Сибирский математический журнал
Июль—август, 2007. Том 48, № 4

УДК 517.51

О СЛЕДАХ ФУНКЦИЙ, ПРИНАДЛЕЖАЩИХ ОБОБЩЕННЫМ КЛАССАМ СОБОЛЕВСКОГО ТИПА

А. С. Романов

Аннотация: Для функциональных классов соболевского типа, определенных на метрическом пространстве с борелевской мерой, рассматривается вопрос о компактности вложения пространства следов в лебеговские классы на множествах меньшей «размерности». Как следствие, получаются условия компактности вложения следов для классических соболевских пространств W_p^1, определенных в «нулевых» пиках с гёльдеровой особенностью в вершине.

Ключевые слова: пространства Соболева, теоремы вложения, следы.

Точку пространства $\mathbb{R}^n$ будем обозначать через (x, y), где $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}^{n-1}$. Символом $B(a, \rho)$ обозначим n-мерный евклидов шар с центром в точке a радиуса ρ.

Для $1 \leq \lambda < \infty$ пик $G_\lambda \subset \mathbb{R}^n$ определим условием

$$G_\lambda = \{(x, y) \in \mathbb{R}^n \mid 0 < x < 1,\ 0 < y_k < x^\lambda,\ k = 1, \dots, n-1\}.$$

Обозначим через m_n сужение n-мерной меры Лебега на пик G_λ, через σ — сужение $(n-1)$-мерной меры Хаусдорфа на ∂G_λ и положим $\Lambda = 1 + (n-1)\lambda$. Поскольку для шаров с центром в вершине пика выполняется оценка $m_n(B(0, \rho)) \sim C\rho^\Lambda$, в различных оценках показатель Λ часто играет роль «размерности» пика G_λ.

В работе [1] показано, что оператор следа

$$\mathrm{Tr} : W_p^1(G_\lambda) \to L_q(\partial G_\lambda, \sigma)$$

будет компактным при

1) $1 \leq q < p\frac{\Lambda-\lambda}{\Lambda-p}$, когда $\lambda < p < \Lambda$;

2) $1 \leq q < \infty$, когда $p \geq \Lambda$.

Доказательство данного утверждения в работе [1] основано на совпадении (при достаточно больших значениях показателя суммируемости p) классических пространств Соболева $W_p^1(G_\lambda)$ и функциональных классов Соболева — Хайлаша $HW_p^1(G_\lambda, |*|, m_n)$, определяемых по евклидовой метрике $|*|$ и мере Лебега. Предельное значение показателей суммируемости q, при которых оператор следа

$$\mathrm{Tr} : HW_p^1(G_\lambda, |*|, dx) \to L_q(\partial G_\lambda, \sigma)$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 05–01–00482–а), программы «Ведущие научные школы» (код проекта НШ–8526.2006.1) и Междисциплинарного интеграционного проекта СО РАН 2006.

будет компактным, однозначно определяется соотношением показателей «регулярности» мер m_n и σ относительно евклидовой метрики $|*|$. Получить полное описание пространства следов в рамках шкалы пространств Соболева — Хайлаша не удается, однако, используя уже имеющиеся теоремы вложения для пространств Соболева — Хайлаша, можно получить ответ на интересующий нас вопрос о компактности оператора следа, не находя явного описания пространства следов на границе пика.

К сожалению, метод работы [1] применим лишь при показателях суммируемости $p > \Lambda/n$, поскольку в существенной мере опирается на ограниченность специальным способом сконструированного оператора продолжения

$$\mathrm{Ext} : W_p^1(G_\lambda) \to W_q^1(G_1).$$

При $p \le \Lambda/n$ показать совпадение классических пространств Соболева и пространств Соболева — Хайлаша в «нулевом» пике G_λ не удается, однако удается доказать (достаточное для наших целей) вложение

$$I : W_p^1(G_\lambda) \to HW_r^1(G_\lambda, d_\lambda, \mu),$$

где d_λ — гёльдерова метрика, а μ — специальным образом подобранная весовая мера в G_λ.

Теоремы вложения для пространств Соболева — Хайлаша имеют весьма универсальный вид, поскольку основные характеристики вложения однозначно определяются показателем «регулярности» меры относительно соответствующей метрики. Традиционно отвечающий за порядок гладкости функций верхний показатель, равный 1, для пространств Соболева — Хайлаша HW_p^1 всего лишь означает, что в определении класса функций используется липшицева оценка относительно соответствующей метрики. Поэтому возникающие в различных ситуациях гёльдеровы классы функций часто можно воспринимать как пространства Соболева — Хайлаша с «единичной гладкостью» относительно новой гёльдеровой метрики, а для получения соответствующих теорем вложения оказывается достаточно простого пересчета показателя «регулярности» меры относительно новой метрики.

§ 1. О пространствах Соболева — Хайлаша

Определение пространств Соболева — Хайлаша [2] основано на выполнении глобальной оценки липшицевого типа для приращения функции.

Рассмотрим метрическое пространство (X, d) с конечным диаметром и конечную регулярную борелевскую меру μ с носителем в множестве X. Для произвольной μ-измеримой функции $u : X \to \overline{\mathbb{R}}$ функцию $g : X \to [0, \infty)$ будем называть *допустимой*, если существует такое множество $E \subset X$, что $\mu(E) = 0$ и неравенство $|u(x) - u(y)| \le d(x, y)(g(x) + g(y))$ выполняется для всех точек $x, y \in X \setminus E$.

Множество всех допустимых функций для функции u обозначим через $D(u)$ и при $p \ge 1$ положим $D_p(u) = D(u) \cap L_p(X, \mu)$.

Функциональные классы $HL_p^1(X, d, \mu)$ и $HW_p^1(X, d, \mu)$ определяются условиями

$$HL_p^1(X, d, \mu) = \{u : X \to \overline{\mathbb{R}} \mid D_p(u) \ne \varnothing\},$$

$$HW_p^1(X, d, \mu) = \big\{u \in L_p(X, \mu) \mid u \in HL_p^1(X, d, \mu)\big\},$$

а полунорма в пространстве $HL^1_p(X,d,\mu)$ и норма в пространстве $HW^1_p(X,d,\mu)$ определяются равенствами

$$\|u \mid HL^1_p\| = \inf_{g\in D_p(u)} \|g \mid L_p\|, \quad \|u \mid HW^1_p\| = \|u \mid L_p\| + \|u \mid HL^1_p\|$$

соответственно.

Для введенных функциональных пространств выполняются аналоги многих классических результатов, известных в евклидовом случае для стандартных пространств Соболева $W^1_p(\mathbb{R}^n)$. Для нас в первую очередь будут представлять интерес аналоги классических теорем вложения.

Мера μ называется *s-регулярной*, если для всякого шара выполняется оценка $\mu(B(x,\rho)) \geq C\rho^s$, при этом показатель s во многих случаях играет роль «размерности» метрического пространства (X,d). Следующая теорема вложения получена в работе [2].

Предложение 1.1. *Пусть $1 < p < \infty$, мера μ является s-регулярной. Тогда пространство Соболева — Хайлаша $HW^1_p(X,d,\mu)$ непрерывно вложено в пространство $L_q(X,\mu)$, где*

1) $1 \leq q \leq \frac{ps}{s-p}$ при $p < s$;

2) $1 \leq q < \infty$ при $p = s$;

3) $1 \leq q \leq \infty$ при $p > s$.

Всюду далее мы будем предполагать, что мера μ удовлетворяет «условию удвоения»:

$$\mu(B(x,2\rho)) \leq C_d\mu(B(x,\rho))$$

при всех $x \in X$ и $\rho > 0$.

Отметим, что всякая мера, удовлетворяющая условию удвоения, является s-регулярной с показателем $s = \log_2 C_d$. Далее будем предполагать, что $s > 1$.

Для среднего значения функции u на множестве Ω будем использовать обозначение

$$u_\Omega = \fint_\Omega u\,d\mu = \frac{1}{\mu(\Omega)}\int_\Omega u\,d\mu.$$

Согласно работе [3] для всех точек Лебега локально суммируемой функции u выполняется неравенство

$$|u(x) - u(y)| \leq C(d(x,y))^\gamma \big(u^\#_\gamma(x) + u^\#_\gamma(y)\big), \tag{1}$$

где $0 < \gamma \leq 1$ и $u^\#_\gamma$ — уточненная максимальная функция порядка γ, однозначно определенная во всех точках множества X равенством

$$u^\#_\gamma(x) = \sup_{\rho>0} \rho^{-\gamma} \fint_{B(x,\rho)} |u - u_{B(x,\rho)}|\,d\mu.$$

Следующие описания пространств Соболева — Хайлаша получены в [3].

