубликовано).

Теорема 1. *Для каждой пары b, c натуральных чисел, удовлетворяющих условию $(**)$, существует число $a_0 = a_0(b, c)$ такое, что матрица*

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & a+b-c \end{pmatrix}$$

является матрицей совершенной раскраски гиперкуба тогда и только тогда, когда $a \geq a_0$.

Доказательство. В силу предложения 1(b) достаточно показать, что матрица $\begin{pmatrix} a & b \\ c & a+b-c \end{pmatrix}$ может быть реализована в качестве массива совершенной раскраски по меньшей мере для некоторого значения a. Тогда наименьшее такое значение a_0 будет удовлетворять заключению.

Пусть $m = (b, c)$, $b = b'm$ и $c = c'm$. В силу $(**)$ имеем $b' + c' = 2^k$. По предложению 1(a) существует совершенная раскраска с матрицей

$$\begin{pmatrix} c'-1 & b' \\ c' & b'-1 \end{pmatrix}.$$

По предложению 1(c) существует совершенная раскраска с матрицей

$$\begin{pmatrix} m(c'-1) & mb' \\ mc' & m(b'-1) \end{pmatrix},$$

так что можем взять $m(c'-1) = c - (b, c)$ в качестве такого a. $\square$

Теперь наш первоначальный вопрос можно сформулировать более точно: *определить величину $a_0(b, c)$ для всех пар b, c, удовлетворяющих условию $(**)$.*

Представим несколько нижних оценок для функции a_0 и конструкцию, обеспечивающую лучшие верхние оценки для нее, чем конструкция, использованная при доказательстве теоремы 1.

Конструкция предложения 1(b) создает раскраски, не зависящие от некоторых размерностей: *вырожденные* раскраски в терминах работы [4]. Основная теорема из [4] утверждает, что если 2-раскраска H_n не является вырожденной (т. е. зависит от всех размерностей), то существует вершина, смежная по меньшей мере с $\Omega(\log_2 n)$ вершинами другого цвета. В частности, это означает, что для каждой пары b, c, удовлетворяющей $(**)$, существует функция $a_1(b,c)$ — максимальное значение a, для которого существует невырожденная совершенная раскраска с матрицей

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & a+b-c \end{pmatrix}.$$

Нижние и верхние оценки для случая $b = c$ получены в работе [5]; в наших терминах там доказано, что $3 \cdot 2^{c-1} - 2 - c \le a_1(c,c) \le c \cdot 2^{c-1} - c$.

2. Нижние оценки

Здесь мы докажем две общие нижние оценки на функцию $a_0(b,c)$. Обе теоремы доказаны чисто локальными счетными соображениями: мы рассматриваем только маленькую окрестность вершины.

Теорема 2. *Если $c < b < 2c$, то*

$$a_0(b,c) \ge \frac{1}{2} + \sqrt{c(b-c) + \frac{1}{4}} - (b-c).$$

Доказательство опирается на локальный аргумент глубины 2, т. е. мы рассматриваем только вершины на расстоянии ≤ 2 от некоторой вершины.

Пусть $T : V \to \{1,0\}$ — совершенная раскраска с матрицей $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Пусть $x = b - c$, тогда $0 < x < c$ и $d = a + x$.

Возьмем произвольную вершину v цвета 0. Она имеет c соседей цвета 1; назовем направления из v к ним 1-*направлениями*. Аналогично направления из v в ее $a + x$ соседей цвета 0 будем называть 0-*направлениями*. Теперь мы разделим V на подмножества V_{ij}, $i \ge 0$, $j \ge 0$, $i + j \le \dim V$. А именно, V_{ij} является множеством тех вершин, для которых самый короткий путь к v содержит i ребер 1-направлений и j ребер 0-направлений.

Имеем $|V_{ij}| = \binom{c}{i}\binom{a+x}{j}$; каждая вершина V_{ij} имеет i соседей из $V_{(i-1)j}$ и j соседей из $V_{i(j-1)}$. В частности, $V_{00} = \{v\}$, V_{10} и V_{01} являются множествами соседей вершины v цвета 1 и 0 соответственно.

