Сибирский математический журнал
Май—июнь, 2007. Том 48, № 3

УДК 512.54

КОНЕЧНЫЕ ГРУППЫ С C–КВАЗИНОРМАЛЬНЫМИ ПОДГРУППАМИ

А. Н. Скиба, О. В. Титов

Аннотация: Пусть G — конечная группа, H — подгруппа группы G. Будем говорить, что H *c-квазинормальна в* G, если G имеет квазинормальную подгруппу T такую, что $HT = G$ и $T \cap H$ квазинормальна в G. В каждой нециклической силовской подгруппе P из G фиксируется некоторая ее подгруппа D такая, что $1 < |D| < |P|$, и изучается строение группы G при условии, что все подгруппы H из P порядка, равного порядку подгруппы D, не имеющие сверхразрешимого добавления в G, c-квазинормальны в G.

Ключевые слова: силовская подгруппа, добавление к подгруппе, сверхразрешимая группа, квазинормальная подгруппа, насыщенная формация.

§ 1. Введение

Все рассматриваемые в данной работе группы конечны. В работе [1] Оре рассмотрел два обобщения нормальности, которые вызывают неослабевающий интерес у исследователей и в наши дни. Прежде всего отметим, что в работе [1] впервые введены в математическую практику квазинормальные подгруппы: следуя [1], мы говорим, что подгруппа H группы G *квазинормальна в* G, если H перестановочна с любой подгруппой из G (т. е. $HT = TH$ для всех подгрупп T из G). Оказалось, что квазинормальные подгруппы обладают рядом интересных свойств [1–7] и что фактически они мало отличаются от нормальных подгрупп. Отметим, в частности, что согласно [6] для любой квазинормальной подгруппы H имеет место $H^G/H_G \subseteq Z_\infty(G/H_G)$, а ввиду [8, теорема 2.1.3] квазинормальные подгруппы — это в точности те субнормальные подгруппы группы G, которые являются модулярными элементами в решетке всех подгрупп группы G.

Понятно, что если подгруппа H группы G нормальна в G, то в G всегда найдется такая подгруппа T, что выполнено следующее условие:

$$G = HT \text{ и обе подгруппы } T \text{ и } T \cap H \text{ нормальны в } G. \qquad (*)$$

Таким образом, условие $(*)$ является еще одним обобщением нормальности. Такая идея впервые рассмотрена в работе [1], где, в частности, доказано, что *группа G является разрешимой тогда и только тогда, когда все ее максимальные подгруппы удовлетворяют условию* $(*)$ (в связи с этим см. также работу Бэра [9]). В дальнейшем, в работе [10] подгруппы, удовлетворяющие условию $(*)$, названы *c-нормальными*. В этой же работе построена красивая теория c-нормальных подгрупп и даны некоторые ее приложения в вопросах классификации групп с заданными системами подгрупп.

В данной работе мы анализируем следующее понятие, которое одновременно обобщает как условие квазинормальности, так и условие c-нормальности для подгрупп.

Определение 1.1. Подгруппа H группы G называется *c-квазинормальной в G подгруппой*, если существует такая подгруппа T группы G, что $HT = G$ и $T \cap H$, T — квазинормальные в G подгруппы.

Следующий простой пример показывает, что в общем случае c-квазинормальная подгруппа не является ни квазинормальной, ни c-нормальной.

Пример 1.2. Пусть $P = M_m(2) = \langle x, y \mid x^{2^{m-1}} = y^2 = 1, x^y = x^{1+2^{m-2}}\rangle$, где $m > 3$, и пусть $A = \langle x\rangle$, $B = \langle y\rangle$. Тогда $P = [A]B$ и $|B| = 2$. Так как $Z(P)$ — циклическая группа порядка 2^{m-2}, то B — нормальная подгруппа в $Z(P)B$. Пусть Z_3 — группа простого порядка 3 и $G = Z_3 \wr P = [K]P$, где K — база регулярного сплетения G. Поскольку $G = (KB)A$, $A \cap KB = 1$ и P — модулярная группа, то KB квазинормальна в G и поэтому подгруппа A c-квазинормальна в G. Значит, подгруппа A является c-квазинормальной в G, но не квазинормальной и не c-нормальной в G.

Главной целью данной работы является доказательство следующей теоремы.

Теорема 1.3. *Пусть $\mathscr{F}$ — насыщенная формация, содержащая все сверхразрешимые группы, и G — группа с нормальной подгруппой E такой, что $G/E \in \mathscr{F}$. Предположим, что каждая нециклическая силовская подгруппа P группы $F^*(E)$ содержит такую подгруппу D, что $1 < |D| < |P|$ и все подгруппы H группы P порядка, равного порядку подгруппы D, и порядка $2|D|$ (если P — неабелева 2-группа и $|P : D| > 2$) c-квазинормальны в G. Тогда $G \in \mathscr{F}$.*

В этой теореме $F^*(E)$ — обобщенная подгруппа Фиттинга [11, с. 126].

Теорема 1.3 будет доказана в § 4. Но прежде в § 3 мы докажем следующий факт, который является одним из главных этапов в доказательстве теоремы 1.3.

Теорема 1.4. *Пусть $\mathscr{F}$ — насыщенная формация, содержащая все сверхразрешимые группы, и G — группа с нормальной подгруппой E такой, что $G/E \in \mathscr{F}$. Предположим, что каждая нециклическая силовская подгруппа P группы E содержит такую подгруппу D, что $1 < |D| < |P|$ и все подгруппы H группы P порядка, равного порядку подгруппы D, и порядка $2|D|$ (если P не абелева 2-группа и $|P : D| > 2$), не имеющие сверхразрешимого добавления в G, c-квазинормальны в G. Тогда $G \in \mathscr{F}$.*

Отметим, что различные частные случаи теорем 1.3, 1.4 могут быть найдены в работах [10, 12–24].

