Сибирский математический журнал
Июль—август, 2007. Том 48, № 4

УДК 517.958

О ЗАДАЧЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ СТРУКТУРЫ СЛОИСТОЙ СРЕДЫ И ФОРМЫ ИМПУЛЬСНОГО ИСТОЧНИКА

В. Г. Романов

Аннотация: Для уравнения, описывающего процесс распространения волн в полупространстве $\mathbb{R}^2_+ = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0\}$, рассматривается задача об определении скорости распространения волн, зависящей только от переменной y, и формы импульсного точечного источника, действующего на границе полупространства. Показывается, что при определенных предположениях о форме источника и скоростном строении среды обе неизвестные функции одной переменной однозначно определяются заданием смещений точек границы. Устанавливается оценка устойчивости решения задачи.

Ключевые слова: волновое уравнение, обратная задача, определение источника, устойчивость.

§ 1. Введение, основные результаты

Рассмотрим относительно функции $u(x,y,t)$ в области $G = \mathbb{R}^2_+ \times \mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2_+ = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0\}$, дифференциальное уравнение

$$u_{tt} - (c^2 u_x)_x - (c^2 u_y)_y = 0, \quad (x,y,t) \in G, \tag{1.1}$$

в котором коэффициент $c = c(y)$ является положительной функцией класса $\mathbf{C}^2(\mathbb{R}_+)$. Пусть функция $u(x,y,t)$ кроме уравнения (1.1) удовлетворяет следующим начальным и граничным условиям:

$$u|_{t<0} \equiv 0, \quad cu_y|_{y=0} = f(t)\,\delta(x) \quad (f(t) \equiv 0,\ t < 0). \tag{1.2}$$

При заданных функциях $c(y)$ и $f(t)$ задача (1.1), (1.2) корректна и определяет функцию $u(x,y,t)$, обладающую компактным носителем при любом конечном t. В приложениях (например, в геофизике) представляет интерес задача об определении структуры среды (в данном случае функции $c(y)$) по измеренным на границе области смещениям точек среды:

$$u|_{y=0} = F(x,t), \quad (x,t) \in \mathbb{R}^2_+. \tag{1.3}$$

Эта задача, называемая *обратной динамической задачей акустики*, рассматривалась при известной функции $f(t)$ в ряде работ (см., например, [1–6]). Обычно при этом в качестве $f(t)$ выбиралась дельта-функция Дирака $\delta(t)$ либо регулярная функция, имеющая конечный разрыв при $t = 0$. Именно при

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 05–01–00171) и Сибирского отделения РАН (проект 2006 № 26).

таких предположениях о форме источника установлен ряд теорем единственности и устойчивости в обратной задаче и обоснованы численные алгоритмы ее решения.

В настоящей статье рассматривается более общая задача об определении двух функций $c(y)$ и $f(t)$ по информации (1.3). Эта постановка мотивирована тем обстоятельством, что граничное условие (1.2) физически моделирует точечный взрыв на границе области и в связи с этим функция $f(t)$ не может быть непосредственно измерена. Для ее определения можно использовать только наблюдения за тем, как колеблется граница области. Подобная постановка задачи для уравнения колебаний струны (это уравнение соответствует тому случаю, когда решение задачи не зависит от переменной x, например, если в граничном условии (1.2) убрать дельта-функцию) рассматривалась М. Л. Гервером [7]. Однако в этом случае, измеряемая информация представляет собой функцию одной переменной, а неизвестных функций две. Поэтому найти их без очень сильного сужения класса искомых функций невозможно, что фактически и было установлено в цитируемой выше работе. Условия полученной в ней теоремы единственности нельзя проверить по данным задачи.

Имеющаяся в рассматриваемой обратной задаче переопределенность (неизвестны две функции одной переменной, в то время как заданная информация представляет собой функцию двух переменных) позволяет надеяться на положительное решение этой задачи. Конечно, заранее ясно, что без некоторых достаточно естественных априорных предположений о структуре функции $f(t)$ и здесь не обойтись. Действительно, если $f(t) \equiv 0$, то $F(x,t) \equiv 0$, и найти функцию $c(y)$ в этом случае невозможно.

Ниже, при изучении обратной задачи, предполагается, что функция $f(t)$ имеет следующую структуру:

$$f(t) = a\delta(t) + \hat{f}(t)\theta_0(t), \quad a \neq 0, \tag{1.4}$$

где $\theta_0(t)$ — функция Хевисайда: $\theta_0(t) = 1$ при $t \geq 0$ и $\theta_0(t) = 0$ при $t < 0$, а $\hat{f}(t) \in \mathbf{C}^1[0,T]$, $T > 0$. Предполагается также, что функция $c(y)$ известна в достаточно тонком слое $y \in [0, y_0]$, $y_0 > 0$, прилегающем к границе полупространства $\mathbb{R}^2_+$. Возможно, что от последнего предположения можно избавиться, но этот вопрос требует специального исследования. В том подходе к анализу обратной задачи, который изложен ниже, возникают интегральные уравнения второго рода с вырождением при $y_0 \to 0$. В то же время предположение о том, что строение среды известно в прилегающем к границе области слое, не является сильно ограничительным для практических приложений.

При сделанных выше предположениях доказывается, что задание функции $F(x,t)$ на множестве $(x,t) \in \mathbb{R} \times [0,T]$, $T > 0$, позволяет однозначно найти функцию $f(t)$ для всех $t \leq T$ и скорость распространения волн $c(y)$ на некотором конечном интервале $[y_0, y_1]$. Строится также оценка устойчивости решения этой задачи. Перейдем к формулировке основных полученных результатов.

Обозначим через $\tilde{u}(\lambda, y, t)$ преобразование Фурье функции $u(x,y,t)$ по переменной x:

$$\tilde{u}(\lambda, y, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{\mathbb{R}} u(x,y,t) e^{i\lambda x}\, dx.$$

Тогда задача (1.1)–(1.3) преобразуется к виду

$$\tilde{u}_{tt} - (c^2 \tilde{u}_y)_y + \lambda^2 c^2 \tilde{u} = 0, \quad (t,y) \in \mathbb{R}^2_+, \tag{1.5}$$

$$\tilde{u}|_{t<0} \equiv 0, \quad c\tilde{u}_y|_{y=0} = f(t), \tag{1.6}$$

$$\tilde{u}|_{y=0} = \widetilde{F}(\lambda, t), \quad (\lambda, t) \in \mathbb{R}_+^2. \tag{1.7}$$

Введем вместо y новую независимую переменную

$$z = \int\limits_0^y \frac{d\xi}{c(\xi)}\,. \tag{1.8}$$

Определяемая равенством (1.8) функция $y = h(z)$ является монотонной и определяет взаимно однозначное соответствие между y и z. Обозначим

$$c(h(z)) = \hat{c}(z), \quad z_0 = \int\limits_0^{y_0} \frac{d\xi}{c(\xi)} \tag{1.9}$$

и введем новую функцию $v(\lambda, z, t)$ равенством

$$v(\lambda, z, t) = \tilde{u}(\lambda, h(z), t)\sqrt{\frac{\hat{c}(z)}{c(0)}}.$$

Функция $v(\lambda, z, t)$ удовлетворяет соотношениям

$$v_{tt} - v_{zz} - q(\lambda, z)v = 0, \quad (t, z) \in \mathbb{R}_+^2, \tag{1.10}$$

$$v|_{t<0} \equiv 0, \quad (v_z + Hv)|_{z=0} = f(t), \tag{1.11}$$

$$v|_{z=0} = \widetilde{F}(\lambda, t), \quad (\lambda, t) \in \mathbb{R}_+^2, \tag{1.12}$$