Предложение 1.2. *При $1 < p \leq \infty$ для функции $u \in L_p(X,\mu)$ следующие условия эквивалентны:*

1) $u \in HW^1_p(X,d,\mu)$;

2) $u^\#_1 \in L_p(X,\mu)$;

3) *существует такая функция $h \in L_p(X,\mu)$, что неравенство Пуанкаре*

$$\fint_{B(x,\rho)} |u - u_{B(x,\rho)}|\,d\mu \leq r \fint_{B(x,\rho)} h\,d\mu$$

выполняется для произвольных $x \in X$ и $\rho > 0$.

Обозначим через h_0 функцию, удовлетворяющую неравенству Пуанкаре и имеющую наименьшую L_p-норму, тогда

$$\|h_0 \mid L_p(X,\mu)\| \sim \left\|u_1^{\#} \mid L_p(X,\mu)\right\| \sim \left\|u \mid HL_p^1(X,d,\mu)\right\|.$$

Выполнение для функций пространства $HW_p^1(X,d,\mu)$ неравенства Пуанкаре и результат предложения 1.1 позволяют переформулировать в удобной для нас форме теоремы 8.1 и 8.3 из работы [4].

Предложение 1.3. *При $1 < p < \infty$ произвольная последовательность функций, ограниченная в норме $HW_p^1(X,d,\mu)$, содержит подпоследовательность, сходящуюся в $L_q(X,\mu)$ к некоторой функции $u \in L_q(X,\mu)$, где*

1) $1 \le q < \frac{ps}{s-p}$ *при $p < s$;*

2) $1 \le q < \infty$ *при $p \ge s$.*

Далее нам потребуется несложное, но важное для последующих доказательств уточнение этого результата: предельная функция u принадлежит пространству $HW_p^1(X,d,\mu)$.

Лемма 1.4. *При $1 < p < \infty$ произвольная последовательность функций, ограниченная в норме $HW_p^1(X,d,\mu)$, содержит подпоследовательность, сходящуюся в $L_q(X,\mu)$ к некоторой функции $u \in HW_p^1(X,d,\mu)$, где*

1) $1 \le q < \frac{ps}{s-p}$ *при $p < s$;*

2) $1 \le q < \infty$ *при $p \ge s$.*

Доказательство. Существование подпоследовательности, сходящейся в соответствующем пространстве $L_q(X,\mu)$, непосредственно следует из предложения 1.3.

В силу предложения 1.2 и слабой компактности ограниченных множеств в пространствах L_p при $1 < p < \infty$ можно выделить последовательность $\{u_n\}$, сходящуюся в $L_1(X,\mu)$ к некоторой функции $u \in L_1(X,\mu)$, и последовательность $\{h_n\}$, слабо сходящуюся в $L_p(X,\mu)$ к некоторой функции $h \in L_p(X,\mu)$, такие, что каждая пара (u_n, h_n) удовлетворяет неравенству Пуанкаре

$$\fint_{B(x,\rho)} |u_n - u_{n,B(x,r)}|\,d\mu \le \rho \fint_{B(x,\rho)} h_n\,d\mu \tag{2}$$

при всех $x \in X$ и $\rho > 0$.

Фиксируем произвольный шар $B = B(x,\rho)$, тогда при $n \to \infty$

$$\left|\int_B |u_n - u_{n,B}|\,d\mu - \int_B |u - u_B|\,d\mu\right| \le \int_B |u_n - u|\,d\mu + \int_B |u_{n,B} - u_B|\,d\mu \to 0,$$

а в силу слабой сходимости

$$\int_B h_n\,d\mu \to \int_B h\,d\mu.$$

Переходя к пределу в неравенстве (2), получаем, что пара (u,h) удовлетворяет неравенству Пуанкаре

$$\fint_{B(x,\rho)} |u - u_{B(x,\rho)}|\,d\mu \le r \fint_{B(x,\rho)} h\,d\mu$$

и, следовательно, $u \in HW^1_p(X,d,\mu)$.

Фиксируем положительное значение γ, меньшее единицы, и рассмотрим на множестве X новую гёльдерову метрику d_γ, полагая

$$d_\gamma(x,y) = (d(x,y))^\gamma.$$

Следующее утверждение, полученное в работе [5], характеризует взаимосвязь пространств Соболева — Хайлаша, определяемых относительно различных метрик.

Предложение 1.5. *Пусть $1 < p < \infty$, $0 < \gamma \le 1$ и $(1-\gamma)p < s$. Тогда пространство $HL^1_p(X,d,\mu)$ непрерывно вложено в пространство $HL^1_r(X,d_\gamma,\mu)$, где $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} - \frac{1-\gamma}{s}$.*

Несложно получить аналогичные вложения и при $(1-\gamma)p \ge s$.

Лемма 1.6. *Пусть $1 < p < \infty$, $0 < \gamma \le 1$. Тогда пространство $HW^1_p(X,d,\mu)$ непрерывно вложено в пространство $HW^1_r(X,d_\gamma,\mu)$, где*

1) $1 \le r \le \frac{ps}{s-(1-\gamma)p}$ при $(1-\gamma)p < s$;

2) $1 \le r < \infty$ при $(1-\gamma)p = s$;

3) $1 \le r \le \infty$ при $(1-\gamma)p > s$.

Доказательство. 1. При $(1-\gamma)p < s$ результат является следствием предложений 1.1 и 1.5.

2. Пусть $(1-\gamma)p = s$. Поскольку диаметр множества X ограничен, а мера μ является конечной, то пространство $HW^1_p(X,d,\mu)$ непрерывно вложено в пространство $HW^1_{p^*}(X,d,\mu)$ при всех $p^* < p$. Поэтому п. 2 леммы является непосредственным следствием п. 1.

3. Пусть $(1-\gamma)p > s$. Учитывая предложение 1.1, предложение 1.2 и неравенство (1), достаточно показать, что $u^\#_\gamma \in L_\infty(X,\mu)$. Согласно предложению 1.2 для функции $u \in HW^1_p(X,d,\mu)$ выполняется неравенство Пуанкаре

$$\fint_{B(x,\rho)} |u - u_{B(x,\rho)}|\,d\mu \le \rho \fint_{B(x,\rho)} h\,d\mu.$$

Применяя неравенство Гёльдера и учитывая s-регулярность меры μ, получаем

$$\rho^{-\gamma} \fint_{B(x,\rho)} |u - u_{B(x,\rho)}|\,d\mu \le \rho^{1-\gamma} \fint_{B(x,\rho)} h\,d\mu \le \frac{\rho^{1-\gamma}}{(\mu(B(x,\rho)))^{1/p}} \|h \mid L_p(X,\mu)\|$$
$$\le \rho^{1-\gamma-s/p} \big\|u \mid HW^1_p(X,d,\mu)\big\| \le C_0 \big\|u \mid HW^1_p(X,d,\mu)\big\|.$$

Таким образом, $u^\#_\gamma \in L_\infty(X,\mu)$ и вложение в пространство $HW^1_\infty(X,d_\gamma,\mu)$ непрерывно.

Теперь нас будут интересовать условия компактности оператора вложения в пространства Соболева — Хайлаша, определяемые гёльдеровыми метриками. Для этих пространств согласно предложению 1.2 мы можем воспользоваться описанием через уточненные максимальные функции дробного порядка.

Нам понадобится оценка уточненной максимальной функции дробного порядка через уточненную максимальную функцию первого порядка и саму исходную функцию. Получать оценки непосредственно для уточненной максимальной функции не очень удобно, поскольку участвующая в их определении точная верхняя граница в различных точках может достигаться на шарах с несоизмеримыми радиусами. Поэтому получим вначале довольно грубую, но достаточную для нас оценку уточненной максимальной функции через сумму соответствующих интегралов по «двоичным» шарам.