§ 2. Предварительные сведения

Пусть $\mathscr{U}$ — класс всех сверхразрешимых групп. Напомним, что *$\mathscr{U}$-гиперцентром группы G* называется произведение нормальных подгрупп из G, G-главные факторы которых имеют простой порядок. Мы используем запись $Z_\infty^{\mathscr{U}}(G)$ для обозначения $\mathscr{U}$-гиперцентра группы G.

Лемма 2.1 (см. [25, теорема 9.15]). $G/C_G\big(Z_\infty^{\mathscr{U}}(G)\big) \in \mathscr{U}$.

Лемма 2.2. *Пусть G — группа и $P = P_1 \times \dots \times P_t$ — p-подгруппа из G, где $t > 1$ и $P_1, \dots, P_t$ — минимальные нормальные подгруппы группы G. Допустим, что P имеет подгруппу D такую, что $1 < |D| < |P|$, и каждая подгруппа H из P*

порядка, равного порядку подгруппы D, нормальна в G. Тогда порядок каждой подгруппы P_i — простое число.

Доказательство. Предположим, что эта лемма не верна, и пусть G — контрпример минимального порядка. Тогда для некоторого i ввиду минимальности подгруппы P_i имеем, что $|P_i| > p$ и $|D| > p$. Если существует j такое, что $|P_j| = p$, то условие леммы выполняется для G/P_j (относительно P/P_j) и поэтому все главные факторы, которые находятся между P_j и P, имеют простой порядок. Но тогда все подгруппы $P_1, \dots, P_t$ простые; противоречие. Значит, $|P_k| > p$ для всех $k = 1, \dots, t$. Без ограничения общности мы можем предположить, что $D = P_1 \dots P_k$ для некоторого $k < t$. Пусть M — максимальная подгруппа в P_1 и $H = MP_2 \dots P_k Z$, где $|Z| = p$ и $Z \leq P_{k+1}$. Тогда $|H| = |D|$ и поэтому по условию H нормальна в G. Таким образом, $D \cap H = MP_2 \dots P_k(D \cap Z) = MP_2 \dots P_k$ нормальна в G, следовательно, $M = P_1 \cap MP_2 \dots P_k$ нормальна в G, что противоречит минимальности подгруппы P_1.

Лемма 2.3 (см. [25, следствие 7.7.2]). *Пусть G — группа и $A \leq G$. Тогда*

(1) *Если A — субнормальная холлова подгруппа группы G, то A нормальна в G.*

(2) *Если A субнормальна в G и A — π-подгруппа группы G, то $A \leq O_\pi(G)$.*

(3) *Если A — субнормальная разрешимая подгруппа группы G, то A содержится в некоторой разрешимой нормальной в G подгруппе.*

Лемма 2.4 [1]. *Пусть G — группа и $H \leq G$. Если H квазинормальна в G, то H субнормальна в G.*

Следующая лемма хорошо известна (см., например, [7, лемма A]).

Лемма 2.5. *Если H квазинормальна в G и H — p-группа для некоторого простого p, то $O^p(G) \leq N_G(H)$.*

Отметим несколько свойств c-квазинормальных подгрупп.

Лемма 2.6. *Пусть G — группа и $H \leq K \leq G$. Тогда справедливы следующие утверждения.*

(1) *Если H — квазинормальная в G подгруппа, то H — c-квазинормальная в G подгруппа.*

(2) *Пусть H — нормальная в G подгруппа. Тогда K/H — c-квазинормальная подгруппа в группе G/H тогда и только тогда, когда K — c-квазинормальная подгруппа в группе G.*

(3) *Если H — c-квазинормальная в G подгруппа, то H — c-квазинормальная в K подгруппа.*

(4) *Пусть H — нормальная в G подгруппа. Тогда для всех c-квазинормальных в G подгрупп E таких, что $(|H|, |E|) = 1$, HE/H — c-квазинормальная подгруппа в группе G/H.*

(5) *Пусть H — p-группа для некоторого простого числа p и H — c-квазинормальная в G подгруппа, которая не квазинормальна в G. Тогда в группе G существует такая нормальная подгруппа M, что $|G : M| = p$ и $G = HM$.*

Доказательство. Утверждение (1) очевидно.

(2) Пусть K/H — c-квазинормальная в G/H подгруппа и T/H — квазинормальная в G/H подгруппа такая, что $(K/H)(T/H) = G/H$ и $(T/H) \cap (K/H)$ квазинормальна в G/H. Тогда $KT = G$, T и $T \cap K$ — квазинормальные в G подгруппы. Значит, K — c-квазинормальная в G подгруппа.

Пусть теперь для некоторой квазинормальной в G подгруппы T имеем $KT = G$ и $T \cap K$ — квазинормальная в G подгруппа. Ясно, что $(HT/H)(K/H) = G/H$. Поскольку $(HT/H) \cap (K/H) = (HT \cap K)/H = H(T \cap K)/H$, то $H(T \cap K)/H$ и HT/H — квазинормальные в G/H подгруппы. Следовательно, K/H — c-квазинормальная в G/H подгруппа.

(3) Пусть T — подгруппа группы G такая, что $HT = G$ и $T \cap H$ и T — квазинормальные в G подгруппы. Тогда $K = K \cap HT = H(K \cap T)$ и поэтому $K \cap T$ и $(K \cap T) \cap H$ — квазинормальные в K подгруппы. Значит, H c-квазинормальна в K.

(4) Пусть E — c-квазинормальная подгруппа в группе G и T — квазинормальная в G подгруппа такая, что $ET = G$ и $T \cap E$ квазинормальна в G. Ясно, что $H \leq T$ и $T \cap HE = H(T \cap E)$ — квазинормальная в G подгруппа. Значит, HE c-квазинормальна в G, и ввиду (2) HE/H — c-квазинормальная в G/H подгруппа.