Пусть p_{ij} — число вершин цвета 1 в V_{ij}. Подсчитав общее число соседей цвета 1 у вершин из V_{10} и из V_{01}, получим

$$2p_{20} + p_{11} = ca; \quad 2p_{02} + p_{11} = (a+x)c.$$

Следовательно, $2p_{02} - 2p_{20} = xc$, и получаем неравенства

$$2\binom{a+x}{2} \ge 2p_{02} \ge xc; \quad (a+x)(a+x-1) \ge xc.$$

Решив квадратное неравенство относительно a, придем к желаемому результату

$$a \ge \frac{1}{2} + \sqrt{cx + \frac{1}{4}} - x. \qquad \square$$

Теорема 3. *Если* $2c < b < 2c + \sqrt{3c-2}$, *то* $a_0(b,c) \geq 1$.

Доказательство. Эта оценка доказывается аргументом глубины 3.

Пусть $T : V \to \{1, 0\}$ — совершенная раскраска с матрицей $\begin{pmatrix} 0 & 2c+x \\ c & c+x \end{pmatrix}$. Необходимо показать, что $x^2 \geq 3c - 2$. Как в предыдущей теореме, выберем вершину v цвета 0 и определим множества V_{ij} и числа p_{ij}.

Числа p_{ij} при $i + j \leq 2$ определяются однозначно: $p_{20} = p_{11} = 0$, $p_{02} = c(c+x)/2$. Пусть $p = p_{21}$ и $q = p_{12}$. Подсчитав число соседей цвета 1 у вершин из V_{20} и из V_{02}, получим неравенства

$$p \leq \frac{c(c-1)(c-2)}{2}, \quad q \leq \frac{c(c+x)(x-1)}{2};$$

подсчитав число соседей цвета 1 у вершин из V_{11}, имеем

$$2p + 2q = c(c+x)(c-1).$$

Таким образом, $c(c-1)(c-2) + c(c+x)(x-1) \geq c(c+x)(c-1)$, и, упростив, мы придем к желаемому неравенству. $\square$

Отметим, что граничный случай $b = 2c$ невозможен, поскольку он не удовлетворяет $(**)$.

3. Основная конструкция

Наша основная конструкция состоит из двух шагов, представленных здесь двумя леммами.

Лемма 3.1. *Пусть* $T : H_n \to \{1, 0\}$ *— совершенная раскраска с матрицей* $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, *и пусть множество* T_1 *вершин цвета* 1 *может быть разбито на* k*-грани,* $0 \leq k \leq a$. *Тогда существует совершенная раскраска* $X : H_{2n} \to \{+, -, 0\}$ *с матрицей*

$$\begin{pmatrix} a-k & a+k & 2b \\ a+k & a-k & 2b \\ c & c & 2d \end{pmatrix}.$$

Доказательство. Пусть $I = \{1, \dots, n\}$ — множество индексов, и пусть $V = \{(v_1 \dots v_n)\} W = \{(x_1 y_1 \dots x_n y_n)\}$ — гиперкубы, которые мы раскрашиваем.

Представим данное разбиение множества T_1 на грани с помощью функции $p : T_1 \to 2^I$ такой, что для каждого $v \in T_1$ функция $p(v)$ является множеством направлений, определяющих грань, содержащую v. Отметим для дальнейшего использования, что если w является соседом $v \in T_1$ по направлению, принадлежащему $p(v)$, то $w \in T_1$ и $p(w) = p(v)$.

Для вершины $x = (x_1 y_1 \dots x_n y_n) \in W$ определим функцию $v(x) = (x_1 + y_1 \dots x_n + y_n) \in V$.

Начнем с раскраски $X' : W \to \{1, 0\}$, заданной с помощью $X'(x) = T(v(x))$. Она является совершенной раскраской с матрицей $\begin{pmatrix} 2a & 2b \\ 2c & 2d \end{pmatrix}$. Действительно, для каждой вершины $x \in W$ и каждого $i \in I$ соседу v_1 вершины $v(x)$ по направлению i (в V) соответствуют два соседа x того же цвета, что и v_1.

Теперь разделим класс цветов X'_1 на два класса цветов X_+ и X_-, которые вместе с $X_0 = X'_0$ формируют требуемую совершенную раскраску.