Пусть $0 < \gamma < 1$, $(1-\gamma)p < s$ и $u \in HW_p^1(X, d, \mu)$. Из леммы 1.6 следует, что функция $u_\gamma^\#$ почти всюду конечна. Пусть $u_\gamma^\#(x) < \infty$ и число $0 < \rho < \operatorname{diam} X$ таково, что

$$u_\gamma^\#(x) \le 2\rho^{-\gamma} \fint_{B(x,\rho)} |u - u_{B(x,\rho)}| \, d\mu.$$

Пусть $R = 2^k$ и $\rho < R < 2\rho$. Учитывая условие удвоения для меры μ, получаем

$$\begin{aligned}
u_\gamma^\#(x) &\le 2\rho^{-\gamma} \fint_{B(x,\rho)} |(u - u_{B(x,R)}) + (u_{B(x,R)} - u_{B(x,\rho)})| \, d\mu \\
&\le 2\rho^{-\gamma} \fint_{B(x,\rho)} |u - u_{B(x,R)}| d\mu + 2\rho^{-\gamma} |u_{B(x,R)} - u_{B(x,\rho)}| \le 2\rho^{-\gamma} \fint_{B(x,\rho)} |u - u_{B(x,R)}| \, d\mu \\
&\quad + 2\rho^{-\gamma} \fint_{B(x,\rho)} |u - u_{B(x,R)}| \, d\mu = 4\rho^{-\gamma} \fint_{B(x,\rho)} |u - u_{B(x,R)}| \, d\mu \\
&\le CR^{-\gamma} \fint_{B(x,R)} |u - u_{B(x,R)}| \, d\mu.
\end{aligned}$$

Пусть $2^{N-1} < \operatorname{diam} X \le 2^N$. Фиксируем произвольное $0 < \tau < \operatorname{diam} X$, и пусть $2^{n_0 - 1} < \tau \le 2^{n_0}$. Тогда для почти всех $x \in X$

$$\begin{aligned}
u_\gamma^\#(x) &\le C \sum_{k=-\infty}^{N} 2^{-k\gamma} \fint_{B(x,2^k)} |u - u_{B(x,2^k)}| \, d\mu \\
&= C \sum_{k=-\infty}^{n_0} 2^{-k\gamma} \fint_{B(x,2^k)} |u - u_{B(x,2^k)}| \, d\mu \\
&\quad + C \sum_{k=n_0+1}^{N} 2^{-k\gamma} \fint_{B(x,2^k)} |u - u_{B(x,2^k)}| \, d\mu = C(S_1 + S_2).
\end{aligned}$$

Оценим каждую сумму по отдельности. Имеем

$$\begin{aligned}
S_1 &= \sum_{k=-\infty}^{n_0} 2^{-k\gamma} \fint_{B(x,2^k)} |u - u_{B(x,2^k)}| \, d\mu = \sum_{k=-\infty}^{n_0} 2^{k(1-\gamma)} 2^{-k} \fint_{B(x,2^k)} |u - u_{B(x,2^k)}| \, d\mu \\
&\le u_1^\#(x) \sum_{k=-\infty}^{n_0} 2^{k(1-\gamma)} \le C_1 \tau^{(1-\gamma)} u_1^\#(x).
\end{aligned}$$

При оценке второй суммы воспользуемся тем, что мера μ s-регулярна и мера всего множества X конечна:

$$S_2 = \sum_{k=n_0+1}^{N} \frac{2^{-k\gamma}}{\mu(B(x,2^k))} \int\limits_{B(x,2^k)} |u - u_{B(x,2^k)}|d\mu$$

$$\le C_2\|u \mid L_1(X,\mu)\| \sum_{k=n_0+1}^{N} 2^{-k(s+\gamma)} \le C_3\tau^{-(s+\gamma)}\|u \mid L_1(X,\mu)\|.$$

Таким образом, для почти всех $x \in X$ и произвольного $0 < \tau < \operatorname{diam} X$ выполняется оценка

$$u_\gamma^\#(x) \le C\big(\tau^{(1-\gamma)}u_1^\#(x) + \tau^{-(s+\gamma)}\|u \mid L_1(X,\mu)\|\big). \tag{3}$$

Неравенство (3) напоминает оценку промежуточной производной через старшую производную и саму функцию.

Теорема 1.7. *Пусть* $1 < p < \infty$, $0 < \gamma \le 1$. *Тогда оператор вложения*

$$I : HW_p^1(X,d,\mu) \to HW_r^1(X,d_\gamma,\mu)$$

будет компактным при

1) $1 \le r < \frac{ps}{s-(1-\gamma)p}$, *когда* $(1-\gamma)p < s$;

2) $1 \le r < \infty$, *когда* $(1-\gamma)p = s$;

3) $1 \le r \le \infty$, *когда* $(1-\gamma)p > s$.

Доказательство. 1. Пусть $(1-\gamma)p < s$ и $r_0 = \frac{ps}{s-(1-\gamma)p}$. Согласно лемме 1.4 из всякой ограниченной в норме $HW_p^1(X,d,\mu)$ последовательности функций мы можем выбрать подпоследовательность $\{u_n\}$, сходящуюся в $L_{r_0}(X,\mu)$ к некоторой функции $u \in HW_p^1(X,d,\mu)$. Положим $v_n = u - u_n$. Тогда подпоследовательность $\{v_n\}$ сходится в $L_{r_0}(X,\mu)$ к нулю, ограничена в $HW_p^1(X,d,\mu)$ и, следовательно, для уточненных максимальных функций первого порядка выполняется оценка $\|v_{n,1}^\# \mid L_p(X,\mu)\| \le C < \infty$. Из леммы 1.6 следует, что $v_n \in HW_{r_0}^1(X,d_\gamma,\mu)$ и соответствующая последовательность уточненных максимальных функций $\{v_{n,\gamma}^\#\}$ ограничена в пространстве $L_{r_0}(X,\mu)$.

Нам осталось показать, что последовательность $\{v_{n,\gamma}^\#\}$ сходится к нулю в $L_r(X,\mu)$ при всех $r < r_0$. Согласно лемме 8.2 из [4] для этого достаточно показать, что последовательность $\{v_{n,\gamma}^\#\}$ сходится к нулю по мере.

Фиксируем произвольное $\lambda > 0$ и воспользуемся неравенством (3) для функции v_n:

$$v_{n,\gamma}^\#(x) \le C\big(\tau^{(1-\gamma)}v_{n,1}^\#(x) + \tau^{-(s+\gamma)}\|v_n \mid L_1(X,\mu)\|\big). \tag{4}$$

Согласно неравенству Чебышева

$$M(n,\tau) = \mu\big(\{x \in X \mid C\tau^{(1-\gamma)}v_{n,1}^\#(x) > \lambda/2\}\big)$$

$$\le C_1\frac{\tau^{(1-\gamma)}}{\lambda}\|v_{n,1}^\# \mid L_p(X,\mu)\| \le C_2\frac{\tau^{(1-\gamma)}}{\lambda}.$$

Значит, для любого $\varepsilon > 0$ можно выбрать такое значение τ_ε, что $M(n,\tau_\varepsilon) < \varepsilon$ при всех $n \in \mathbb{N}$. Поскольку подпоследовательность $\{v_n\}$ сходится к нулю в $L_{r_0}(X,\mu)$, она сходится к нулю и в $L_1(X,\mu)$. Поэтому существует такой номер n_0, что $C\tau_\varepsilon^{-(s+\gamma)}\|v_n \mid L_1(X,\mu)\| \le \lambda/2$ при всех $n > n_0$.

Учитывая неравенство (4), при $n > n_0$ получаем

$$\mu\big(\{x \in X \mid v_{n,\gamma}^\#(x) > \lambda\}\big) \le M(n,\tau_\varepsilon) < \varepsilon.$$

Таким образом, последовательность $\{v_{n,\gamma}^{\#}\}$ сходится к нулю по мере, следовательно, она сходится к нулю в $L_r(X,\mu)$ при всех $r < r_0$, а последовательность $\{u_n\}$ сходится к функции u в $HW_r^1(X, d_\gamma, \mu)$ при всех $r < r_0$.

2. При $(1-\gamma)p = s$ результат вытекает из п. 1, конечности меры μ, непрерывности вложения пространства $HW_p^1(X,d,\mu)$ в пространство $HW_{p^*}^1(X,d,\mu)$ при всех $p^* < p$ и представления искомого вложения в виде композиции ограниченного и компактного операторов.

3. Пусть $(1-\gamma)p > s$. Выберем значение γ_1 так, чтобы выполнялись неравенства $\gamma < \gamma_1 < 1$ и $(1-\gamma_1)p < s$. Согласно п. 1 вложение пространства $HW_p^1(X,d,\mu)$ в пространство $HW_r^1(X, d_{\gamma_1}, \mu)$ будет компактным при $r < r_1 = \frac{ps}{s-(1-\gamma_1)p}$.

Показатель регулярности меры μ относительно новой метрики d_{γ_1} будет равен $s_1 = s/\gamma_1$. Полагая $\beta = \gamma/\gamma_1$ и учитывая неравенство $(1-\gamma)p > s$, получим

$$(1-\beta)r_1 = \frac{s}{\gamma_1}\frac{(\gamma_1-\gamma)p}{s-(1-\gamma_1)p} = \frac{s}{\gamma_1}\frac{(1-\gamma)p-(1-\gamma_1)p}{s-(1-\gamma_1)p} > \frac{s}{\gamma_1} = s_1.$$

Следовательно, существует такое $r_0 < r_1$, что $(1-\beta)r_0 > s_1$. В силу п. 1 теоремы $HW_p^1(X,d,\mu)$ компактно вложено в $HW_{r_0}^1(X, d_{\gamma_1}, \mu)$, а $HW_{r_0}^1(X, d_{\gamma_1}, \mu)$ согласно лемме 1.6 непрерывно вложено в $HW_\infty^1(X, d_\gamma, \mu)$. Таким образом, оператор вложения $I : HW_p^1(X,d,\mu) \to HW_\infty^1(X, d_\gamma, \mu)$ компактен.