(5) Поскольку согласно условию в группе G существует подгруппа T такая, что $HT = G$ и $T \cap H$, T — квазинормальные в G подгруппы, то T субнормальна в G и поэтому $T \leq K$, где K — собственная нормальная в G подгруппа. Значит, G/K — p-группа, и в G существует нормальная максимальная подгруппа M такая, что $HM = G$.

Лемма 2.7. *Пусть N — элементарная абелева нормальная p-подгруппа группы G. Предположим, что в группе N существует такая подгруппа D, что $1 < |D| < |N|$ и каждая подгруппа H группы N, порядок которой равен порядку подгруппы D, c-квазинормальна в G. Тогда некоторая максимальная подгруппа из N нормальна в G.*

Доказательство. Предположим, что лемма не верна. Пусть H — подгруппа группы N такая, что $|H| = |D|$ и H не квазинормальна в G. Поскольку по условию H — c-квазинормальная в G подгруппа, то согласно лемме 2.6(5) в группе G существует нормальная подгруппа T такая, что индекс $|G : T|$ равен простому числу и $HT = G$. Так как $NT = G$, то $T \cap N$ — максимальная подгруппа группы N и $T \cap N$ нормальна в G, что противоречит нашему предположению. Следовательно, каждая подгруппа H группы N такая, что $|H| = |D|$, квазинормальна в G. Пусть M — максимальная подгруппа группы N. Поскольку M является произведением некоторых квазинормальных в G подгрупп группы N, то M квазинормальна в G. Ввиду леммы 2.5 $O^p(G) \leq N_G(M)$, и поэтому $|G : N_G(M)| = p^a$ для некоторого $a \in \mathbb{N}$. Если $M_1, \dots, M_t$ — множество всех максимальных подгрупп группы N, то p делит t, что противоречит [26, гл. III, лемма 8.5(d)].

Лемма 2.8. *Пусть $\mathscr{F}$ — насыщенная формация, содержащая все нильпотентные группы, и пусть G — группа с разрешимым $\mathscr{F}$-корадикалом $P = G^{\mathscr{F}}$. Предположим, что каждая максимальная подгруппа группы G, не содержащая P, принадлежит $\mathscr{F}$. Тогда $P = G^{\mathscr{F}}$ — p-группа для некоторого простого числа p и если каждая циклическая подгруппа группы P простого порядка и порядка 4 (если $p = 2$ и P неабелева группа), не имеющая сверхразрешимого добавления в G, c-квазинормальна в G, то $|P/\Phi(P)| = p$.*

Доказательство. Согласно [25, теорема 24.2] $P = G^{\mathscr{F}}$ — p-группа для некоторого простого числа p и справедливы следующие утверждения:

(1) $P/\Phi(P)$ — главный фактор группы G;

(2) P имеет экспоненту p или экспоненту 4 (если $p = 2$ и P не абелева группа).

Предположим, что каждая циклическая подгруппа группы P простого порядка и порядка 4 (если $p = 2$ и P неабелева группа), не имеющая сверхразрешимого добавления в G, c-квазинормальна в G.

Пусть $\Phi = \Phi(P)$ и X/Φ — подгруппа группы простого порядка в P/Φ, $x \in X \setminus \Phi$ и $L = \langle x \rangle$. Тогда $|L| = p$ или $|L| = 4$ и либо L имеет сверхразрешимое добавление T в G, либо подгруппа L c-квазинормальна в G. Пусть имеет место первый случай. Мы можем предположить, что $T \neq G$. Поскольку $\Phi \leq \Phi(G)$, то $T\Phi \neq G$. Так как $LT = G$, то $(T\Phi/\Phi)(L\Phi/\Phi) = (T\Phi/\Phi)(X/\Phi) = G/\Phi$. Значит, $|G/\Phi : T\Phi/\Phi| = p$, и поскольку $G/\Phi = (P/\Phi)(T\Phi/\Phi)$, то $|P/\Phi(P)| = p$.

Предположим теперь, что L — c-квазинормальная в G подгруппа. Допустим, что L не квазинормальна в G. Тогда ввиду леммы 2.6(5) G имеет нормальную подгруппу T такую, что $LT = G$ и $|G : T| = p$. Значит, $L \not\subseteq T$. Но поскольку G/T — p-группа, согласно определению подгруппы P имеем $L \leq P \leq T$. Это противоречие показывает, что подгруппа L квазинормальна в G и поэтому $L\Phi(P)/\Phi(P) = X/\Phi(P)$ квазинормальна в $G/\Phi(P)$. Теперь в силу леммы 2.7 мы можем заключить, что $|P/\Phi(P)| = p$.

Лемма 2.9 [25, лемма 7.9]. *Пусть P — нильпотентная нормальная неединичная подгруппа группы G. Если $P \cap \Phi(G) = 1$, то P есть прямое произведение некоторых минимальных нормальных подгрупп группы G.*

Лемма 2.10 (см. [26, гл. III, теорема 3.5]). *Пусть A, B — нормальные подгруппы группы G и $A \leq \Phi(G)$. Предположим, что $A \leq B$ и B/A нильпотентна. Тогда B нильпотентна.*

Пусть p — простое число. Группа G называется *p-замкнутой*, если силовская p-подгруппа группы G нормальна.

Лемма 2.11 (см. [25, с. 34]). *Пусть p — простое число. Тогда класс всех p-замкнутых групп образует насыщенную формацию.*

Лемма 2.12. *Пусть $\mathscr{F}$ — насыщенная формация, содержащая $\mathscr{U}$, и G — группа с нормальной подгруппой E такой, что $G/E \in \mathscr{F}$. Если E — циклическая подгруппа, то $G \in \mathscr{F}$.*

Доказательство. Для доказательства леммы достаточно рассмотреть случай, когда E — минимальная нормальная подгруппа в G. Ясно, что $E \nsubseteq \Phi(G)$. Пусть M — максимальная подгруппа группы G такая, что $G = [E]M$, и пусть $C = C_G(E)$. Тогда $M_G = C \cap M$ и поэтому $G/M_G = [EM_G/M_G](M/M_G)$ сверхразрешима, поскольку $M/M_G \simeq G/C$ — абелева группа. Следовательно, $G \simeq G/E \cap M_G \in \mathscr{F}$.