в которых $H = -\hat{c}'(0)/(2\hat{c}(0))$ и

$$q(\lambda, z) = q_0(z) - \lambda^2 q_1(z), \quad q_0(z) = \frac{[\hat{c}'(z)]^2 - 2\hat{c}(z)\hat{c}''(z)}{4\hat{c}^2(z)}, \quad q_1(z) = \hat{c}^2(z). \tag{1.13}$$

При сделанном выше предположении о гладкости функции $c(y)$ очевидно, что $q_0(z) \in \mathbf{C}(\mathbb{R})$, $q_1(z) \in \mathbf{C}^2(\mathbb{R})$. Заметим, что функции $q_0(z)$ и $q_1(z)$ не являются функционально независимыми, так как определяются одной функцией $\hat{c}(z)$. При изучении обратной задачи удобно разыскивать функцию $\hat{c}(z)$. При известной $\hat{c}(z)$ функция $h(z)$, определяющая соответствие между переменными y и z, находится по формуле

$$h(z) = \int\limits_0^z \hat{c}(\zeta)\,d\zeta, \tag{1.14}$$

следующей из равенства (1.8). Пара $\{\hat{c}(z), h(z)\}$ задает функцию $c(y)$ в параметрической форме. При этом $c(y) = \hat{c}(h^{-1}(y))$. Параметрическое задание функции $c(y)$ оказывается предпочтительнее при рассмотрении обратной задачи, так как длина временного интервала наблюдения T очень просто связана с величиной интервала по переменной z, на котором можно найти функции $\hat{c}(z)$, $h(z)$, а именно, эти функции однозначно находятся при $z \in [0, T/2]$.

Лемма 1.1. *Пусть функция $f(t)$ имеет структуру (1.4) и $\hat f(t) \in \mathbf{C}^1[0,T]$ при некотором $T > 0$, $\hat c(z) \in \mathbf{C}^2[0,T/2]$. Тогда при каждом фиксированном значении параметра λ решение задачи (1.10), (1.11) тождественно равно нулю при $t < z$, а для $(z,t) \in D(T)$, $D(T) = \{(z,t) \mid 0 \le z \le t \le T - z\}$, принадлежит функциональному классу $\mathbf{C}^2(D(T))$ и для решения справедлива оценка*

$$\|v\|_{\mathbf{C}^2(D(T))} \le C(|a| + \|\hat f\|_{\mathbf{C}^1[0,T]}), \tag{1.15}$$

в которой постоянная C зависит только от T, λ и $\|\hat c\|_{\mathbf{C}^2[0,T/2]}$. Кроме того, функция

$$w(\lambda_1, \lambda_2, z, t) = \frac{\partial^2}{\partial t^2}(v(\lambda_1, z, t) - v(\lambda_2, z, t))$$

при любых фиксированных λ_1, λ_2 является функцией класса $\mathbf{C}^1(D(T))$.

Доказательство этой леммы дано в § 2.

Следствие. *При выполнении условий леммы 1.1 функция $\widetilde F(\lambda, t)$, входящая в равенство (1.12), при каждом фиксированном λ принадлежит классу $\mathbf{C}^2[0,T]$, а функция $\widehat F(t) \equiv \widetilde F(\lambda_1, t) - \widetilde F(\lambda_2, t)$ — классу $\mathbf{C}^3[0,T]$. Кроме того, из полученных ниже при доказательстве леммы формул (2.5)–(2.8) вытекает, что имеют место равенства*

$$\begin{gathered}\widetilde F(\lambda, 0) \equiv F_0 = -a, \quad \widetilde F_t(\lambda, 0) \equiv F_1 = -\hat f(0) - \frac{aH}{2}, \\ \widetilde F_{tt}(\lambda, 0) \equiv F_2(\lambda) = -\hat f'(0) + HF_1 - \frac{a}{4} q(\lambda, 0),\end{gathered} \tag{1.16}$$

в которых F_0 и F_1 не зависят от λ. Последнее из этих равенств говорит о том, что функция $F_2(\lambda)$ должна быть линейной функцией от λ^2, т. е. представима в виде $F_2(\lambda) = F_{20} + F_{21}\lambda^2$, причем $F_{21} = aq_1(0)/4 = -F_0 q_1(0)/4$.

Таким образом, для разрешимости обратной задачи в рассматриваемом классе функция $\widetilde F(\lambda, t)$ должна удовлетворять определенным условиям гладкости и дополнительным условиям (1.16). При этом сделанное выше предположение, что $a \ne 0$, приводит к эквивалентному условию $F_0 \ne 0$.

В дальнейшем будем предполагать, что функция $\widetilde F(\lambda, t)$ удовлетворяет этим необходимым условиям. Кроме того, несколько сузим данные задачи, полагая, что функция $\widetilde F(\lambda, t)$ известна только для двух значений λ_1, λ_2 таких, что $\lambda_1^2 \ne \lambda_2^2$. Оказывается, уже этими суженными данными функции $\hat c(z)$ и $f(t)$ определяются однозначно.

Обозначим через $\Lambda(a_0, f_0, c_0, c_{00})$ множество пар функций $\{f(t), \hat c(z)\}$, удовлетворяющих при некотором $T > 0$ следующим условиям:

1) функция $f(t)$ представима в виде (1.4) и для нее выполнены неравенства

$$|a| \ge a_0 > 0, \quad \|\hat f\|_{\mathbf{C}^1[0,T]} \le f_0, \tag{1.17}$$

2) функция $\hat c(z)$ принадлежит классу $\mathbf{C}^2[0,T/2]$ и для нее выполнены неравенства

$$0 < c_0 \le \hat c(z), \quad \|\hat c\|_{\mathbf{C}^2[0,T/2]} \le c_{00} < \infty. \tag{1.18}$$

Справедлива следующая теорема единственности.

Теорема 1.1. *Пусть для некоторого* $T > 2z_0$ *функции* $f^{(k)}(t)$, $\hat{c}^{(k)}(z)$, $k = 1, 2$, *принадлежат множеству* $\Lambda(a_0, f_0, c_0, c_{00})$ *и функции* $\widetilde{F}^{(k)}(\lambda_j, t)$, $j = 1, 2$, *являются следами при* $z = 0$ *решений задач* (1.10), (1.11) *при* $f(t) = f^{(k)}(t)$ *и* $\hat{c}(z) = \hat{c}^{(k)}(z)$, $k = 1, 2$.

Тогда если $\widetilde{F}^{(1)}(\lambda_j, t) = \widetilde{F}^{(2)}(\lambda_j, t)$ *для* $t \le T$, $j = 1, 2$, *и* $\hat{c}^{(1)}(z) = \hat{c}^{(2)}(z)$ *для* $z \in [0, z_0]$, *то* $f^{(1)}(t) = f^{(2)}(t)$ *для* $t \le T$ *и* $\hat{c}^{(1)}(z) = \hat{c}^{(2)}(z)$ *для* $z \in [z_0, T/2]$.

Эта теорема является простым следствием следующей теоремы, характеризующей устойчивость решения обратной задачи.