Следствие 1.8. *Если $p > s$, то пространство $HW_p^1(X,d,\mu)$ компактно вложено в пространство $HW_\infty^1(X,d_\gamma,\mu)$ при всех $\gamma < 1 - s/p$.*

Этот результат непосредственно следует из п. 3 теоремы 1.7, поскольку неравенство $\gamma < 1 - s/p$ эквивалентно условию $(1-\gamma)p > s$.

Теорема 1.9. *Пусть $1 < p < \infty$. Тогда оператор вложения $I : HW_p^1(X,d,\mu) \to L_q(X,\mu)$ является компактным при*

1) $1 \le q < \frac{ps}{s-p}$, когда $p < s$;

2) $1 \le q < \infty$, когда $p = s$;

3) $1 \le q \le \infty$, когда $p > s$.

Этот результат получается из леммы 1.4 и следствия 1.8.

§ 2. О следах функций из пространств Соболева — Хайлаша на множествах меньшей размерности

Теперь получим теоремы вложения для следов функций из пространств Соболева — Хайлаша $HW_p^1(X,d,\mu)$ на множествах меньшей «размерности».

Пусть мера μ удовлетворяет условию удвоения и является s-регулярной, $s > 1$. Пусть подмножество $E \subset X$ и мера ν таковы, что для произвольного шара $B(x,\rho)$ с центром $x \in E$ верна оценка $C^{-1}\nu(B(x,\rho)) \le \rho^{-\alpha}\mu(B(x,\rho)) \le C\nu(B(x,\rho))$, где $0 < \alpha < s$ и $1 < C < \infty$. Тогда мера ν на множестве E удовлетворяет условию удвоения и в силу конечности диаметра множества X и конечности меры μ получаем, что $0 < \nu(E) < \infty$ и $\mu(E) = 0$. При этом функция $u \in HL_p^1(X,d,\mu)$, вообще говоря, определена μ-почти всюду. Поэтому нужно вначале определиться, что мы будем называть следом функции u на множестве E.

В работе [5] показано, что при $p > \alpha$ для произвольной функции $u \in HL_p^1(X,d,\mu)$ точками Лебега являются ν-почти все точки множества E и в них функция u может быть доопределена равенством

$$u(x) = \lim_{\rho\to 0} \frac{1}{\mu(B(x,\rho))} \int\limits_{B(x,\rho)} u\,d\mu.$$

Далее при $p > \alpha$ *следом функции* $u \in HL^1_p(X,d,\mu)$ *на множестве* E будем называть сужение на множество E функции

$$\tilde{u}(x) = \overline{\lim_{\rho\to 0}} \frac{1}{\mu(B(x,\rho))} \int\limits_{B(x,\rho)} u\,d\mu,$$

определенной во всех точках $x \in X$ и μ-почти всюду совпадающей с исходной функцией u.

Используя результаты § 1, мы можем довольно просто получить условия, при которых оператор следа будет ограниченным.

Лемма 2.1. *Пусть* $1 < p < \infty$, $0 < \alpha < \min\{s,p\}$ *и* $\max\{0, 1 - s/p\} < \gamma < 1 - \alpha/p$. *Тогда оператор следа*

$$\mathrm{Tr} : HL^1_p(X,d,\mu) \to HL^1_r(E,d_\gamma,\nu)$$

непрерывен при $1 \le r < \frac{p(s-\alpha)}{s-(1-\gamma)p}$.

Доказательство разобьем на два шага.

1. Для начала покажем, что оператор следа

$$\mathrm{Tr} : HL^1_p(X,d,\mu) \to HL^1_q(E,d_\gamma,\nu)$$

ограничен при всех $1 \le q < p$ и всех γ, удовлетворяющих условию леммы.

Поскольку для произвольной функции $u \in HL^1_p(X,d,\mu)$ точками Лебега являются ν-почти все точки множества E и в них выполняется неравенство (1), то нам достаточно показать, что $u^\#_\gamma \in L_q(E,\nu)$.

Пусть значение $\rho > 0$ таково, что

$$\lambda \le u^\#_\gamma(x) \le 2\rho^{-\gamma} \fint\limits_{B(x,\rho)} |u - u_{B(x,\rho)}|\,d\mu.$$

Применяя неравенство Пуанкаре и неравенство Гёльдера, получаем

$$\lambda^p \le C\Bigg(\rho^{1-\gamma} \fint\limits_{B(x,\rho)} h\,d\mu\Bigg)^p \le \frac{C_1\rho^{(1-\gamma)p}}{\mu(B(x,\rho))} \int\limits_{B(x,\rho)} h^p\,d\mu \le \frac{C_1\rho^\alpha}{\mu(B(x,\rho))} \int\limits_{B(x,\rho)} h^p\,d\mu. \tag{5}$$

Поскольку мера ν удовлетворяет условию удвоения, для нее выполняется лемма Витали о покрытиях [6], согласно которой можно выбрать такую систему непересекающихся шаров $B_k = B(x_k,\rho_k)$, что на каждом шаре будет выполняться неравенство (5) и

$$\nu\big(\{x \in E \mid u^\#_\gamma(x) \ge \lambda\}\big) \le C_2 \sum_k \nu(B_k) \le C_3 \sum_k \rho_k^{-\alpha}\mu(B_k).$$

Учитывая неравенство (5), имеем

$$\nu\big(\{x \in E \mid u^\#_\gamma(x) \ge \lambda\}\big) \le \frac{C_4}{\lambda^p} \sum_k \int\limits_{B_k} h^p d\mu \le \frac{C_4}{\lambda^p} \big\|u \mid HL^1_p(X,d,\mu)\big\|^p.$$

Согласно теореме 14.11 работы [4] из этой оценки следует, что $u_\gamma^\# \in L_q(E,\nu)$ при всех $1 \le q < p$ и

$$\big\|u_\gamma^\# \mid L_q(E,\nu)\big\| \le C(q,p)\big\|u \mid HL_p^1(X,d,\mu)\big\|.$$

2. Теперь покажем, как для показателя суммируемости r получить оценку, указанную в формулировке леммы.

Фиксируем произвольное γ, удовлетворяющее условию леммы, выберем γ_1 так, что $\gamma < \gamma_1 < 1-\alpha/p$, и положим $\beta = \gamma/\gamma_1$. Из доказательства первого шага следует, что оператор следа

$$\mathrm{Tr} : HL_p^1(X,d,\mu) \to HL_q^1(E,d_{\gamma_1},\nu)$$

ограничен при всех $1 \le q < p$. Показатель регулярности меры ν относительно метрики d_{γ_1} равен $s_1 = \frac{s-\alpha}{\gamma_1}$. Поскольку $(1-\beta)q < s_1$, то по предложению 1.5 оператор вложения $I : HL_q^1(E,d_{\gamma_1},\nu) \to HL_r^1(E,d_\gamma,\nu)$ ограничен при

$$r = \frac{qs_1}{s_1-(1-\beta)q} = \frac{q(s-\alpha)}{s-\alpha-(\gamma_1-\gamma)q} = \frac{q(s-\alpha)}{[s-(1-\gamma)q]+[(1-\gamma_1)q-\alpha]}.$$

Для завершения доказательства остается заметить, что $r \to r_0 = \frac{p(s-\alpha)}{s-(1-\gamma)p}$ при $q \to p$ и $\gamma_1 \to 1-\alpha/p$.

Нам понадобится аналогичный результат для пространств HW_p^1.

Лемма 2.2. *Пусть $1 < p < \infty$, $0 < \alpha < \min\{s,p\}$ и $\max\{0, 1-s/p\} < \gamma < 1-\alpha/p$. Тогда оператор следа*

$$\mathrm{Tr} : HW_p^1(X,d,\mu) \to HW_r^1(E,d_\gamma,\nu)$$

непрерывен при $1 \le r < \frac{p(s-\alpha)}{s-(1-\gamma)p}$.

Доказательство. Обозначим след функции $u \in HL_p^1(X,d,\mu)$ на множестве E через v, т. е. $v = \mathrm{Tr}\,u$. С учетом предложения 2.1 осталось лишь получить оценку для нормы функции v в пространстве $L_r(E,\nu)$.