Для каждой вершины $x = (x_1y_1 \dots x_ny_n) \in X_1'$ определим ее *знак* следующим образом:

$$s(x) = \sum_{i \in I} x_i + \sum_{i \in p(v(x))} y_i.$$

Пусть $X_+ = \{x \mid s(x) = 0\}$ и $X_- = \{x \mid s(x) = 1\}$.

Чтобы проверить заключение леммы, достаточно подсчитать для каждого $x \in W$ число его соседей в множестве X_+.

Пусть $x \in W$ и $w \in T_1$ — сосед $v(x) \in V$ по некоторому направлению i. В W имеются два соседа z_1, z_2 вершины x, соответствующие w, которые различаются в точности по двум координатам: x_i и y_i.

Если $v(x) \in T_1$ и $i \in p(w)$, то, как указано выше, $p(w) = p(v(x))$. Следовательно, в этом случае знаки z_1, z_2 совпадают и отличаются от знака вершины x. Во всех других случаях $i \notin p(w)$ и z_1, z_2 имеют различные знаки. Теперь легко завершить доказательство леммы. □

Лемма 3.2. *Пусть $X : H_m \to \{+, -, 0\}$ — совершенная раскраска с матрицей*

$$\begin{pmatrix} a-k & a+k & 2b \\ a+k & a-k & 2b \\ c & c & 2d \end{pmatrix}$$

и $c \geq a + k$. Тогда существует совершенная раскраска с матрицей

$$\begin{pmatrix} a-k & 2b+c \\ c & 2d+2c-a-k \end{pmatrix}.$$

Доказательство. Пусть $p = c - a - k$ и $V = H_m$ — гиперкуб с раскраской X. Определим требуемую раскраску Y на гиперкубе $V \oplus W$, где $W = H_p$ — гиперкуб размерности p, следующим образом. Для $t = (v_1 \dots v_m w_1 \dots w_p)$ пусть $x = X((v_1 \dots v_m))$ и $s = w_1 + \dots + w_p$. Тогда

$$Y(t) = \begin{cases} 1, & \text{если } x =' +',\ s = 0, \\ 1, & \text{если } x =' -',\ s = 1, \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Можно представить себе эту конструкцию так: мы заменяем каждую вершину из V p-мерным гиперкубом, окрашенным либо в 0, либо в одну из двух правильных 2-раскрасок согласно цвету соответствующей вершины из V. Простой подсчет доказывает лемму. □

Предложение 2. $a_0(2b + c, c) \leq \max(0, a_0(b, c) - 1)$.

Доказательство. Пусть $a = a_0(b, c)$; мы знаем, что $a \leq c - 1$. Тогда существует совершенная раскраска с матрицей $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ при подходящем d. Пусть X — множество вершин первого цвета. На X индуцируется регулярный двудольный граф степени a.

Если $a = 0$, то рассматриваем X как разделенное на изолированные вершины (т. е. грани размерности 0). Если $a > 0$, то в X есть совершенное паросочетание; мы рассмотрим это паросочетание как разбиение класса X на грани размерности 1. В таком случае теорема доказывается с помощью последовательного применения лемм 3.1 и 3.2 начиная с заданной раскраски и заданного разбиения на грани. (Отметим, что неравенство $a \le c-1$ гарантирует справедливость неравенства леммы 3.2.) $\square$

Представим оценку, данную в предложении 2, в замкнутой форме. Нам потребуется определить простую функцию.

Определение 2. Пусть неотрицательные целые x, y таковы, что $x+y = 2^k - 1$. Одно из них нечетно; предположим, что его двоичное представление заканчивается l последовательными единицами, $1 \le l < k$. Определим $z(x,y) = k - l$.

Теорема 4. *Пусть b, c удовлетворяет условию $(**)$.*

(a) $a_0(c,b) = a_0(b,c) + b - c$.

(b) *Пусть $b \ge c$, $m = (b,c)$, $b = m(2b'+1)$ и $c = m(2c'+1)$. Если $c' = 0$, то $a_0(b,c) = 0$, в противном случае*

$$a_0(b,c) \le \max(0, c - m(z(b',c') + 1)).$$

Доказательство. (a) Совершенная раскраска минимальной размерности с заданными значениями b, c после перестановки цветов становится совершенной для значений c, b. Теперь из условия $(*)$ вытекает требуемое.