Теорема 1.2. *Пусть для* $T > 2z_0 > 0$ *функции* $f^{(k)}(t)$, $\hat{c}^{(k)}(z)$, $\widetilde{F}^{(k)}(\lambda_j, t)$, $j = 1, 2$, $k = 1, 2$, *удовлетворяют условиям теоремы* 1.1. *Пусть функция* $h^{(k)}(z)$ *находится по формуле* (1.14) *при* $\hat{c}(z) = \hat{c}^{(k)}(z)$, *число* $a^{(k)}$ *соответствует коэффициенту при дельта-функции в представлении* $f^{(k)}(t)$ *в виде* (1.4), $\widehat{F}^{(k)}(t) \equiv \widetilde{F}^{(k)}(\lambda_1, t) - \widetilde{F}^{(k)}(\lambda_2, t)$. *Тогда найдется положительная постоянная* C, *зависящая от* T, z_0, λ_1, λ_2, a_0, f_0, c_0, c_{00}, *такая, что имеет место неравенство*

$$\|\hat{c}^{(1)} - \hat{c}^{(2)}\|_{\mathbf{C}^2[z_0,T/2]} + \|h^{(1)} - h^{(2)}\|_{\mathbf{C}^3[z_0,T/2]} + |a^{(1)} - a^{(2)}| + \|\hat{f}^{(1)} - \hat{f}^{(2)}\|_{\mathbf{C}^1[0,T]} \le C\varepsilon, \tag{1.19}$$

в котором

$$\varepsilon = \|\hat{c}^{(1)} - \hat{c}^{(2)}\|_{\mathbf{C}^2[0,z_0]} + \sum_{j=1}^{2} \|\widetilde{F}^{(1)}(\lambda_j, t) - \widetilde{F}^{(2)}(\lambda_j, t)\|_{\mathbf{C}^2[0,T]} + \|\widehat{F}^{(1)} - \widehat{F}^{(2)}\|_{\mathbf{C}^3[0,T]}. \tag{1.20}$$

Доказательство теоремы приведено в § 3.

Замечание. Практически эквивалентное вышеприведенному, но более общее предположение о форме источника заключается в том, что производная функции $f(t)$ некоторого конечного порядка n (в том числе, возможно, и $n = 0$) имеет структуру (1.4). В этом случае, дифференцируя по переменной t равенства (1.1)–(1.3), приходим для n раз продифференцированных по t функций в точности к той же самой задаче при исходном предположении.

§ 2. Доказательство леммы 1.1

Равенство $v(\lambda, z, t) \equiv 0$ при $z > t \ge 0$ очевидно. Легко проверить, что справедливо также равенство

$$v(\lambda, z, z + 0) = -a/2, \tag{2.1}$$

в котором a — число из формулы (1.4). Так как

$$v_{tt} - v_{zz} = \left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial z}\right)(v_t + v_z) = \left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z}\right)(v_t - v_z),$$

то для $(z, t) \in D(T)$ из соотношений (1.10), (1.11) и (2.1) интегрированием вдоль соответствующих характеристик дифференциальных операторов первого порядка получим равенства

$$(v_t + v_z)(\lambda, z, t) = \int\limits_{z}^{(z+t)/2} q(\lambda, \zeta) v(\lambda, \zeta, t + z - \zeta)\, d\zeta, \tag{2.2}$$

$$v(\lambda,0,t) = -\frac{a}{2}e^{Ht} - \int\limits_0^t e^{H(t-\tau)}\hat{f}(\tau)d\tau + \int\limits_0^t e^{H(t-\tau)}\int\limits_0^{\tau/2} q(\lambda,\zeta)v(\lambda,\zeta,\tau-\zeta)\,d\zeta d\tau, \tag{2.3}$$

$$(v_t - v_z)(\lambda,z,t) = -2\hat{f}(t-z) + 2Hv(\lambda,0,t-z)$$
$$+ \int\limits_0^{(t-z)/2} q(\lambda,\zeta)v(\lambda,\zeta,t-z-\zeta)\,d\zeta + \int\limits_0^z q(\lambda,\zeta)v(\lambda,\zeta,t-z+\zeta)\,d\zeta. \tag{2.4}$$

Отсюда

$$v_t(\lambda,z,t) = -\hat{f}(t-z) + Hv(\lambda,0,t-z) + \frac{1}{2}\int\limits_0^{(t-z)/2} q(\lambda,\zeta)v(\lambda,\zeta,t-z-\zeta)\,d\zeta$$
$$+ \frac{1}{2}\int\limits_0^z q(\lambda,\zeta)v(\lambda,\zeta,t-z+\zeta)\,d\zeta + \frac{1}{2}\int\limits_z^{(z+t)/2} q(\lambda,\zeta)v(\lambda,\zeta,t+z-\zeta)\,d\zeta, \tag{2.5}$$

$$v_z(\lambda,z,t) = \hat{f}(t-z) - Hv(\lambda,0,t-z) - \frac{1}{2}\int\limits_0^{(t-z)/2} q(\lambda,\zeta)v(\lambda,\zeta,t-z-\zeta)\,d\zeta$$
$$- \frac{1}{2}\int\limits_0^z q(\lambda,\zeta)v(\lambda,\zeta,t-z+\zeta)\,d\zeta + \frac{1}{2}\int\limits_z^{(z+t)/2} q(\lambda,\zeta)v(\lambda,\zeta,t+z-\zeta)\,d\zeta, \tag{2.6}$$

$$v(\lambda,z,t) = -\frac{a}{2} - \int\limits_0^{t-z}\hat{f}(\tau)d\tau + H\int\limits_0^{t-z} v(\lambda,0,\tau)d\tau$$
$$+ \frac{1}{2}\int\limits_z^t \int\limits_0^{(\tau-z)/2} q(\lambda,\zeta)v(\lambda,\zeta,\tau-z-\zeta)\,d\zeta d\tau$$
$$+ \frac{1}{2}\int\limits_z^t\int\limits_0^z q(\lambda,\zeta)v(\lambda,\zeta,\tau-z+\zeta)\,d\zeta d\tau + \frac{1}{2}\int\limits_z^t \int\limits_z^{(z+\tau)/2} q(\lambda,\zeta)v(\lambda,\zeta,\tau+z-\zeta)\,d\zeta d\tau. \tag{2.7}$$

Уравнение (2.7) является в области $D(T)$ интегральным уравнением типа Вольтерра и определяет единственное непрерывное решение. Равенства (2.5), (2.6) показывают, что это решение является непрерывно дифференцируемым в $D(T)$. Непосредственный подсчет вторых производных приводит к установлению факта дважды непрерывной дифференцируемости решения в той же области. Таким образом, $v \in \mathbf{C}^2(D(T))$. Справедливость для этой функции оценки (1.15) достаточно очевидна.

Докажем оставшуюся часть леммы. Вычислим с этой целью вторую производную решения по переменной t. Из формул (2.5), (2.1) следует равенство

$$v_{tt}(\lambda,z,t) = -\hat{f}'(t-z) + Hv_t(\lambda,0,t-z) - \frac{a}{8}\left(q\left(\lambda,\frac{t-z}{2}\right) + q\left(\lambda,\frac{t+z}{2}\right)\right)$$

$$+\frac{1}{2}\int\limits_0^{(t-z)/2} q(\lambda,\zeta)v_t(\lambda,\zeta,t-z-\zeta)\,d\zeta$$

$$+\frac{1}{2}\int\limits_0^{z} q(\lambda,\zeta)v_t(\lambda,\zeta,t-z+\zeta)\,d\zeta+\frac{1}{2}\int\limits_z^{(z+t)/2} q(\lambda,\zeta)v_t(\lambda,\zeta,t+z-\zeta)\,d\zeta. \quad (2.8)$$

Рассмотрим функцию $w(\lambda_1,\lambda_2,z,t)=v_{tt}(\lambda_1,z,t)-v_{tt}(\lambda_2,z,t)$. Из формулы (2.8) находим, что

$$\begin{aligned} w(\lambda_1,\lambda_2,z,t) &= H[v_t(\lambda_1,0,t-z)-v_t(\lambda_2,0,t-z)] \\ &\quad+\frac{a}{8}\big(\lambda_1^2-\lambda_2^2\big)\left(q_1\left(\frac{t-z}{2}\right)+q_1\left(\frac{t+z}{2}\right)\right) \\ &+\frac{1}{2}\int\limits_0^{(t-z)/2}[q(\lambda_1,\zeta)v_t(\lambda_1,\zeta,t-z-\zeta)-q(\lambda_2,\zeta)v_t(\lambda_2,\zeta,t-z-\zeta)]\,d\zeta \\ &+\frac{1}{2}\int\limits_0^{z}[q(\lambda_1,\zeta)v_t(\lambda_1,\zeta,t-z+\zeta)-q(\lambda_2,\zeta)v_t(\lambda_2,\zeta,t-z+\zeta)]\,d\zeta \\ &+\frac{1}{2}\int\limits_z^{(z+t)/2}[q(\lambda_1,\zeta)v_t(\lambda_1,\zeta,t+z-\zeta)-q(\lambda_2,\zeta)v_t(\lambda_2,\zeta,t+z-\zeta)]\,d\zeta. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Отсюда легко следует, что производные первого порядка функции w непрерывны в области $D(T)$. Более того, для этой функции имеет место оценка, аналогичная оценке (1.15),

$$\|w\|_{\mathbf{C}^1(D(T))}\le C(|a|+\|\hat f\|_{\mathbf{C}^1[0,T]}) \quad (2.10)$$

с постоянной C, зависящей только от T, λ_1, λ_2 и $\|\hat c\|_{\mathbf{C}^2[0,T/2]}$.