Поскольку неравенство (1) выполняется во всех точках Лебега функции u, из леммы 1.6 и доказательства предложения 2.1 следует, что для ν-почти всех точек $y \in E$ и для μ-почти всех точек $x \in X$ выполняется неравенство

$$|u(x) - v(y)| \le (d(x,y))^\gamma (g_\gamma(x) + g_\gamma(y)), \tag{6}$$

где $g_\gamma(x) = Cu_\gamma^\#(x)$. При этом

$$\|g_\gamma \mid L_r(E,\nu)\| \le C_1\big\|u \mid HL_p^1(X,d,\mu)\big\|, \quad \|g_\gamma \mid L_1(X,\mu)\| \le C_2\big\|u \mid HL_p^1(X,d,\mu)\big\|.$$

Учитывая ограниченность диаметра множества X, конечность мер μ и ν, интегрируя по переменной x неравенство (6) по мере μ по всему множеству X и деля на $\mu(X)$, для ν-почти всех точек $y \in E$ получаем $|v(y)| \le C_3 g_\gamma(y) + C_4\big\|u \mid HW_p^1(X,d,\mu)\big\|$. Следовательно,

$$\bigg(\int\limits_E |v|^r\,d\nu\bigg)^{1/r} \le C\big\|u \mid HW_p^1(X,d,\mu)\big\|,$$

что и завершает доказательство леммы.

Теорема 2.3. *Пусть* $1 < p < \infty$, $0 < \alpha < \min\{s, p\}$ *и* $0 < \gamma < 1 - \alpha/p$. *Тогда оператор следа*

$$\mathrm{Tr} : HW_p^1(X, d, \mu) \to HW_r^1(E, d_\gamma, \nu)$$

будет компактным при

1) $1 \le r < \frac{p(s-\alpha)}{s-(1-\gamma)p}$, *когда* $(1-\gamma)p < s$;

2) $1 \le r < \infty$, *когда* $(1-\gamma)p = s$;

3) $1 \le r \le \infty$, *когда* $(1-\gamma)p > s$.

Доказательство. Оператор $\mathrm{Tr} : HW_p^1(X, d, \mu) \to HW_r^1(X, d_\gamma, \mu)$ представим в виде композиции непрерывного оператора следа и компактного оператора вложения. Выберем значение $\gamma_1 > \gamma$ так, чтобы выполнялось неравенство $\max\{0, 1 - s/p\} < \gamma_1 < 1 - \alpha/p$, и положим $\beta = \gamma/\gamma_1$. Согласно лемме 2.2 оператор следа $\mathrm{Tr}_1 : HW_p^1(X, d, \mu) \to HW_{r_1}^1(E, d_{\gamma_1}, \nu)$ будет непрерывным при всех $r_1 < R_1 = \frac{p(s-\alpha)}{s-(1-\gamma_1)p}$. Показатель регулярности меры ν относительно новой метрики d_{γ_1} будет равен $s_1 = \frac{s-\alpha}{\gamma_1}$.

По теореме 1.7 оператор вложения $I : HW_{r_1}^1(E, d_{\gamma_1}, \nu) \to HW_r^1(E, d_\gamma, \nu)$ будет компактным при всех

1) $1 \le r < \frac{r_1 s_1}{s_1-(1-\beta)r_1}$, когда $(1-\beta)r_1 < s_1$;

2) $1 \le r < \infty$, когда $(1-\beta)r_1 = s_1$;

3) $1 \le r \le \infty$, когда $(1-\beta)r_1 > s_1$.

Поскольку

$$(1-\beta)R_1 = \frac{(s-\alpha)(\gamma_1-\gamma)p}{\gamma_1(s-(1-\gamma_1)p)} = s_1\frac{(1-\gamma)p-(1-\gamma_1)p}{s-(1-\gamma_1)p},$$

разность $s_1 - (1-\beta)R_1$ имеет тот же знак, что и разность $s - (1-\gamma)p$.

Теперь результат теоремы является вполне очевидным следствием возможности выбора значения r_1 сколь угодно близким к R_1 и компактности соответствующего оператора вложения. При этом пересчет показателя суммируемости в п. 1 дает

$$r < \frac{R_1 s_1}{s_1-(1-\beta)R_1} = \frac{p(s-\alpha)}{s-(1-\gamma)p}.$$

Следствием теоремы 2.3 является следующее утверждение о компактности оператора следа в пространствах Лебега.

Теорема 2.4. *Пусть* $1 < p < \infty$ *и* $0 < \alpha < \min\{s, p\}$. *Тогда оператор следа*

$$\mathrm{Tr} : HW_p^1(X, d, \mu) \to L_q(E, \nu)$$

будет компактным при

1) $1 \le q < \frac{p(s-\alpha)}{s-p}$, *когда* $p < s$;

2) $1 \le q < \infty$, *когда* $p = s$;

3) $1 \le q \le \infty$, *когда* $p > s$.

Доказательство. Представим искомый оператор следа в виде композиции компактного и ограниченного операторов.

Выберем значение γ так, чтобы выполнялось неравенство $\max\{0, 1-s/p\} < \gamma < 1 - \alpha/p$.

По теореме 2.3 оператор следа

$$\mathrm{Tr} : HW_p^1(X, d, \mu) \to HW_r^1(E, d_\gamma, \nu)$$

будет компактным при $1 \leq r < R = \frac{p(s-\alpha)}{s-(1-\gamma)p}$.

Показатель регулярности меры ν относительно новой метрики d_{γ_1} равен $s_1 = \frac{s-\alpha}{\gamma}$ и

$$s_1 - R = \frac{s-\alpha}{\gamma} - \frac{p(s-\alpha)}{s-(1-\gamma)p} = \frac{(s-\alpha)(s-p)}{\gamma(s-(1-\gamma)p)} = A\ (s-p),$$

где $A > 0$. Таким образом, разности $s_1 - R$ и $s - p$ имеют одинаковый знак.

Поскольку значение r можно выбрать сколь угодно близким к R, результат теоремы следует из предложения 1.1, примененного к $HW_r^1(E, d_\gamma, \nu)$, согласно которому оператор вложения $I : HW_r^1(E, d_\gamma, \nu) \to L_q(E, \nu)$ будет непрерывным при всех

1) $1 \leq q \leq \frac{rs_1}{s_1 - r}$, когда $r < s_1$;
2) $1 \leq q < \infty$, когда $r = s_1$;
3) $1 \leq q \leq \infty$, когда $r > s_1$.

§ 3. Вложение классических пространств Соболева $W_p^1(G_\lambda)$ в весовые пространства Соболева — Хайлаша

Для выяснения взаимосвязи между классическими пространствами Соболева и пространствами Соболева — Хайлаша в «нулевом» пике G_λ в данном случае воспользуемся конструкцией, отличной от используемой в работе [1].

В евклидовых областях $G \subset \mathbb{R}^n$, для которых существует ограниченный оператор продолжения $\mathrm{Ext} : W_p^1(G) \to W_p^1(\mathbb{R}^n)$ (в частности, в пике G_1 с липшицевой границей), пространство Соболева $W_p^1(G)$ и пространство Соболева — Хайлаша $HW_p^1(G, |*|, dx)$ совпадают как множества функций и их нормы эквивалентны [2]. При этом для функции $u \in HW_p^1(G, |*|, dx)$ допустимая функция g может быть определена через максимальную функцию модуля градиента функции u, т. е. $g(x) = CM(|\nabla u|)(x)$ и

$$M(h)(x) = \sup_{\rho < \mathrm{diam}(G)} \frac{1}{m_n(B(x,\rho))} \int\limits_{B(x,\rho)} h(y)\, dy.$$

Положим $\beta = 1/\lambda$ и рассмотрим отображение $\varphi : G_1 \to G_\lambda$, определяемое условием $\varphi(x, y) = (z, y)$, где $z = x^\beta$. Для произвольной функции $u \in L_p^1(G_\lambda)$ областью определения функции $v = u \circ \varphi$ является пик G_1. Оценим интеграл от модуля градиента функции v по пику G_1.

Нетрудно видеть, что

$$\frac{\partial v}{\partial y_k}(x,y) = \frac{\partial u}{\partial y_k}(z,y); \quad \frac{\partial v}{\partial x}(x,y) = \beta x^{\beta-1} \frac{\partial u}{\partial z}(z,y);$$

$$J(\varphi)(x,y) = \beta x^{\beta-1}; \quad |\nabla v(x,y)| \leq C x^{\beta-1} |\nabla u(z,y)|.$$

Предполагая, что $q < p$, и используя неравенство Гёльдера, получаем

$$\int\limits_{G_1} |\nabla v|^q\, dxdy \leq C \int\limits_{G_1} |\nabla u|^q x^{(\beta-1)q}\, dxdy$$

$$\leq C \Bigg(\int\limits_{G_1} |\nabla u|^p J(\varphi)\, dxdy \Bigg)^{q/p} \Bigg(\int\limits_{G_1} x^{\frac{(p-1)(\beta-1)q}{p-q}}\, dxdy \Bigg)^{1-q/p}$$

$$\leq C_1\|\nabla u \mid L_p(G_\lambda)\|^q \left(\int\limits_0^1 x^{\frac{(p-1)(\beta-1)q}{p-q}} x^{n-1}\,dxdy\right)^{1-q/p}.$$

Последний интеграл сходится при $\frac{1}{q} > \frac{1}{p} + \frac{(p-1)(1-\beta)}{np}$. Поскольку при $p > 1$ и $\beta \leq 1$ всегда выполняется неравенство $\frac{1}{p} + \frac{(p-1)(1-\beta)}{np} < 1$, функция v принадлежит $L^1_q(G_1)$ при некотором $q > 1$. Следовательно, для почти всех точек $\xi, \eta \in G_1$ выполняется неравенство

$$|v(\xi) - v(\eta)| \leq |\xi - \eta|(g(\xi) + g(\eta)), \tag{7}$$

где $g(\tau) = CM(|\nabla v|)(\tau)$.