Напомним, что произведение всех нормальных квазинильпотентных подгрупп из G называется *обобщенной подгруппой Фиттинга $F^*(G)$ группы G*.

Для удобства чтения приведем в виде леммы некоторые известные факты о таких подгруппах (см. [11, гл. X]).

Лемма 2.13. *Пусть G — группа. Тогда*

(1) *если N — нормальная подгруппа из G, то $F^*(N) \leq F^*(G)$;*

(2) *если N нормальная подгруппа из G и $N \leq F^*(G)$, то $F^*(G)/N \leq F^*(G/N)$;*

(3) *$F(G) \leq F^*(G) = F^*(F^*(G))$; если $F^*(G)$ разрешима, то $F^*(G) = F(G)$;*

(4) *$F^*(G) = F(G)E(G)$, где $E(G)$ — слой группы G (см. [11, с. 128]);*

(5) $C_G(F^*(G)) \leq F(G)$.

Лемма 2.14 (см. [16, лемма 2.3(6)]). *Пусть P — нормальная подгруппа группы G. Тогда $F^*(G/\Phi(P)) = F^*(G)/\Phi(P)$.*

Лемма 2.15 (см. [27, теорема 1]). *Пусть A — p'-группа автоморфизмов p-группы P. Допустим, что для некоторого натурального числа n выполняется $|P| > p^n$. Предположим, что каждая подгруппа H из P такая, что $|H| = p^n$, A-инвариантна и при $n = 1$ и $p = 2$ группа P абелева. Тогда A — циклическая группа.*

Лемма 2.16. *Пусть $G = AB$, где A, B — нормальные подгруппы из G. Предположим, что A p-группа для некоторого простого p и $O_{p'}(G) = 1$. Пусть $\mathscr{F}$ — насыщенная формация и $B \in \mathscr{F}$. Тогда $G \in \mathscr{F}$.*

Доказательство. Пусть $\mathscr{F} = LF(F)$, где F — максимальный внутренний локальный экран формации $\mathscr{F}$ (см. [25, с. 31]). Так как $B \in \mathscr{F}$, то $B/O_{p',p}(B) \in F(p)$. Поскольку $O_{p'}(B)$ — характеристическая подгруппа группы B, то $O_{p'}(B) \leq O_{p'}(G) = 1$ и поэтому $B/O_{p',p}(B) = B/O_p(B) \in F(p)$. Но $O_p(G) = O_p(G) \cap AB = A(O_p(G) \cap B) = AO_p(B)$ и тем самым $G/O_p(G) = AB/AO_p(B) \simeq B/B \cap AO_p(B) \in F(p)$. Отсюда следует, что $G \in \mathscr{F}$.

Лемма 2.17. *Пусть G — группа, p, q — различные простые делители порядка $|G|$, P — нециклическая силовская p-подгруппа группы G и Q — силовская q-подгруппа группы G. Если все максимальные подгруппы группы P (кроме, быть может, одной) имеют q-замкнутое добавление в G, то Q нормальна в G.*

Доказательство см. в [19, с. 134].

§ 3. Доказательство теоремы 1.4

Предположим, что теорема не верна, и рассмотрим контрпример, для которого $|G||E|$ минимально. Доказательство разобьем на следующие этапы.

(1) *Условия теоремы справедливы для любой холловой подгруппы X группы E (относительно X) и для каждой фактор-группы G/X (относительно E/X), где X — нормальная в G холлова подгруппа группы E.*

Пусть X — холлова подгруппа группы E и P — нециклическая силовская подгруппа группы X. По условию P содержит такую подгруппу D, что $1 < |D| < |P|$ и каждая подгруппа H группы P порядка, равного порядку подгруппы D, и порядка $2|D|$ (если P неабелева 2-группа и $|P : D| > 2$) либо имеет сверхразрешимое добавление T в G, либо c-квазинормальна в G. Пусть имеет место первый случай. Так как $X = X \cap HT = H(X \cap T)$, то $X \cap T$ — сверхразрешимое добавление для H в X. Во втором случае ввиду леммы 2.6(3) H — c-квазинормальная в X подгруппа. Следовательно, условия теоремы справедливы для X (относительно X).

Допустим, что X — нормальная в G подгруппа. Тогда $(G/X)/(E/X) \simeq G/E \in \mathscr{F}$. Пусть P^*/X — нециклическая силовская p-подгруппа группы E/X, где $p \mid |E/X|$ и P — силовская p-подгруппа группы P^* такая, что $P^* = PX$. Тогда P — нециклическая силовская подгруппа группы E и поэтому по условию P содержит такую подгруппу D, что $1 < |D| < |P|$ и каждая подгруппа H группы P порядка, равного порядку подгруппы D, и порядка $2|D|$ (если P не абелева 2-группа и $|P : D| > 2$) либо имеет сверхразрешимое добавление T в G, либо c-квазинормальна в G. Пусть H^*/X — подгруппа группы P^*/X порядка $|H^*/X| = |D|$. Тогда $H^* = [X]H$, где H — силовская p-подгруппа группы H^*.

Ясно, что $|H| = |D|$ и поэтому либо $H^*/X = HX/X$ имеет сверхразрешимое добавление $TX/X \simeq T/T \cap X$ в G/X, либо ввиду леммы 2.6(4) $H^*/X = HX/X$ c-квазинормальна в G/X. Следовательно, условия теоремы справедливы для G/X (относительно E/X).

(2) *Если X — неединичная нормальная холлова подгруппа группы E, то $X = E$.*

Так как X — характеристическая подгруппа группы E, то она нормальна в G и поэтому ввиду (1) условия теоремы справедливы для G/X. Значит, по выбору группы G имеем $G/X \in \mathscr{F}$. Следовательно, условия теоремы справедливы для G (относительно X), и поэтому по выбору групп G и E будет $X = E$.