§ 3. Доказательство теоремы 1.2

Построим вначале для функций v, v_t, v_{tt}, $\hat c$ некоторую замкнутую в области $D(T)$ систему интегральных уравнений. В эту систему наряду с названными будут входить и некоторые вспомогательные функции. Кроме того, сохраним пока для удобства записи в качестве аргумента у функций v, q параметр λ, хотя в дальнейшем нам потребуются значения этих функций только при $\lambda=\lambda_j$, $j=1,2$.

Заметим, что функции v_t, v_{tt} легко вычисляются на характеристике $t=z$. В самом деле, полагая в равенствах (2.5), (2.8) $t=z$ и используя равенства (2.5), (2.8), получаем

$$v_t(\lambda,z,z)\equiv\alpha_1(\lambda,z)=F_1-\frac{a}{4}\int\limits_0^z q(\lambda,\zeta)\,d\zeta, \quad (3.1)$$

$$v_{tt}(\lambda,z,z)\equiv\alpha_2(\lambda,z)=F_2(\lambda)-\frac{a}{8}(q(\lambda,z)-q(\lambda,0))+\frac{1}{2}\int\limits_0^z q(\lambda,\zeta)\alpha_1(\lambda,\zeta)\,d\zeta. \quad (3.2)$$

Рассмотрим вспомогательную задачу: *найти функцию $\varphi(z,t)$, удовлетворяющую соотношениям*

$$\begin{gathered} \varphi_{tt} - \varphi_{zz} = \gamma(z,t), \quad 0 < z < t \le T - z, \\ \varphi(0,t) = \varphi_0(t),\ 0 \le z \le T, \quad \varphi(z,z) = \varphi_1(z),\ 0 \le z \le T/2, \end{gathered} \tag{3.3}$$

в которых γ, φ_0, φ_1 — непрерывные функции, причем φ_0, φ_1 удовлетворяют условию согласования: $\varphi_0(0) = \varphi_1(0)$. Нетрудно проверить, что обобщенное решение этой задачи дается формулой

$$\varphi(z,t) = \varphi_0(t-z) + \varphi_1\left(\frac{t+z}{2}\right) - \varphi_1\left(\frac{t-z}{2}\right) + \frac{1}{2}\int\limits_{D(z,t)} \gamma(\zeta,\tau)\,d\zeta d\tau, \tag{3.4}$$

в которой $D(z,t) = \{(\zeta,\tau) \mid (t-z)/2 + |\zeta - (t-z)/2| < \tau < t - |\zeta - z|\}$.

Используя формулу (3.4) и условие (1.2), нетрудно построить интегральные уравнения для функций v, v_t, v_{tt}, в которые неизвестная функция $f(t)$ не входит. В самом деле, каждая из этих функций удовлетворяет в области $D(T)$ дифференциальному уравнению (1.10), и, кроме того, их значения при $z = 0$ определяются функцией $\widetilde{F}(\lambda,t)$, а при $t = z$ — равенством $v|_{t=z} = F_0$ и соотношениями (3.1), (3.2). Из сказанного выше вытекают уравнения

$$v(\lambda,z,t) = \widetilde{F}(\lambda,t-z) + \frac{1}{2}\int\limits_{D(z,t)} q(\lambda,\zeta)v(\lambda,\zeta,\tau)\,d\zeta d\tau, \tag{3.5}$$

$$\begin{aligned} v_t(\lambda,z,t) = \widetilde{F}_t(\lambda,t-z) &+ \alpha_1\left(\lambda,\frac{t+z}{2}\right) - \alpha_1\left(\lambda,\frac{t-z}{2}\right) \\ &+ \frac{1}{2}\int\limits_{D(z,t)} q(\lambda,\zeta)v_\tau(\lambda,\zeta,\tau)\,d\zeta d\tau, \end{aligned} \tag{3.6}$$

$$\begin{aligned} v_{tt}(\lambda,z,t) = \widetilde{F}_{tt}(\lambda,t-z) &+ \alpha_2\left(\lambda,\frac{t+z}{2}\right) - \alpha_2\left(\lambda,\frac{t-z}{2}\right) \\ &+ \frac{1}{2}\int\limits_{D(z,t)} q(\lambda,\zeta)v_{\tau\tau}(\lambda,\zeta,\tau)\,d\zeta d\tau. \end{aligned} \tag{3.7}$$

При заданной функции $\hat{c}(z)$ каждое из этих уравнений является по аргументу t интегральным уравнением типа Вольтерра, что обеспечивает факториальную скорость сходимости метода последовательных приближений и гарантирует существование и единственность непрерывного решения каждого из уравнений.

Формула (3.7) позволяет вычислить производную функции $w(\lambda_1,\lambda_2,z,t) = v_{tt}(\lambda_1,z,t) - v_{tt}(\lambda_2,z,t)$ по переменной z. С этой целью заметим, что интеграл по области $D(z,t)$ может быть записан в виде

$$\int\limits_{D(z,t)} \gamma(\zeta,\tau)\,d\zeta d\tau = \int\limits_0^{(t+z)/2} \int\limits_{(t-z)/2+|\zeta-(t-z)/2|}^{t-|z-\zeta|} \gamma(\zeta,\tau)\,d\zeta d\tau.$$

Дифференцируя равенство (3.7) по переменной z, находим, что

$$w_z(\lambda_1,\lambda_2,z,t) = -\widehat{F}_{ttt}(t-z) + \frac{1}{2}\left[\beta_2\left(\frac{t+z}{2}\right) + \beta_2\left(\frac{t-z}{2}\right)\right]$$

$$
+\frac{1}{2}\int\limits_0^{(t+z)/2} q(\lambda_1,\zeta)\Big[v_{\tau\tau}(\lambda_1,\zeta,t-|z-\zeta|)\,\mathrm{sign}(\zeta-z)
$$

$$
+\frac{1}{2}v_{\tau\tau}(\lambda_1,\zeta,(t-z)/2+|\zeta-(t-z)/2|)(1-\mathrm{sign}(\zeta-(t-z)/2))\Big]\,d\zeta
$$

$$
-\frac{1}{2}\int\limits_0^{(t+z)/2} q(\lambda_2,\zeta)\Big[v_{\tau\tau}(\lambda_2,\zeta,t-|z-\zeta|)\,\mathrm{sign}(\zeta-z)
$$

$$
+\frac{1}{2}v_{\tau\tau}(\lambda_2,\zeta,(t-z)/2+|\zeta-(t-z)/2|)(1-\mathrm{sign}(\zeta-(t-z)/2))\Big]\,d\zeta, \quad (3.8)
$$