Введем в пике G_λ новую метрику, полагая $d(a,b) = |\varphi^{-1}(a) - \varphi^{-1}(b)|$, $a, b \in G_\lambda$. Шаром в метрике d с центром в точке $a \in G_\lambda$ и радиуса ρ является образ шара $B(\varphi^{-1}(a), \rho) \subset G_1$. Шары в метрике d будем обозначать символом $B_d(a,\rho)$, т. е. $B_d(a,\rho) = \varphi(B(\varphi^{-1}(a),\rho) \cap G_1)$. Оценим меру шара $B_d(a,\rho)$. Поскольку для произвольного евклидова шара B ребра вписанного и описанного кубов соизмеримы с радиусом шара, достаточно оценить меру образа куба $Q(\varphi^{-1}(a),\rho)$, у которого центр находится в точке $\varphi^{-1}(a)$ и длина ребра равна 2ρ. Образом куба $Q(\varphi^{-1}(a),\rho)$ будет n-мерный параллелепипед $Q_d(a,\rho) = \varphi(Q(\varphi^{-1}(a),\rho)) \subset G_\lambda$ с ребрами, параллельными координатным осям. Тогда

$$m_n(Q_d(a,\rho)) = \int\limits_{Q_d(a,\rho)} dtdy = \int\limits_{Q(\varphi^{-1}(a),\rho)} J(\varphi)(x,y)\,dxdy = \beta \int\limits_{Q(\varphi^{-1}(a),\rho)} x^{\beta-1}\,dxdy. \tag{8}$$

Далее запись $A(\xi) \sim B(\xi)$ на некотором множестве E будет означать, что существует такая постоянная $1 < C < \infty$, что $C^{-1}A(\xi) \leq B(\xi) \leq CA(\xi)$ для всех $\xi \in E$.

Обозначим $G_{1,\rho} = G_1 \cap \{(x,y) \in \mathbb{R}^n \mid x < \rho\}$, и пусть $a = (a_1, a_2)$, где $a_1 \in \mathbb{R}$, $a_2 \in \mathbb{R}^{n-1}$. Тогда $\varphi^{-1}(a) = \left(a_1^\lambda, a_2\right)$. При $\rho \geq a_1^\lambda$ куб $Q(\varphi^{-1}(a),\rho)$ содержит вершину пика G_1 и $G_{1,\rho} \subset Q(\varphi^{-1}(a),\rho) \subset G_{1,2\rho}$. Таким образом, из равенства (8) получаем

$$m_n(Q_d(a,\rho)) \sim C \int\limits_{G_{1,\rho}} x^{\beta-1}\,dxdy = C_1 \int\limits_0^\rho x^{\beta-1}x^{n-1}\,dxdy = C_2\rho^{\beta+n-1}. \tag{9}$$

При $\rho < a_1^\lambda$ из равенства (8) вытекает

$$m_n(Q_d(a,\rho)) \sim C\rho^{n-1} \int\limits_{a_1^\lambda-\rho}^{a_1^\lambda+\rho} x^{\beta-1}dx \sim C_3\rho^n a_1^{\lambda(\beta-1)} = C_3\rho^n a_1^{1-\lambda}. \tag{10}$$

Поскольку $\beta \leq 1$, при $\rho \geq a_1^\lambda$ выполняется неравенство $\rho^{\beta-1} \leq a_1^{1-\lambda}$. Таким образом, из оценок (9) и (10) следует, что для всех шаров в метрике d выполняется неравенство $m_n(B_d(a,\rho)) \leq C\rho^n a_1^{1-\lambda}$.

Теперь оценим значение максимальной функции $M(|\nabla v|)$ в точке $\varphi^{-1}(a)\in G_1$. Поскольку

$$\int\limits_{B(\varphi^{-1}(a),\rho)} |\nabla v(x,y)|\,dxdy \le C_1 \int\limits_{B(\varphi^{-1}(a),\rho)} |\nabla u(z,y)| J(\varphi)(x,y)\,dxdy$$
$$= C_1 \int\limits_{B_d(a,\rho)} |\nabla u(z,y)|\,dzdy,$$

имеем

$$\frac{1}{m_n(B(\varphi^{-1}(a),\rho))}\int\limits_{B(\varphi^{-1}(a),\rho)} |\nabla v(x,y)|\,dxdy$$
$$\le C_1\frac{m_n(B_d(a,\rho))}{m_n(B(\varphi^{-1}(a),\rho))}\frac{1}{m_n(B_d(a,\rho))}\int\limits_{B_d(a,\rho)} |\nabla u(z,y)|\,dzdy \le Ca_1^{1-\lambda}\mathscr{M}(|\nabla u|)(a),$$

где

$$\mathscr{M}(|\nabla u|)(a) = \sup_{\rho<1}\frac{1}{m_n(B_d(a,\rho))}\int\limits_{B_d(a,\rho)} |\nabla u(z,y)|\,dzdy. \tag{11}$$

Следовательно, $M(|\nabla v|)(\varphi^{-1}(a)) \le Ca_1^{1-\lambda}\mathscr{M}(|\nabla u|)(a)$.

Из оценок (9) и (10) следует, что мера Лебега m_n в пике G_λ относительно метрики d удовлетворяет условию удвоения, т. е. $m_n(B_d(a,2\rho)) \le Cm_n(B_d(a,\rho))$. Поэтому максимальный оператор (11) является ограниченным оператором в пространстве $L_p(G_\lambda, m_n)$ при $p>1$ [6].

Пусть $u\in L^1_p(G_\lambda)$ и $v = u\circ\varphi$. Используя неравенство (7), для почти всех точек a, $b\in G_\lambda$ получаем

$$|u(a)-u(b)| = |v(\varphi^{-1}(a))-v(\varphi^{-1}(b))| \le |\varphi^{-1}(a)-\varphi^{-1}(b)|(g(\varphi^{-1}(a))+g(\varphi^{-1}(b)))$$
$$\le d(a,b)\big(a_1^{1-\lambda}h(a)+b_1^{1-\lambda}h(b)\big), \tag{12}$$

где $h(\tau) = C\mathscr{M}(|\nabla u|)(\tau)\in L_p(G_\lambda, m_n)$.

Можно показать, что функция $H(\tau) = \tau_1^{1-\lambda}h(\tau)$ принадлежит пространству Лебега $L_q(G_\lambda, m_n)$ при $\frac{1}{q} > \frac{1}{p} + \frac{\lambda-1}{\Lambda}$, и получить вложение $W^1_p(G_\lambda)\subset HW^1_q(G_\lambda, d, m_n)$. К сожалению, если теперь непосредственно воспользоваться уже известными результатами для пространств Соболева — Хайлаша, то оценка (10) меры шара $B_d(a,\rho)$ при малых радиусах не позволяет получить оптимальный показатель в теореме вложения для следов соболевских функций на границе пика.

При этом вполне очевидно, что оценка (12) имеет весовой характер. Рассмотрим весовую меру μ, определяемую условием $d\mu = z^{p(\lambda-1)}dzdy$. Тогда $H\in L_p(G_\lambda,\mu)$ и согласно оценке (12) функция u принадлежит пространству $HL^1_p(G_\lambda, d, \mu)$. Поскольку весовая функция ограничена, имеем $L_p(G_\lambda, m_n)\subset L_p(G_\lambda,\mu)$ и получаем следующее утверждение.

Лемма 3.1. *Классическое пространство Соболева $W^1_p(G_\lambda)$ непрерывно вложено в пространство Соболева — Хайлаша $HW^1_p(G_\lambda, d, \mu)$.*

§ 4. О пространствах Соболева в «нулевых» пиках

Используя лемму 3.1 и результаты первых двух параграфов, мы можем довольно просто получить условия компактности операторов вложения и следа для классических пространств Соболева $W^1_p(G_\lambda)$.

Далее символами μ и d будем обозначать весовую меру и соответствующую метрику в пике G_λ, введенные в предыдущем параграфе.