(3) *Для наименьшего простого делителя p порядка $|E|$ силовская p-подгруппа P группы E нециклическая.*

Действительно, если P — циклическая подгруппа, то ввиду [26, гл. IV, теорема 2.8] E — p-нильпотентная подгруппа, что противоречит (2).

Зафиксируем некоторую силовскую p-подгруппу P группы E. Тогда ввиду (3) P — нециклическая подгруппа и поэтому по условию P содержит такую подгруппу D, что $1 < |D| < |P|$ и каждая подгруппа H группы P порядка, равного порядку подгруппы D, и порядка $2|D|$ (если P неабелева 2-группа и $|P : D| > 2$), которая не имеет сверхразрешимого добавления в G, c-квазинормальна в G.

(4) *Если $E = G$ или $E = P$, то $|D| > p$.*

Предположим, что $|D| = p$.

Прежде предположим, что $E = G$. Ввиду (2) G не p-нильпотентна, и поэтому согласно [26, гл. IV, теорема 5.4] G содержит p-замкнутую подгруппу Шмидта $H = [H_p]H_q$. В силу леммы 2.8 $|H_p/\Phi(H_p)| = p$, но это невозможно, поскольку p — наименьший простой делитель порядка группы H.

Пусть теперь $E = P$. Пусть M — максимальная подгруппа группы G, не содержащая E. Тогда $G/E \simeq M/M \cap E \in \mathscr{F}$. Допустим, что $|D| = p$. Пусть $L = G^{\mathscr{F}}$ и $\Phi = \Phi(L)$. Тогда $L \leq E$ и поэтому ввиду леммы 2.8 $|L/\Phi| = p$. Значит, по лемме 2.12 $G/\Phi \in \mathscr{F}$. Но тогда $L \leq \Phi$ и поэтому $L = \Phi$; противоречие. Следовательно, $|D| > p$.

(5) *Если $|P : D| > p$, то каждая подгруппа H группы P порядка, равного порядку подгруппы D, которая не имеет сверхразрешимого добавления в G, квазинормальна в G. Если P — неабелева 2-группа и $|P : D| > 2$, то каждая подгруппа H группы P порядка $|H| = 2|D|$, которая не имеет сверхразрешимого добавления в G, квазинормальна в G.*

Пусть H — подгруппа группы P такая, что $|H| = |D|$ и H не имеет сверхразрешимого добавления в G. Допустим, что H не является квазинормальной в G подгруппой. Тогда ввиду леммы 2.6(5) G содержит такую нормальную подгруппу M, что $HM = G$ и $|G : M| = p$. Поскольку класс $\mathscr{F}$ замкнут относительно подпрямых произведений, то $G/E \cap M \in \mathscr{F}$. Так как $|P : D| > p$, то в силу леммы 2.6 условия теоремы выполняются для G (относительно $E \cap M$). Но $|G||E \cap M| < |G||E|$, что противоречит выбору группы G и нормальной подгруппы E. Следовательно, каждая подгруппа H группы P порядка, равного порядку подгруппы D, которая не имеет сверхразрешимого добавления, квазинормальна в G. Аналогично можно доказать, что если P — неабелева 2-группа и $|P : D| > 2$, то каждая подгруппа H группы P порядка $|H| = 2|D|$, которая не имеет сверхразрешимого добавления в G, квазинормальна в G.

(6) *Для каждой абелевой минимальной нормальной подгруппы N группы*

G, содержащейся в P, будет $|N| \leq |D|$.

Предположим, что $|D| < |N|$. Если некоторая подгруппа H группы N порядка, равного порядку подгруппы D, имеет сверхразрешимое добавление T в G, то $TN = G$ и $T \neq G$ по выбору группы G. Так как $N = N \cap HT = H(N \cap T)$, то $N \cap T$ — собственная неединичная подгруппа группы N. Но тогда $N \cap T$ — нормальная подгруппа в G, что противоречит минимальности N. Значит, каждая подгруппа H группы N порядка, равного порядку подгруппы D, c-квазинормальна в G и поэтому ввиду леммы 2.7 некоторая максимальная подгруппа группы N нормальна в G; противоречие. Следовательно, полученное противоречие доказывает (6).

(7) *Если $E = G$ или $E = P$ и N — абелева минимальная нормальная подгруппа группы G, которая содержится в P, то условия теоремы справедливы для $G/N \in \mathscr{F}$ (относительно E/N).*

Пусть $E = P$. Пусть $p > 2$ или $|P : D| = p$, или $|N| < |D|$. Так как $(G/N)/(E/N) \simeq G/E$, ясно, что условия теоремы справедливы для G/N (относительно E/N). Поскольку согласно (6) имеем $|N| \leq |D|$, осталось рассмотреть только случай, когда P — 2-группа, $|P : N| > 2$ и $|N| = |D|$. Ввиду (5) каждая подгруппа H группы P порядка, равного порядку подгруппы D, которая не имеет сверхразрешимого добавления в G, квазинормальна в G. Согласно (4) N нециклична и поэтому каждая подгруппа группы G, содержащая N, нециклична. Пусть $N \leq K \leq P$, где $|K : N| = 2$. Поскольку K — нециклическая группа, она имеет максимальную подгруппу $L \neq N$. Если подгруппа N или подгруппа L имеют сверхразрешимое добавление в G, то K имеет сверхразрешимое добавление в G. Если подгруппы N и L квазинормальны в G, то $K = LN$ квазинормальна в G. Если P/N абелева, то условия теоремы справедливы для G/N. Предположим теперь, что P/N неабелева. Тогда P неабелева и поэтому ввиду (5) каждая подгруппа группы P порядка $2|D|$, которая не имеет сверхразрешимого добавления в G, квазинормальна в G. Рассуждая, как выше, можно показать, что каждая подгруппа X группы P, которая содержит N и для которой $|X : N| = 4$, либо имеет сверхразрешимое добавление в G, либо нормальна в G. Значит, условия теоремы справедливы для G/N (относительно E/N). Аналогично можно показать, что это утверждение справедливо, если $G = E$.