в котором

$$
\begin{aligned}
\beta_2(z) &\equiv (\alpha_2)_z(\lambda_1,z)-(\alpha_2)_z(\lambda_2,z)\\
&= \frac{1}{8}(\lambda_1^2-\lambda_2^2)q_1'(z)+\frac{1}{2}[q(\lambda_1,\zeta)\alpha_1(\lambda_1,z)-q(\lambda_2,\zeta)\alpha_1(\lambda_2,z)]\\
&= \frac{\lambda_1^2-\lambda_2^2}{2}\Bigg\{-F_1q_1(z)+\frac{a}{4}\Bigg[q_0(z)\int\limits_0^z q_1(\zeta)\,d\zeta+q_1(z)\int\limits_0^z q_0(\zeta)\,d\zeta\\
&\qquad +q_1'(z)-\big(\lambda_1^2+\lambda_2^2\big)q_1(z)\int\limits_0^z q_1(\zeta)\,d\zeta\Bigg]\Bigg\}. \quad (3.9)
\end{aligned}
$$

Так как $w_z|_{z=0}=-Hw|_{z=0}=-H\widehat{F}_{tt}$, имеет место равенство

$$
\widehat{F}_{ttt}(t)+H\widehat{F}_{tt}(t)=\beta_2\left(\frac{t}{2}\right)+\int\limits_0^{t/2}[q(\lambda_1,\zeta)v_{tt}(\lambda_1,\zeta,t-\zeta)-q(\lambda_2,\zeta)v_{tt}(\lambda_2,\zeta,t-\zeta)]\,d\zeta. \quad (3.10)
$$

Из соотношений (3.9), (3.10) находим, что при $\lambda_1^2\neq\lambda_2^2$ и $z\geq z_0$ имеет место равенство

$$
\begin{aligned}
q_0(z)=\Bigg[\int\limits_0^z q_1(\zeta)\,d\zeta\Bigg]^{-1}\Bigg\{&-q_1(z)\int\limits_0^z q_0(\zeta)\,d\zeta-q_1'(z)+(\lambda_1^2+\lambda_2^2)q_1(z)\int\limits_0^z q_1(\zeta)\,d\zeta\\
&+\frac{4F_1}{a}q_1(z)+\frac{8}{a(\lambda_1^2-\lambda_2^2)}\Bigg([\widehat{F}_{ttt}(t)+H\widehat{F}_{tt}(t)]_{t=2z}\\
&-\int\limits_0^z[q(\lambda_1,\zeta)v_{tt}(\lambda_1,\zeta,2z-\zeta)-q(\lambda_2,\zeta)v_{tt}(\lambda_2,\zeta,2z-\zeta)]\,d\zeta\Bigg)\Bigg\}, \quad z_0\leq z\leq T/2. \quad (3.11)
\end{aligned}
$$

Заметим, что при $z\geq z_0>0$ справедлива оценка

$$
\int\limits_0^z q_1(\zeta)\,d\zeta\geq c_0^2z_0, \quad (3.12)
$$

которая гарантирует невырождение уравнения (3.11), если $z_0>0$.

Выпишем уравнения, связывающие функции $\hat c(z)$, $\hat c'(z)$ с функцией $q_0(z)$. Используя равенства (1.13), находим, что

$$\hat c'(z) = \hat c'(z_0) + \frac{1}{4}\int\limits_{z_0}^{z}\left\{\frac{[\hat c'(\zeta)]^2}{\hat c(\zeta)} - 2q_0(\zeta)\hat c(\zeta)\right\}d\zeta, \quad z_0 \le z \le T/2, \tag{3.13}$$

$$\hat c(z) = \hat c(z_0) + \int\limits_{z_0}^{z} \hat c'(\zeta)\,d\zeta, \quad z_0 \le z \le T/2. \tag{3.14}$$

При заданной на отрезке $[0, z_0]$ функции $\hat c(z)$ соотношения (3.1), (3.2), (3.5)–(3.7), (3.11), (3.13), (3.14) определяют в области $D(T)$ замкнутую систему интегральных уравнений для отыскания функций v, v_t, v_{tt}, α_1, α_2 при $\lambda = \lambda_j$, $j = 1, 2$, и функций $q_0(z)$, $\hat c'(z)$, $\hat c(z)$. Напомним, что при этом $q(z, \lambda_j) = q_0(z) - \lambda_j^2 q_1(z)$, $j = 1, 2$, и $q_1(z) = \hat c^2(z)$. После нахождения искомых функций регулярная часть неизвестной функции, характеризующая форму источника, вычисляется по формуле

$$\hat f(t) = (v_z + Hv)_{z=0} = -\widetilde F_t(\lambda, t) + \int\limits_0^{t/2} q(\lambda, \zeta) v(\lambda, \zeta, t-\zeta)\,d\zeta + Hv(\lambda, 0, t). \tag{3.15}$$

При этом $\lambda = \lambda_1$ или $\lambda = \lambda_2$, результат вычисления не должен зависеть от выбора параметра λ. Коэффициент a, определяющий сингулярную часть функции $f(t)$, находится по формуле $a = -F_0 = -\widetilde F(\lambda_j, 0)$.

Получим оценку решения этой системы. Пусть функции $f^{(k)}(t)$, $\hat c^{(k)}(z)$, $\widetilde F^{(k)}(\lambda_j, t)$, $\widehat F^{(k)}(t)$, $h^{(k)}(z)$, $k = 1, 2$, $j = 1, 2$, и числа $a^{(k)}$ такие, как они определены в теореме 1.2. Обозначим через $q_0^{(k)}(z)$, $q_1^{(k)}(z)$, $q^{(kj)}(z) = q_0^{(k)}(z) - \lambda_j^2 q_1^{(k)}(z)$ вспомогательные функции, соответствующие функциям $\hat c^{(k)}(z)$. Пусть, кроме того, $H^{(k)} = -(\hat c^{(k)})'(0)/(2\hat c^{(k)}(0))$, $F_0^{(k)} = \widetilde F^{(k)}(\lambda_j, 0)$, $F_1^{(k)} = \widetilde F_t^{(k)}(\lambda_j, 0)$. Напомним, что согласно следствию из леммы 1.1 значения $\widetilde F^{(k)}(\lambda_j, 0)$, $\widetilde F_t^{(k)}(\lambda_j, 0)$, а значит, и $F_0^{(k)}$, $F_1^{(k)}$ не зависят от выбора λ_j. Вычисляемые по формулам (3.1), (3.2) функции α_1, α_2, соответствующие $q^{(kj)}(z)$, обозначим через $\alpha_1^{(kj)}(z)$, $\alpha_2^{(kj)}(z)$, а решения задач (1.10), (1.11) при $q = q^{(kj)}$, $f = f^{(k)}$ — через $v^{(kj)}(z, t)$. Согласно лемме 1.1 функции $v^{(kj)}(z, t)$ дважды непрерывно дифференцируемы в области $D(T)$ и удовлетворяют оценке

$$\|v^{(kj)}\|_{\mathbf{C}^2(D(T))} \le M_1, \quad k, j = 1, 2, \tag{3.16}$$

с некоторой постоянной M_1, зависящей только от T, λ_1, λ_2, a_0, f_0, c_{00}. Так как функции $\widehat F^{(k)}(t)$ являются следами при $z = 0$ функций $w^{(k)}(z, t) = v_{tt}^{(k1)}(z, t) - v_{tt}^{(k2)}(z, t)$, $k = 1, 2$, для каждой из которых справедлива оценка (2.10), то для $\widehat F^{(k)}(t)$ имеет место неравенство

$$\|\widehat F^{(k)}(t)\|_{\mathbf{C}^3[0,T]} \le M_2, \quad k = 1, 2, \tag{3.17}$$

в котором постоянная M_2 зависит от тех же самых параметров, что и M_1. Заметим еще, что числа $F_0^{(k)}$, $F_1^{(k)}$ по аналогичным причинам должны быть ограничены постоянной M_1:

$$\left|F_0^{(k)}\right| \le M_1, \ \left|F_1^{(k)}\right| \le M_1, \quad k = 1, 2. \tag{3.18}$$