Мера μ удовлетворяет условию удвоения, и нам понадобится оценка для показателя регулярности меры μ относительно метрики d. Для этого оценим меру μ шаров в метрике d. Как и ранее, удобнее получить оценки для меры образов соответствующих кубов

$$\mu(Q_d(a,\rho)) = \int\limits_{Q_d(a,\rho)} z^{p(\lambda-1)}\,dzdy$$
$$= \int\limits_{Q(\varphi^{-1}(a),\rho)} x^{p(1-\beta)} J(\varphi)(x,y)\,dxdy \sim C \int\limits_{Q(\varphi^{-1}(a),\rho)} x^{(p-1)(1-\beta)}\,dxdy.$$

При $\rho \geq a_1^\lambda$ получаем

$$\mu(Q_d(a,\rho)) \sim C \int\limits_{G_{1,\rho}} x^{(p-1)(1-\beta)}\,dxdy \sim C_1 \int\limits_0^\rho x^{(p-1)(1-\beta)} x^{n-1}\,dxdy$$
$$\sim C_2 \rho^{(p-1)(1-\beta)+n}. \quad (13)$$

При $\rho < a_1^\lambda$ будет

$$\mu(Q_d(a,\rho)) \sim C\rho^{n-1} \int\limits_{a_1^\lambda-\rho}^{a_1^\lambda+\rho} x^{(p-1)(1-\beta)}\,dx \sim C_3 \rho^n a_1^{\lambda(p-1)(1-\beta)}. \quad (14)$$

Поскольку $\beta \leq 1$, при $\rho \leq a_1^\lambda$ выполняется неравенство

$$\rho^{(p-1)(1-\beta)} \leq a_1^{\lambda(p-1)(1-\beta)}$$

и из оценок (13) и (14) следует, что для произвольного шара в метрике d выполняется неравенство $\mu(B_d(a,\rho)) \geq C\rho^s$, где $s = n + (p-1)(1-\beta) = \frac{\Lambda + p(\lambda-1)}{\lambda}$. Следовательно, мера μ относительно метрики d является s-регулярной в пике G_λ, и для пространства $HW^1_p(G_\lambda, d, \mu)$ выполняются соответствующие теоремы вложения. Учитывая полученное в лемме 3.1 вложение классических пространств Соболева в пространства Соболева — Хайлаша и тот факт, что $s - (1-\gamma)p = \frac{\Lambda - (1-\gamma\lambda)p}{\lambda}$, из теоремы 1.7 получаем условия компактности для оператора вложения в пространства Соболева — Хайлаша, определяемые гёльдеровой метрикой d_γ и весовой мерой μ.

Лемма 4.1. *Пусть $1 < p < \infty$ и $0 < \gamma < 1$. Тогда вложение пространства Соболева $W^1_p(G_\lambda)$ в пространство Соболева — Хайлаша $HW^1_r(G_\lambda, d_\gamma, \mu)$ является компактным при*

1) $1 \leq r < \frac{ps}{s-(1-\gamma)p} = p\frac{\Lambda + p(\lambda-1)}{\Lambda - (1-\gamma\lambda)p}$, *когда* $(1-\gamma\lambda)p < \Lambda$;
2) $1 \leq r < \infty$, *когда* $(1-\gamma\lambda)p = \Lambda$;

3) $1 \leq r \leq \infty$, *когда* $(1-\gamma\lambda)p > \Lambda$.

Используя неравенство Гёльдера, несложно получить условия вложения весового пространства $L_r(G_\lambda, \mu)$ в обычное пространство $L_q(G_\lambda, m_n)$ по мере Лебега. Имеем

$$\int\limits_{G_\lambda} u^q\, dzdy = \int\limits_{G_\lambda} u^q z^{\frac{pq(\lambda-1)}{r}} z^{\frac{pq(1-\lambda)}{r}}\, dzdy \leq \Bigg(\int\limits_{G_\lambda} u^r\, d\mu\Bigg)^{q/r} \Bigg(\int\limits_{G_\lambda} z^{\frac{pq(1-\lambda)}{r-q}}\, dzdy\Bigg)^{1-q/r}$$

$$= \|u \mid L_r(G_\lambda, \mu)\|^q \left(\int\limits_0^1 z^{\frac{pq(1-\lambda)}{r-q}} z^{\lambda(n-1)}\, dz\right)^{1-q/r}.$$

Последний интеграл сходится при условии

$$q < \frac{r\Lambda}{\Lambda + p(\lambda - 1)}. \tag{15}$$

Пересчитывая показатели суммируемости, получаем условия компактности вложения в пространства Соболева — Хайлаша, определяемые гёльдеровой метрикой d_γ и стандартной мерой Лебега m_n.

Лемма 4.2. *Пусть* $1 < p < \infty$ *и* $0 < \gamma < 1$. *Тогда вложение пространства Соболева* $W_p^1(G_\lambda)$ *в пространство Соболева — Хайлаша* $HW_q^1(G_\lambda, d_\gamma, m_n)$ *является компактным при*

1) $1 \leq q < \frac{p\Lambda}{\Lambda-(1-\gamma\lambda)p}$, *когда* $\Lambda(1-p) < (1-\gamma\lambda)p < \Lambda$;
2) $1 \leq q < \infty$, *когда* $(1-\gamma\lambda)p = \Lambda$;
3) $1 \leq q \leq \infty$, *когда* $(1-\gamma\lambda)p > \Lambda$.

Замечание. В формулировке п. 1 леммы условие $\Lambda(1-p) < (1-\gamma\lambda)p$ гарантирует, что получаемое значение q будет больше единицы. Очевидно, что при $\gamma \leq 1/\lambda$ значение p может быть произвольным, а при

$$p > \frac{\Lambda}{\Lambda - \lambda + 1} \tag{16}$$

вложение существует при любом $0 < \gamma < 1$. Заметим, что условие (16) появится еще раз при изучении следов соболевских функций на границе пика G_λ.

Метрика d является анизотропной в том смысле, что ее оценки относительно стандартной евклидовой метрики в направлениях, параллельном и ортогональном оси OX, оказываются существенно различными. Поэтому для получения гёльдеровых оценок относительно евклидовой метрики удобнее воспользоваться результатом работы [1], согласно которой пространство Соболева $W_p^1(G_\lambda)$ при $p > \Lambda/n$ совпадает с пространством Соболева — Хайлаша $HW_p^1(G_\lambda, |\ast|, m_n)$, определяемым евклидовой метрикой $|\ast|$ и мерой Лебега. Применяя теорему 1.7, получаем следующий результат.

Лемма 4.3. *Пусть* $\Lambda/n < p < \infty$ *и* $0 < \gamma < 1$. *Тогда вложение пространства Соболева* $W_p^1(G_\lambda)$ *в пространство Соболева — Хайлаша* $HW_q^1(G_\lambda, |\ast|^\gamma, m_n)$ *является компактным при*

1) $1 \leq q < \frac{p\Lambda}{\Lambda-(1-\gamma)p}$, *когда* $(1-\gamma)p < \Lambda$;
2) $1 \leq q < \infty$, *когда* $(1-\gamma)p = \Lambda$;
3) $1 \leq q \leq \infty$, *когда* $(1-\gamma)p > \Lambda$.

Следствие 4.4. *Пусть $p > \Lambda$. Тогда вложение пространства Соболева $W_p^1(G_\lambda)$ в пространство $C^{0,\gamma}(G_\lambda)$ компактно при $\gamma < 1 - \Lambda/p$.*

Поскольку $p > \Lambda > n$, локальная гёльдеровость соболевских функций следует из стандартной теоремы вложения для пространств Соболева в шаре $B \subset R^n$, а компактность оператора вложения при $\gamma < 1 - \Lambda/p$ — из п. 3 леммы 4.3.

Непосредственным следствием леммы 3.1 и теоремы 1.9 является утверждение о вложении пространств Соболева в весовые пространства Лебега.

Лемма 4.5. *Пусть $1 < p < \infty$. Тогда вложение пространства Соболева $W_p^1(G_\lambda)$ в весовое пространство Лебега $L_r(G_\lambda, \mu)$ компактно при*

1) $1 \le r < \frac{ps}{s-p} = p\frac{\Lambda + p(\lambda-1)}{\Lambda - p}$, *когда* $p < \Lambda$;

2) $1 \le r < \infty$, *когда* $p = \Lambda$;

3) $1 \le r \le \infty$, *когда* $p > \Lambda$.

Учитывая оценку (15), получаем стандартную теорему вложения для пространств Соболева в пике G_λ.

Теорема 4.6. *Пусть $1 < p < \infty$. Тогда вложение пространства Соболева $W_p^1(G_\lambda)$ в пространство Лебега $L_q(G_\lambda, m_n)$ компактно при*

1) $1 \le q < \frac{p\Lambda}{\Lambda - p}$, *когда* $p < \Lambda$;

2) $1 \le q < \infty$, *когда* $p = \Lambda$;

3) $1 \le q \le \infty$, *когда* $p > \Lambda$.