(8) *Если $E = G$, то по крайней мере одна из максимальных подгруппы группы P не имеет сверхразрешимого добавления в G* (это вытекает непосредственно из (2) и леммы 2.17).

(9) *E — разрешимая группа.*

Согласно (1) и выбору группы G если $E \neq G$, то утверждение (9) выполнено. Пусть $E = G$. Ввиду (7) нам только нужно показать, что $P_G \neq 1$.

Допустим, что $|P : D| = p$. Ввиду (8) по крайней мере одна из максимальных подгрупп группы P не имеет сверхразрешимого добавления в G. Пусть M — максимальная подгруппа из P, которая не имеет сверхразрешимого добавления в G. Тогда по условию M имеет добавление T в G, которое является квазинормальной в G подгруппой. Предположим, что $M \cap T = 1$. Тогда порядок силовской p-подгруппы группы T равен p и поэтому по лемме 2.6 условия теоремы справедливы для T (относительно T). Следовательно, T сверхразрешима. Согласно лемме 2.3 для некоторой нормальной разрешимой подгруппы R группы G имеем $T \leq R$. Так как G/R — p-группа, то G разрешима. Значит, $M \cap T \neq 1$. Следовательно, ввиду лемм 2.4 и 2.3 $M \cap T \leq O_p(G)$, и поэтому

$P_G \neq 1$.

Пусть теперь $|P : D| > p$. Согласно (5) каждая подгруппа H группы P порядка, равного порядку подгруппы D, которая не имеет сверхразрешимого добавления в G, квазинормальна в G. Ввиду леммы 2.4 мы можем предположить, что каждая подгруппа H группы P порядка, равного порядку подгруппы D, имеет сверхразрешимое добавление в G и поэтому каждая максимальная подгруппа группы P имеет сверхразрешимое добавление в G, что противоречит (8). Полученное противоречие доказывает (9).

(10) *E — q-замкнутая группа, где q — наибольший простой делитель порядка $|E|$.*

Если $E \neq G$, то согласно (1) утверждение (10) выполнено. Пусть теперь $E = G$. Так как ввиду (9) E разрешима и в силу (1) условия теоремы справедливы для каждой холловой подгруппы H группы G (относительно H), то мы можем предположить, что $|G| = p^a q^b$ для некоторых $a, b \in \mathbb{N}$. Допустим, что G не q-замкнутая группа. Ввиду (7) и выбора группы G для каждой минимальной нормальной подгруппы N группы G, содержащейся в P, фактор-группа G/N сверхразрешима. Следовательно, согласно лемме 2.11 $N \not\subseteq \Phi(G)$ и N — единственная минимальная нормальная подгруппа группы G, содержащаяся в P. Покажем, что $N = O_p(G)$. Действительно, пусть M — максимальная подгруппа группы G такая, что $G = [N]M$. Тогда $O_p(G) = O_p(G) \cap NM = N(O_p(G) \cap M)$. Поскольку $O_p(G) \leq F(G) \leq C_G(N)$, то $O_p(G) \cap M$ нормальна в G и поэтому $O_p(G) \cap M = 1$. Значит, $N = O_p(G)$.

Допустим, что $|P : D| = p$. Так как для каждой максимальной подгруппы A группы P, которая содержит N, мы имеем $AM = G$, то $M \simeq G/N$ — сверхразрешимое добавление для A в G. Значит, ввиду (8) некоторая максимальная подгруппа V группы P, не содержащая N, не имеет сверхразрешимого добавления в G. Следовательно, по условию V c-квазинормальна в G. Пусть T — подгруппа группы G такая, что $VT = G$ и $T \cap V$, T — квазинормальные в G подгруппы. Допустим, что $T \cap V = 1$. Тогда $|T| = pq^b$ и по лемме 2.6 условия теоремы справедливы для T (относительно T) и поэтому T сверхразрешима, что противоречит выбору подгруппы V. Следовательно, $T \cap V \neq 1$. Согласно леммам 2.3, 2.4 $T \cap V \leq O_p(G) = N$ и тем самым $T \cap V \leq N \cap V$.

Допустим, что $N \leq T$. Тогда $T \cap V \leq N \cap V \leq T \cap V$ и поэтому $T \cap V = N \cap V$. Ясно, что $N \cap V$ — нормальная в P подгруппа. С другой стороны, $N \cap V$ квазинормальна в G и поэтому для некоторой силовской q-подгруппы Q группы G имеем $Q \leq N_G(T \cap V)$. Это означает, что $T \cap V$ — неединичная нормальная в G подгруппа группы P. Тем самым $N \leq T \cap V \leq V$; противоречие. Следовательно, $N \not\subseteq T$. Так как T субнормальна в G, все силовские q-подгруппы группы G содержатся в T. Поэтому G/T_G — p-группа. Следовательно, $G \simeq G/N \cap T_G$ — q-замкнутая группа; противоречие.

Значит, $|P : D| > p$. Тогда ввиду (5) каждая подгруппа H группы P, для которой $|H| = |D|$ и которая не имеет сверхразрешимого добавления в G, квазинормальна в G. Так как каждая квазинормальная подгруппа группы G содержится в $O_p(G) = N$, то любая отличная от N подгруппа H группы P такая, что $|H| = |D|$, имеет сверхразрешимое добавление в G. Следовательно, каждая максимальная подгруппа группы P имеет сверхразрешимое добавление в G, что противоречит (8). Полученное противоречие доказывает (10).

(11) $E = P$.

Действительно, пусть q — наибольший простой делитель порядка $|E|$ и Q —

силовская q-подгруппа группы E. Тогда ввиду (10) Q нормальна в E и поэтому согласно (2) $Q = E = P$

Заключительное противоречие.