Обозначим $\tilde{c}(z) = \hat{c}^{(1)}(z) - \hat{c}^{(2)}(z)$, $\tilde{h}(z) = h^{(1)}(z) - h^{(2)}(z)$, $\tilde{q}_0(z) = q_0^{(1)}(z) - q_0^{(2)}(z)$, $\tilde{a} = a^{(1)} - a^{(2)}$, $\widetilde{H} = H^{(1)} - H^{(2)}$, $\widetilde{F}_0 = F_0^{(1)} - F_0^{(2)}$, $\widetilde{F}_1 = F_1^{(1)} - F_1^{(2)}$, $\tilde{v}^{(j)}(z,t) = \tilde{v}^{(1j)}(z,t) - \tilde{v}^{(2j)}(z,t)$, $\tilde{\alpha}_k^{(j)}(z) = \alpha_k^{(1j)}(z,t) - \alpha_k^{(2j)}(z)$, $k, j = 1, 2$. Выпишем для вновь введенных функций соответствующие им интегральные соотношения. Из равенств (3.1), (3.2) следует, что

$$\tilde{\alpha}_1^{(j)}(z) = \widetilde{F}_1 - \frac{\tilde{a}}{4}\int\limits_0^z q^{(1j)}(\zeta)\,d\zeta - \frac{a_2}{4}\int\limits_0^z \bigl[\tilde{q}_0 - \lambda_j^2(\hat{c}_1 + \hat{c}_2)\tilde{c}\bigr](\zeta)\,d\zeta, \quad j = 1, 2, \tag{3.19}$$

$$\begin{aligned}\tilde{\alpha}_2^{(j)}(z) &= \widetilde{F}_{tt}(\lambda_1, 0) - \widetilde{F}_{tt}(\lambda_2, 0) + \frac{1}{2}\int\limits_0^z \bigl[\tilde{q}_0 - \lambda_j^2(\hat{c}_1 + \hat{c}_2)\tilde{c}\bigr](\zeta)\alpha_1^{(1j)}(\zeta)\,d\zeta \\ &+ \frac{1}{2}\int\limits_0^z q^{(2j)}(\zeta)\tilde{\alpha}_1^{(j)}(\zeta)\,d\zeta - \frac{a}{8}\bigl(\tilde{q}_0(z) - \lambda_j^2(\hat{c}_1(z) + \hat{c}_2(z))\tilde{c}(z)\bigr), \quad j = 1, 2. \end{aligned} \tag{3.20}$$

Из соотношений (3.5)–(3.7) находим уравнения для функций $\tilde{v}^{(j)}(z,t)$ и их производных по переменной t в виде

$$\begin{aligned}\tilde{v}^{(j)}(z,t) &= \widetilde{F}^{(1)}(\lambda_j, t-z) - \widetilde{F}^{(2)}(\lambda_j, t-z) \\ &+ \frac{1}{2}\int\limits_{D(z,t)} \bigl[\tilde{q}_0 - \lambda_j^2(\hat{c}_1 + \hat{c}_2)\tilde{c}\bigr](\zeta)v^{(1j)}(\zeta,\tau)\,d\zeta d\tau \\ &+ \frac{1}{2}\int\limits_{D(z,t)} q^{(2j)}(\zeta)\tilde{v}^{(j)}(\zeta,\tau)\,d\zeta d\tau, \quad j = 1, 2, \end{aligned} \tag{3.21}$$

$$\begin{aligned}\tilde{v}_t^{(j)}(z,t) &= \widetilde{F}_t(\lambda_1, t-z) - \widetilde{F}_t(\lambda_2, t-z) + \tilde{\alpha}_1^{(j)}\left(\frac{t+z}{2}\right) - \tilde{\alpha}_1^{(j)}\left(\frac{t-z}{2}\right) \\ &+ \frac{1}{2}\int\limits_{D(z,t)} \bigl[\tilde{q}_0 - \lambda_j^2(\hat{c}_1 + \hat{c}_2)\tilde{c}\bigr](\zeta)v_\tau^{(1j)}(\lambda,\zeta,\tau)\,d\zeta d\tau \\ &+ \frac{1}{2}\int\limits_{D(z,t)} q^{(2j)}(\zeta)\tilde{v}_\tau^{(j)}(\zeta,\tau)\,d\zeta d\tau, \quad j = 1, 2, \end{aligned} \tag{3.22}$$

$$\begin{aligned}\tilde{v}_{tt}^{(j)}(z,t) &= \widetilde{F}_{tt}(\lambda_1, t-z) - \widetilde{F}_{tt}(\lambda_2, t-z) + \tilde{\alpha}_2^{(j)}\left(\frac{t+z}{2}\right) - \tilde{\alpha}_2^{(j)}\left(\frac{t-z}{2}\right) \\ &+ \frac{1}{2}\int\limits_{D(z,t)} \bigl[\tilde{q}_0 - \lambda_j^2(\hat{c}_1 + \hat{c}_2)\tilde{c}\bigr](\zeta)v_{\tau\tau}^{(1j)}(\lambda,\zeta,\tau)\,d\zeta d\tau \\ &+ \frac{1}{2}\int\limits_{D(z,t)} q^{(2j)}(\zeta)\tilde{v}_{\tau\tau}^{(j)}(\zeta,\tau)\,d\zeta d\tau, \quad j = 1, 2. \end{aligned} \tag{3.23}$$

Для получения соотношения относительно функции $\tilde{q}_0(z)$ удобно обе части равенства (3.11) предварительно умножить на $\int_0^z q_1(\zeta)\,d\zeta$, записать полученное соотношение для двух рассматриваемых решений задачи и лишь потом взять их разность. Выполняя эту процедуру, находим, что для $z \in [z_0, T/2]$ имеет место равенство

$$
\begin{aligned}
\tilde{q}_0(z) = {} & \left[\int_0^z q_1^{(1)}(\zeta)\,d\zeta\right]^{-1} \\
& \times \Biggl\{-2\bigl(\tilde{c}(z)\hat{c}_1'(z) + \hat{c}_2(z)\tilde{c}'(z)\bigr) - q_0^{(2)}(z)\int_0^z \tilde{c}(\zeta)(\hat{c}^{(1)}(\zeta) + \hat{c}^{(2)}(\zeta))\,d\zeta \\
& - \tilde{c}(z)(\hat{c}^{(1)}(z) + \hat{c}^{(2)}(z))\int_0^z q_0^{(1)}(\zeta)\,d\zeta - q_1^{(2)}(z)\int_0^z \tilde{q}_0(\zeta)\,d\zeta \\
+ \bigl(\lambda_1^2 + \lambda_2^2\bigr) & \left[\tilde{c}(z)(\hat{c}^{(1)}(z) + \hat{c}^{(2)}(z))\int_0^z q_1^{(1)}(\zeta)\,d\zeta + q_1^{(2)}(z)\int_0^z \tilde{c}(\zeta)(\hat{c}^{(1)}(\zeta) + \hat{c}^{(2)}(\zeta))\,d\zeta\right] \\
& - \frac{\tilde{a}}{a^{(1)}a^{(2)}}\Biggl[4F_1^{(1)}q_1^{(1)}(z) + \frac{8}{(\lambda_1^2 - \lambda_2^2)}\Bigl(\bigl[\widehat{F}_{ttt}^{(1)}(t) + H^{(1)}\widehat{F}_{tt}^{(1)}(t)\bigr]_{t=2z} \\
& - \int_0^z \bigl[q^{(11)}(\zeta)v_{tt}^{(11)}(\zeta, 2z-\zeta) - q^{(12)}(\zeta)v_{tt}^{(12)}(\zeta, 2z-\zeta)\bigr]\,d\zeta\Bigr)\Biggr] \\
& + \frac{1}{a^{(2)}}\Biggl[4F_1^{(1)}\tilde{c}(z)(\hat{c}^{(1)}(z) + \hat{c}^{(2)}(z)) + 4\widetilde{F}_1 q_1^{(2)}(z) \\
+ \frac{8}{(\lambda_1^2 - \lambda_2^2)} & \Biggl(\bigl[\widehat{F}_{ttt}^{(1)}(t) - \widehat{F}_{ttt}^{(2)}(t) + H^{(1)}(\widehat{F}_{tt}^{(1)}(t) - \widehat{F}_{tt}^{(2)}(t)) + \widetilde{H}\widehat{F}_{tt}^{(2)}(t)\bigr]_{t=2z} \\
- \int_0^z & \bigl[\bigl(\tilde{q}_0(\zeta) - \lambda_1^2\tilde{c}(\zeta)(\hat{c}^{(1)}(\zeta) + \hat{c}^{(2)}(\zeta))\bigr)v_{tt}^{(11)}(\zeta, 2z-\zeta) + q^{(21)}(\zeta)\tilde{v}_{tt}^{(1)}(\zeta, 2z-\zeta) \\
- \bigl(\tilde{q}_0(\zeta) & - \lambda_2^2\tilde{c}(\zeta)(\hat{c}^{(1)}(\zeta) + \hat{c}^{(2)}(\zeta))\bigr)v_{tt}^{(12)}(\zeta, 2z-\zeta) - q^{(22)}(\zeta)\tilde{v}_{tt}^{(2)}(\zeta, 2z-\zeta)\Biggr)\,d\zeta\Biggr]\Biggr\}.
\end{aligned}
\tag{3.24}
$$