Как обычно, последовательное применение теоремы вложения для соболевских пространств с первыми производными позволяет получить теорему вложения для соболевских пространств с гладкостью, большей единицы.

Теорема 4.7. *Пусть $1 < p < \infty$, $l, k \in \mathbb{N}$ и $k < l$. Тогда вложение пространства Соболева $W_p^l(G_\lambda)$ в пространство Соболева $W_q^k(G_\lambda)$ компактно при*

1) $1 \le q < \frac{p\Lambda}{\Lambda - (l-k)p}$, *когда* $(l-k)p < \Lambda$;

2) $1 \le q < \infty$, *когда* $(l-k)p = \Lambda$;

3) $1 \le q \le \infty$, *когда* $(l-k)p > \Lambda$.

Теперь получим утверждения о компактности вложений для следов соболевских функций на границе пика. Для этого нам потребуются некоторые оценки.

Рассмотрим на границе пика G_λ весовую меру ν, определяемую условием $d\nu = z^{p(\lambda-1)} d\sigma$. Оценим меру ν шара в метрике d, т. е. оценим $\nu(B_d(a,\rho) \cap \partial G_\lambda)$ при $a \in \partial G_\lambda$.

Поскольку $\lambda \ge 1$, производная функции $h(z) = z^\lambda$ ограничена при $0 < z < 1$ и для элемента длины дуги графика функции $h(z)$ выполняется оценка $dl \sim dz$.

Как и ранее, нам проще оценить меру соответствующего параллелепипеда $Q_d(a,\rho)$ — куба в метрике d.

При $\rho \ge a_1^\lambda$ куб $Q_d(a,\rho)$ содержит вершину пика G_λ и

$$\nu(B_d(a,\rho)) \sim \nu(Q_d(a,\rho)) \sim C_1 \int\limits_0^{\rho^\beta} z^{p(\lambda-1)} z^{\lambda(n-2)}\, dz = C_2 \rho^{(p-1)(1-\beta)+n-1}.$$

При $\rho < a_1^\lambda$ получаем

$$\nu(B_d(a,\rho)) \sim \nu(Q_d(a,\rho)) \sim C_3\rho^{n-2} \int\limits_{(a_1^\lambda-\rho)^\beta}^{(a_1^\lambda+\rho)^\beta} z^{p(\lambda-1)}\,dz \sim C_4\rho^{n-1}a_1^{\lambda(p-1)(1-\beta)}.$$

Учитывая оценки (13) и (14), находим, что $\nu(B_d(a,\rho)) \sim C\rho^{-1}\mu(B_d(a,\rho))$. В обозначениях § 2 это означает, что $\alpha = 1$. Отметим, что функции из пространств Соболева — Хайлаша могут быть не определены на множестве нулевой меры, поэтому, вообще говоря, мы могли изначально считать областью определения пространства HW_p^1 замкнутый пик $\overline{G}_\lambda$. Тогда, как показано в § 2, для произвольной функции $u \in HW_p^1(\overline{G}_\lambda, d, \mu)$ след на границе пика естественным образом определен ν-почти всюду. Используя теорему 2.4, получаем условия компактности для оператора следа.

Теорема 4.8. *Пусть $1 < p < \infty$. Тогда оператор следа*

$$\mathrm{Tr} : W_p^1(G_\lambda) \to L_r(\partial G_\lambda, \nu)$$

является компактным при

1) $1 \le r < \frac{p(s-1)}{s-p} = p\frac{\Lambda+p(\lambda-1)-\lambda}{\Lambda-p}$, *когда* $p < \Lambda$;
2) $1 \le r < \infty$, *когда* $p = \Lambda$;
3) $1 \le r \le \infty$, *когда* $p > \Lambda$.

Используя неравенство Гёльдера, найдем условия вложения весового пространства $L_r(\partial G_\lambda, \nu)$ в пространство $L_q(\partial G_\lambda, \sigma)$, где σ — сужение $(n-1)$-мерной меры Хаусдорфа на ∂G_λ:

$$\int\limits_{\partial G_\lambda} u^q d\sigma = \int\limits_{\partial G_\lambda} u^q z^{\frac{pq(\lambda-1)}{r}} z^{\frac{pq(1-\lambda)}{r}}\,d\sigma \le \Bigg(\int\limits_{\partial G_\lambda} u^r\,d\nu\Bigg)^{q/r} \Bigg(\int\limits_{\partial G_\lambda} z^{\frac{pq(1-\lambda)}{r-q}}\,d\sigma\Bigg)^{1-q/r}$$
$$\sim \|u \mid L_r(\partial G_\lambda, \nu)\|^q \Bigg(\int\limits_0^1 z^{\frac{pq(1-\lambda)}{r-q}} z^{\lambda(n-2)}\,dz\Bigg)^{1-q/r}.$$

Последний интеграл сходится при $q < \frac{r(\Lambda-\lambda)}{\Lambda+p(\lambda-1)-\lambda}$.

Пересчет показателей суммируемости позволяет получить условия компактности вложения следов соболевских функций на границе «нулевого» пика в лебеговские классы по стандартной поверхностной мере.

Теорема 4.9. *Пусть $\frac{\Lambda}{\Lambda-\lambda+1} < p < \infty$. Тогда оператор следа*

$$\mathrm{Tr} : W_p^1(G_\lambda) \to L_q(\partial G_\lambda, \sigma)$$

является компактным при

1) $1 \le q < p\frac{\Lambda-\lambda}{\Lambda-p}$, *когда* $\frac{\Lambda}{\Lambda-\lambda+1} < p < \Lambda$;
2) $1 \le q < \infty$, *когда* $p = \Lambda$;
3) $1 \le q \le \infty$, *когда* $p > \Lambda$.

В п. 1 теоремы 4.9 ограничение снизу на показатель суммируемости p связано с тем, что при меньших значениях p вложение возможно лишь в пространства $L_q(\partial G_\lambda, \sigma)$ при $q < 1$ либо в весовые пространства Лебега.

Используя результат из [1] о том, что при $p > \Lambda/n$ пространство Соболева $W_p^1(G_\lambda)$ совпадает с пространством Соболева — Хайлаша $HW_p^1(G_\lambda, |*|, m_n)$, мы можем довольно просто получить условия компактности вложения в определяемые гёльдеровыми метриками пространства Соболева — Хайлаша на границе пика. Для этого достаточно заметить, что $\sigma(B(a,\rho)) \sim \rho^{-\lambda} m_n(B(a,\rho))$, и воспользоваться теоремой 2.3.

Лемма 4.10. *Пусть $\Lambda/n < p < \infty$ и $0 < \gamma < 1$. Тогда вложение пространства Соболева $W_p^1(G_\lambda)$ в пространство Соболева — Хайлаша $HW_q^1(\partial G_\lambda, |*|^\gamma, \sigma)$ компактно при*

1) $1 \le q < p\frac{\Lambda-\lambda}{\Lambda-(1-\gamma)p}$, *когда* $(1-\gamma)p < \Lambda$;
2) $1 \le q < \infty$, *когда* $(1-\gamma)p = \Lambda$;
3) $1 \le q \le \infty$, *когда* $(1-\gamma)p > \Lambda$.

Следствие 4.11. *Пусть $p > \Lambda$. Тогда вложение пространства Соболева $W_p^1(G_\lambda)$ в пространство $C^{0,\gamma}(\partial G_\lambda)$ компактно при $\gamma < 1 - \Lambda/p$.*

Замечание. Результаты § 1, 2 имеют довольно общий характер, а техника, используемая в § 3, без особого труда может быть перенесена и на области более общей природы по сравнению с рассматриваемыми в работе «нулевыми» пиками, к примеру на анизотропные пики или на «гребни» $\Gamma_\lambda = (0,1) \times G_\lambda \subset \mathbb{R}^{n+1}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Романов А. С.* О следах соболевских функций на границе пика с гёльдеровой особенностью // Сиб. мат. журн. 2007. Т. 48, № 1. С. 176–184.
2. *Hajłasz P.* Sobolev spaces on an arbitrary metric space // Potential Anal. 1996. V. 5, N 4. P. 403–415.
3. *Hajłasz P., Kinnunen J.* Hölder quasicontinuity of Sobolev functions // Rev. Mat. Iberoamericana. 1998. V. 14, N 3. P. 601–622.
4. *Hajłasz P., Koskela P.* Sobolev met Poincaré // Mem. Amer. Math. Soc. 145. V. 688. P. 1–101.
5. *Романов А. С.* О теоремах вложения для обобщенных пространств Соболева // Сиб. мат. журн. 1999. Т. 40, № 4. С. 931–937.
6. *Stromberg J. O., Torchinsky A.* Weighted Hardy spaces. Berlin etc.: Springer-Verl., 1989. (Lecture Notes in Math.; 1381).

Статья поступила 20 февраля 2006 г.

Романов Александр Сергеевич
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090
asrom@math.nsc.ru