Пусть N — минимальная нормальная подгруппа группы G, содержащаяся в P. Тогда ввиду (7) и (11) N — единственная минимальная нормальная подгруппа группы G, которая содержится в P, поэтому $N = O_p(G) = P$, что невозможно в силу (6). Полученное противоречие завершает доказательство теоремы.

§ 4. Доказательство теоремы 1.3

Предположим, что эта теорема не верна, и рассмотрим контрпример, для которого $|G||E|$ минимально.

Пусть $F = F(E)$ и $F^* = F^*(E)$. Пусть p — простой делитель порядка $|F|$. Если E разрешима, то предположим, что p — наименьший простой делитель порядка $|F|$. Если E неразрешима, то предположим, что p — наибольший простой делитель $|F|$. Пусть P — силовская p-подгруппа из F, $P_0 = \Omega_1(P)$ и $C = C_G(P_0)$. Очевидно, что C нормальна в G.

(1) *$F^* = F \neq E$ и $C_G(F) = C_G(F^*) \leq F$.*

Ввиду леммы 2.6(3) условие теоремы выполняется для F^* (относительно F^*), поэтому по теореме 1.4 F^* сверхразрешима. Значит, ввиду леммы 2.13(3) $F^* = F$. Если $F = E$, то по теореме 1.4 $G \in \mathscr{F}$, что противоречит выбору группы G. Следовательно, $F^* = F \neq E$. В силу леммы 2.13(5) $C_G(F) = C_G(F^*) \leq F$.

(2) *Каждая собственная нормальная подгруппа X из G такая, что $F \leq X \leq E$, сверхразрешима.*

Ввиду леммы 2.13(1) $F^*(X) \leq F^* = F \leq X$ и поэтому $F^*(X) = F^*$. Значит, условия теоремы выполняются для X (относительно X), и тем самым по выбору группы G группа X сверхразрешима.

(3) *Если $E \neq G$, то E сверхразрешима* (это следует из (2)).

(4) *Предположим, что E — разрешимая группа. Пусть $V/P = F(E/P)$ и Q — силовская q-подгруппа группы V, где q делит $|V/P|$. Тогда $q \neq p$ и либо $Q \leq F$, либо $p > q$ и $C_Q(P) = 1$.*

Так как V/P нильпотентна и QP/P — силовская q-подгруппа группы V/P, то QP/P — характеристическая подгруппа в V/P и поэтому QP нормальна в E. Следовательно, $q \neq p$. Согласно теореме 1.4 QP сверхразрешима. Предположим, что $q > p$. Тогда Q — нормальная подгруппа в QP и поэтому $Q \leq F$. Пусть теперь $p > q$. Тогда $p > 2$ и так как p — наименьший простой делитель порядка $|F|$, то F — q'-подгруппа. Пусть U — силовская r-подгруппа группы F, где $r \neq p$. Тогда $r \neq q$ и поэтому $[U, Q] \leq P$. Предположим, что для некоторого $x \in Q$ имеем $x \in C_E(P)$. Тогда ввиду [28, гл. 5, теорема 3.6] и нильпотентности V/P имеем $[U, \langle x\rangle] = [U, \langle x\rangle, \langle x\rangle] = 1$, поэтому $x \in C_G(F)$. Так как E — разрешимая группа, имеем $C_E(F) \leq F$. Значит, $C_Q(P) = 1$.

(5) *$p > 2$.*

Допустим, что $p = 2$. Предположим, что E разрешима. Ввиду (4) $F/P = F(E/P)$. С другой стороны, с учетом (1) и леммы 2.13(3) $F^*(E/P) = F(E/P) = F^*/P$. Так как $G/E \simeq (G/P)/(E/P) \in \mathscr{F}$, по лемме 2.6 условия теоремы выполняются для G/P (относительно E/P). Следовательно, $G/P \in \mathscr{F}$, поэтому по теореме 1.4 $G \in \mathscr{F}$. Полученное противоречие с выбором группы G показывает, что E неразрешима. Значит, p — наибольший простой делитель $|F|$, поэтому ввиду (1) $F^* = F$ — 2-группа. Пусть Q — подгруппа простого порядка q группы E, где $q \neq 2$, и пусть $X = FQ$. В силу теоремы 1.4 X сверхразрешима и тем самым Q нормальна в X. Значит, $Q \leq C_E(F)$. Но ввиду (1) $C_E(F) = C_E(F^*) \leq F$, что невозможно. Полученное противоречие доказывает (5).

(6) *Каждая подгруппа группы P не имеет сверхразрешимого добавления в G.*

Пусть H — подгруппа группы P такая, что $G = HT$ и T сверхразрешима. Тогда $G/P \simeq T/T \cap P$ сверхразрешима и поэтому по теореме 3.1 $G \in \mathscr{F}$; противоречие.