(b) Вместо функции $a_0(b,c)$ рассмотрим функцию $q(b,c) = c - a_0(b,c)$. Ее преимуществом является то, что в силу (a) она симметрична: $q(b,c) = q(c,b)$. Имеем $1 \le q(b,c) \le \min(b,c)$. Из предложения 2 следует, что $q(2b+c,c) \ge \min(c, q(b,c)+1)$.

Предположим вначале, что $m = 1$. Тогда b, c оба являются нечетными, $b+c$ есть степень 2. Необходимо показать, что $q(b,c) \ge \min(b,c,z(b',c')+1)$. Доказательство проведем по индукции; базисом индукции является случай $c = 1$: совершенный код демонстрирует, что $q(2b'+1,1) = 1 = 1 + z(b',0)$ в соответствии с утверждением, которое мы доказываем.

Шаг индукции: пусть $b' > c' > 0$, $b' + c' = 2^k - 1$, $b = 2b'+1$ и $c = 2c'+1$. По предложению 2 $q(b,c) \ge \min(c, q(b'-c',c)+1)$. Имеем $b'-c' = 2b' - 2^k + 1 = 2(b' - 2^{k-1}) + 1$. По индукции $q(b'-c',c) \ge \min(b'-c', c, z(b'-2^{k-1},c')+1)$. Но по нашим предположениям $z(b'-2^{k-1},c') + 1 = z(b',c')$. Отсюда следует нужный результат.

Для произвольного m этот результат вытекает из случая $m = 1$ путем применения предложения 1(c), как в доказательстве теоремы 1. $\square$

Начиная с тривиальной 2-раскраски гиперкуба H_1, применяя несколько итераций конструкции, неявно описанной в предложении 2, и затем используя, если необходимо, конструкции предложения 1(c) и (b), можно получить совершенную 2-раскраску для каждой матрицы параметров, для которой известно, что такая раскраска существует. Например, совершенная раскраска с матрицей $\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$, построенная Ю. Таранниковым [5], является результатом применения конструкции предложения 2 к дополнению совершенного кода размерности 3. (Можно показать, что с точностью до изоморфизма совершенная раскраска с вышеуказанной матрицей единственна.)

Неравенство из леммы 3.2 иногда реально ограничительно. Например, дополнение кода Хемминга размерности 7 можно разделить на 3-грани. Используя это в конструкции, можно было бы ожидать, что раскраска с матрицей $\begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 7 & 0 \end{pmatrix}$ перейдет в совершенную раскраску с матрицей $\begin{pmatrix} 3 & 9 \\ 7 & 5 \end{pmatrix}$. Тем не менее ее размерность слишком мала и самое лучшее, что мы можем получить этим методом, используя разбиение на 1-грани, есть $\begin{pmatrix} 5 & 9 \\ 7 & 7 \end{pmatrix}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Августинович С. В., Бородин О. В., Фрид А. Э.* Дистрибутивные раскраски плоских триангуляций минимальной степени пять // Дискретный анализ и исследование операций. 2001. Т. 8, № 3. С. 3–16.
2. *Axenovich M.* On multiple coverings of the infinite rectangular grid with balls of constant radius // Submitted to Discrete Math.
3. *Godsil C.* Equitable partitions // Combinatorics. Paul Erdős is Eighty. Keszthely (Hungary) 1993. V. 1. P. 173–192.
4. *Simon H.-U.* A tight $\Omega(\log\log n)$-bound on the time for parallel RAM's to compute nondegenerated boolean functions // FCT'83. Lecture Notes in Comput. Sci. 1984. V. 158. P. 439–444.
5. *Таранников Ю.* Теорема типа Саймона — Вегенера для регулярных булевых функций // Проблемы теоретической кибернетики: Тр. XIII междунар. конф. (Казань, 2002). М., 2002. С. 175.

Статья поступила 13 апреля 2007 г.

Фон-Дер-Флаас Дмитрий Германович
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090
d.flaass@gmail.com