Заметим, что в этом равенстве

$$
\widetilde{H} = \frac{\tilde{c}(0)(c^{(2)})'(0) - \tilde{c}'(0)c^{(2)}(0)}{2c^{(1)}(0)c^{(2)}(0)}. \tag{3.25}
$$

Используя равенства (3.13), (3.14), находим, что

$$
\begin{aligned}
\tilde{c}'(z) = \tilde{c}'(z_0) + \frac{1}{4}\int_{z_0}^z & \Biggl\{\tilde{c}'(\zeta)\frac{[(\hat{c}^{(1)})'(\zeta) + (\hat{c}^{(2)})'(\zeta)]}{\hat{c}^{(1)}(\zeta)} - \tilde{c}(\zeta)\frac{[(\hat{c}^{(2)})'(\zeta)]^2}{\hat{c}^{(1)}(\zeta)\hat{c}^{(2)}(\zeta)} \\
& - 2\tilde{q}_0(\zeta)\hat{c}^{(1)}(\zeta) - 2q_0^{(2)}(\zeta)\tilde{c}(\zeta)\Biggr\}\,d\zeta, \quad z_0 \le z \le T/2,
\end{aligned}
\tag{3.26}
$$

$$\tilde{c}(z)=\tilde{c}(z_0)+\int\limits_{z_0}^{z}\tilde{c}'(\zeta)\,d\zeta,\quad z_0\le z\le T/2. \tag{3.27}$$

Оценим входящие в эту систему соотношений функции через величину ε, определенную формулой (1.20). С этой целью разобьем область $D(T)$ на конечное число областей $D_k(T)$, $k=0,1,2,\dots,n$, определив их следующим образом. Пусть $\eta_{-1}=0$, $\eta_0=z_0$, $\eta_k=\eta_0+k\delta$, где $\delta=(T/2-z_0)/n$, а n — некоторое целое достаточно большое число, которое будет выбрано позже. Пусть, далее,

$$D_k(T)=\{(z,t)\in D(T)\mid 2\eta_{k-1}\le t+z\le 2\eta_k\},\quad k=0,1,2,\dots,n.$$

Очевидно, что для постоянных $\tilde{a}$, $\widetilde{H}$ справедливы оценки

$$|\tilde{a}|\le\varepsilon,\quad |\widetilde{H}|\le K\varepsilon \tag{3.28}$$

с некоторой постоянной K, зависящей только от c_0, c_{00}.

Определим для $\eta\in[0,T/2]$ функцию $\varphi(\eta)$ равенством

$$\varphi(\eta)=\max\Bigl(\max_{j=1,2}\Bigl(\max_{z+t=2\eta}\bigl(|\tilde{v}^{(j)}(z,t)|,\bigl|\tilde{v}_t^{(j)}(z,t)\bigr|,\bigl|\tilde{v}_{tt}^{(j)}(z,t)\bigr|\bigr),$$
$$|\tilde{\alpha}^{(j)}(\eta)|\Bigr),|\tilde{q}_0(\eta)|,|\tilde{c}'(\eta)|,|\tilde{c}(\eta)|\Bigr).$$

Для оценки значений этой функции на отрезке $[0,T/2]$ используем метод математической индукции. Покажем вначале, что имеет место оценка

$$\max_{\eta\in[0,\eta_0]}\varphi(\eta)\le C_0\varepsilon, \tag{3.29}$$

в которой постоянная C_0 зависит только от z_0, λ_1, λ_2, a_0, f_0, c_0, c_{00}. В самом деле, из соотношений (3.19), (3.20), рассматриваемых для $z\in[0,2z_0]$, и неравенств (3.28) для $\tilde{a}$ следует оценка вида

$$\max_{j=1,2}|\tilde{\alpha}^{(j)}(\eta)|\le C_0\varepsilon,\quad \eta\in[0,\eta_0], \tag{3.30}$$

которая полностью согласуется с искомой оценкой. Кроме того, так как для $z\in[0,z_0]$ функция $\tilde{c}(z)$ задана, то система равенств (3.21)–(3.23) определяет в каждой подобласти $D_0(\eta)=\{(z,t)\in D_0(T)\mid 0\le t+z\le 2\eta\}$ для каждой из функций $\tilde{v}^{(j)}(z,t)$, $\tilde{v}_t^{(j)}(z,t)$, $\tilde{v}_{tt}^{(j)}(z,t)$ линейные интегральные уравнения типа Вольтерра по переменной t. Поэтому для их решений имеет место оценка

$$\max_{j=1,2}\Bigl(\max_{z+t=2\eta}\bigl(|\tilde{v}^{(j)}(z,t)|,\bigl|\tilde{v}_t^{(j)}(z,t)\bigr|,\bigl|\tilde{v}_{tt}^{(j)}(z,t)\bigr|\bigr)\Bigr)\le C_0\varepsilon,\quad \eta\in[0,\eta_0], \tag{3.31}$$

вполне идентичная искомой. Наконец, так как функция $\tilde{q}_0(z)$ выражается через вторую и первую производные функции $\tilde{c}(z)$, то она оценивается на отрезке $[0,z_0]$ через $\mathbf{C}^2[0,z_0]$-норму функции $\tilde{c}(z)$, которая, в свою очередь, входит как слагаемое в определение ε. Последнее обстоятельство приводит к оценке (3.29).

Предположим теперь, что для $\eta\in[0,\eta_k]$, $k<n$, имеет место аналогичная оценка

$$\max_{\eta\in[0,\eta_k]}\varphi(\eta)\le C_k\varepsilon \tag{3.32}$$

с некоторой постоянной C_k, зависящей только от T, z_0, λ_1, λ_2, a_0, f_0, c_0, c_{00}. Покажем, что тогда эта оценка справедлива и для более широкого отрезка $[0,\eta_{k+1}]$, если выбрать число n достаточно большим, а значит, δ — достаточно малым. Убедимся для этого вначале, что верна оценка

$$\varphi(\eta) \le C_k'\varepsilon + C'\delta \max_{\eta_k \le \eta \le \eta_{k+1}} \varphi(\eta), \quad \eta \in [\eta_k, \eta_{k+1}], \tag{3.33}$$

в которой постоянные C_k', C' зависят от T, z_0, λ_1, λ_2, a_0, f_0, c_0, c_{00}. Чтобы не усложнять доказательство этого факта достаточно простыми, но громоздкими выкладками, опишем словами основную идею процедуры оценок. При оценке интегралов по области $D(z,t)$, входящих в формулы (3.21)–(3.23) для $(z,t) \in D_{k+1}(T)$, разобьем каждый из них на два: один по пересечению области $D(z,t)$ с областью $D(2\eta_k) = \{(z,t) \in D(T) \mid z + t \le 2\eta_k\}$, а второй — по оставшейся части. Для оценки функций, входящих в первый интеграл, воспользуемся индукционным предположением (3.33), при оценке второго — тем, что мера области интегрирования не превосходит числа $2\delta\eta_{k+1}$, которое, в свою очередь, не больше, чем δT. Аналогично поступим с интегралами по отрезку $[0,z]$, входящими в формулы (3.19), (3.20), (3.26), (3.27). Отрезок $[0,z]$ разобьем на два: $[0,\eta_k]$ и $[\eta_k, z]$. Для оценки интегралов по отрезку $[0,\eta_k]$ воспользуемся опять индукционным предположением (3.33), а для оценки интеграла по отрезку $[\eta_k, z]$ — тем, что его длина не превосходит δ. Тогда для всех функций, кроме $\tilde q_0(z)$, получим оценки вида (3.33), в частности,

$$\begin{gathered}
\max_{j=1,2} \max_{z \in [\eta_k, \eta_{k+1}]} |\tilde\alpha^{(j)}(z)| \le C_k'\varepsilon + C'\delta \max_{\eta_k \le \eta \le \eta_{k+1}} \varphi(\eta), \\
\max_{j=1,2} \max_{(z,t) \in D_{k+1}(T)} \bigl|\tilde v_{tt}^{(j)}(z,t)\bigr| \le C_k'\varepsilon + C'\delta \max_{\eta_k \le \eta \le \eta_{k+1}} \varphi(\eta), \\
\max\bigl(\max_{z \in [\eta_k, \eta_{k+1}]} |\tilde c(z)|, \max_{z \in [\eta_k, \eta_{k+1}]} |\tilde c'(z)|\bigr) \le C_k'\varepsilon + C'\delta \max_{\eta_k \le \eta \le \eta_{k+1}} \varphi(\eta).
\end{gathered} \tag{3.34}$$

Несколько по-другому надо поступить при выполнении оценок, связанных с уравнением (3.24). Для интегралов по отрезку $[0,z]$, содержащих функции $\tilde q_0(\zeta)$, $\tilde c(\zeta)$, воспользуемся уже описанной выше техникой оценок, а при оценке интегралов, содержащих функции $\tilde v_{tt}^{(j)}(\zeta, 2z-\zeta)$, — установленным для них неравенством (3.34). Тем же неравенством воспользуемся при оценке внеинтегральных членов, содержащих функцию $\tilde c(z)$. Кроме того, используем неравенство вида (3.12) для оценки интеграла от функции $q_1^{(1)}(\zeta)$, неравенство (3.16) для оценки выражений, содержащих $v_{tt}^{(kj)}$, неравенство (3.17) для оценки вторых и третьих производных функций $\widehat F^{(k)}(t)$ в том случае, когда они входят в виде сомножителей с числами $\tilde a$ или $\widetilde H$, неравенство (3.18) для оценки $F_1^{(1)}$, а также неравенство (3.28) для оценки величин $\tilde a$ и $\widetilde H$. В результате выполнения этой процедуры получим оценку для функции $\tilde q_0(z)$ в виде

$$\max_{z \in [\eta_k, \eta_{k+1}]} |\tilde q_0(z)| \le C_k'\varepsilon + C'\delta \max_{\eta_k \le \eta \le \eta_{k+1}} \varphi(\eta). \tag{3.35}$$

Объединение полученных оценок приводит к неравенству (3.33). Заметим, что постоянная C' в этом неравенстве не зависит от k. Выбирая целое число n так, чтобы выполнялось условие $C'\delta < 1$, из неравенства (3.33) выводим, что

$$\max_{\eta_k \le \eta \le \eta_{k+1}} \varphi(\eta) \le C_k'(1 - C'\delta)^{-1}\varepsilon. \tag{3.36}$$

Поэтому

$$\max_{0 \le \eta \le \eta_{k+1}} \varphi(\eta) \le C_{k+1}\varepsilon, \quad C_{k+1} = C_k'(1 - C'\delta)^{-1}. \tag{3.37}$$

Таким образом, метод индукции оправдан, и равномерная оценка $\varphi(\eta) \le C\varepsilon$ имеет место на всем отрезке $[0, T/2]$ с некоторой постоянной C, зависящей от указанных в теореме 1.2 параметров. Эта оценка приводит, в частности, к неравенству для функций $\tilde q_0(z)$, $\tilde c(z)$ вида

$$\max(|\tilde q_0(z)|, |\tilde c(z)|, |\tilde c'(z)|) \le C\varepsilon, \quad 0 \le z \le T/2,$$

из которого следует, что

$$\|\tilde c\|_{\mathbf{C}^2[0,T/2]} \le C\varepsilon \tag{3.38}$$

с некоторой новой постоянной C.

Для завершения доказательства заметим, что для функций $\tilde h(z) = h^{(1)}(z) - h^{(2)}(z)$, $\tilde f(t) = \hat f^{(1)}(t) - \hat f^{(2)}(t)$ имеют место соотношения

$$\tilde h(z) = \int\limits_0^z \tilde c(\zeta)\, d\zeta,$$

$$\begin{aligned}\tilde f(t) = (\tilde v_z + H^{(1)}\tilde v + \widetilde H v^{(2)})_{z=0} = \widetilde F_t^{(2)}(\lambda_1, t) - \widetilde F_t^{(1)}(\lambda_1, t) \\ + \int\limits_0^{t/2} \big[\big(\tilde q_0(\zeta) - \lambda_1^2 \tilde c(\zeta)(\hat c^{(1)}(\zeta) + \hat c^{(2)}(\zeta))\big) v^{(11)}(\lambda_1, \zeta, t-\zeta) \\ + q^{(21)}(\zeta)\tilde v^{(1)}(\zeta, t-\zeta)\big]\, d\zeta + H^{(1)}\tilde v^{(1)}(0,t) + \widetilde H v^{(21)}(0,t).\end{aligned}$$

С учетом ранее полученных оценок отсюда выводятся неравенства

$$\|\tilde h\|_{\mathbf{C}^3[0,T/2]} \le C\varepsilon, \quad \|\tilde f\|_{\mathbf{C}^1[0,T]} \le C\varepsilon \tag{3.39}$$

с постоянной C, зависящей от T, z_0, λ_1, λ_2, a_0, f_0, c_0, c_{00}.

Совокупность неравенств (3.28), (3.38), (3.39) приводит к итоговой оценке (1.19).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Благовещенский А. С.* Одномерная обратная краевая задача для гиперболического уравнения второго порядка // Математические вопросы теории распространения волн. Л.: Изд-во ЛОМИ, 1969. Т. 2. С. 85–90.
2. *Романов В. Г.* Обратные задачи математической физики. М.: Наука, 1984.
3. *Романов В. Г.* Вопросы корректности задачи определения скорости звука // Сиб. мат. журн. 1989. Т. 30, № 4. С. 125–134.
4. *Романов В. Г.* Оценка устойчивости в обратной задаче определения скорости звука // Сиб. мат. журн. 1999. Т. 40, № 6. С. 1323–1338.
5. *Белишев М. И., Благовещенский А. С.* Динамические обратные задачи теории волн. СПб.: Изд-во Санкт-Петербургского ун-та, 1999.
6. *Романов В. Г.* Устойчивость в обратных задачах. М.: Научный мир, 2005.
7. *Гервер М. Л.* Обратная задача для одномерного волнового уравнения с неизвестным источником колебаний. М.: Наука, 1974.

Статья поступила 8 февраля 2007 г.

Романов Владимир Гаврилович
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090
romanov@math.nsc.ru