(7) *Некоторая минимальная подгруппа группы P не является квазинормальной в G.*

Допустим, что каждая минимальная подгруппа из P квазинормальна в G. Предположим, что E разрешима. Пусть $V/P = F(E/P)$ и Q — силовская q-подгруппа из V, где q делит $|V/P|$. Значит, ввиду (4) либо $Q \leq F$, либо $C_Q(P) = 1$. Во втором случае по лемме 2.15 и (5) Q — циклическая группа. Ввиду леммы 2.6(4) условия теоремы выполняются для G/P и поэтому $G/P \in \mathscr{F}$ по выбору группы G. Но тогда по теореме 1.4 $G \in \mathscr{F}$. Полученное противоречие показывает, что E неразрешима. Значит, ввиду (3) $E = G$. Покажем, что каждая минимальная подгруппа L из P нормальна в G. Докажем сначала, что $O^p(G) = G$. Действительно, предположим, что $O^p(G) \neq G$. Согласно лемме 2.13(1) $F^*(O^p(G)) \leq F^*$. Тогда $F^*(O^p(G)) = F^* \cap O^p(G) = F \cap O^p(G)$ и поэтому ввиду (5) и леммы 2.6 условия теоремы справедливы для $O^p(G)$ (относительно $O^p(G)$). Следовательно, $O^p(G)$ сверхразрешима по выбору группы G. Но тогда G разрешима и поэтому E разрешима; противоречие. Значит, $O^p(G) = G$. Так как L квазинормальна в G, по лемме 2.5 $G = O^p(G) \leq N_G(L)$. Следовательно, каждая минимальная подгруппа из P нормальна в G и поэтому $P_0 \leq Z(F)$. Покажем теперь, что условия теоремы справедливы для G/P_0 (относительно C_E/P_0, где $C_E = C \cap E$). Действительно, по лемме 2.1 G/C сверхразрешима. Поскольку $G/E \in \mathscr{F}$, по условию $(G/P_0)/(C_E/P_0) \simeq G/C_E \in \mathscr{F}$. Ясно, что $F^* = F \leq F^*(C_E)$ и поэтому по лемме 2.13(1) $F^*(C_E) \leq F^*$. Тогда $F^*(C_E) = F^*$. Так как $P_0 \leq Z(C_E)$, согласно теореме 13.6 из [11] $F^*(C_E/P_0) = F^*/P_0 = F/P_0$. Ввиду (5), лемм 2.2 и 2.6 видим, что условия теоремы справедливы для G/P_0 и тем самым по выбору группы G будет $G/P_0 \in \mathscr{F}$. Но $P_0 \leq Z_\infty^{\mathfrak{U}}(G)$ и поэтому по лемме 2.12 $G \in \mathscr{F}$. Полученное противоречие завершает доказательство (7).

(8) *P — нециклическая подгруппа* (это следует из (6) и (7)).

Ввиду (8) P не является циклической подгруппой и поэтому согласно условию и (6) P содержит такую подгруппу D, что $1 < |D| < |P|$ и каждая подгруппа H из P порядка, равного порядку подгруппы D, c-квазинормальна в G.

(9) $|D| > p$.

Предположим, что $|D| = p$. Ввиду (7) P содержит подгруппу H такую, что $|H| = p$ и H не квазинормальна в G. Согласно (6) и лемме 2.6(5) подгруппа H имеет нормальное добавление T в G. Тогда условия теоремы справедливы для G (относительно $V = T \cap E$). Действительно, $G/V \in \mathscr{F}$ и $F(V) \leq F(E)$. Так как $|G : T| = p$, каждая силовская q-подгруппа группы F, где $q \neq p$, содержится в T. Следовательно, ввиду леммы 2.6 условия теоремы справедливы для G (относительно V). Но поскольку T — собственная подгруппа группы G и $ET = G$, то $|V| < |E|$, что противоречит выбору группы G и нормальной подгруппы E. Полученное противоречие завершает доказательство (9).

(10) *Если L — минимальная нормальная подгруппа группы G и $L \leq P$, то*

$|L| > p$.

Предположим, что $|L| = p$. Пусть $C_0 = C_E(L)$. Тогда условия теоремы справедливы для G/L (относительно C_0/L). Действительно, $G/C_0 = G/E \cap C_G(L) \in \mathscr{F}$. Поскольку $L \leq Z(C_0)$ и $L \leq Z(F)$, то $F(C_0/L) = F/L$. Если H/L — подгруппа группы G/L такая, что $|H| = |D|$, то ввиду (9) $1 < |H/L| < |P/L|$. Поскольку согласно лемме 2.6 H/L c-квазинормальна в G/L, то по лемме 2.6(4) и (5) условия теоремы справедливы для G/L и поэтому $G/L \in \mathscr{F}$. Следовательно, в силу леммы 2.12 $G \in \mathscr{F}$, что противоречит выбору группы G.

(11) $\Phi(G) \cap P \neq 1$, *и если* L — *минимальная нормальная подгруппа группы* G, *которая содержится в* $\Phi(G) \cap P$, *то* $(E/L) \neq F/L$.

Допустим, что $\Phi(G) \cap P = 1$. Тогда ввиду леммы 2.9 P — прямое произведение некоторых минимальных нормальных подгруппы группы G. Покажем, что P содержит максимальную подгруппу M, которая нормальна в G. Действительно, если каждая подгруппа H группы G порядка, равного порядку подгруппы D, квазинормальна в G, то это следует из леммы 2.7. Допустим, что некоторая подгруппа H порядка, равного порядку подгруппы D, не является квазинормальной в G подгруппой. Тогда ввиду (6) и леммы 2.6(5) G содержит нормальную максимальную подгруппу T такую, что $PT = G$. Тогда главный фактор $P/P \cap T$ группы G имеет простой порядок и поэтому $P \cap T$ — максимальная в P подгруппа. Ввиду [29, гл. А, теорема 9.13] для некоторой минимальной нормальной подгруппы L группы G, которая содержится в P, имеем $|P| = p$, что противоречит (10). Следовательно, $\Phi(G) \cap P \neq 1$. Пусть $L \leq \Phi(G) \cap P$, где L — минимальная нормальная подгруппа группы G. Предположим, что $F(E/L) = F/L$. Покажем, что условия теоремы справедливы для G/L (относительно E/L). Поскольку согласно лемме 2.7 $|L| \leq |D|$, условия теоремы справедливы для G/L в случае, когда $|P : D| = p$. Если $|L| < |D|$, то ввиду (5) условия теоремы также справедливы для G/L. Пусть теперь $|P : D| > p$ и $|L| = |D|$. Согласно (10) L нециклична и поэтому каждая подгруппа группы G, содержащая L, нециклична. Пусть $L \leq K$, $M \leq K$, где $M \neq L$ и L, M — максимальные подгруппы группы K. Покажем, что K — c-квазинормальная в G подгруппа. Это очевидно, если M квазинормальна в G. Пусть теперь M не является квазинормальной в G подгруппой. Согласно лемме 2.6(5) G имеет такую нормальную подгруппу S, что $MS = G = KS$ и $|G : S| = p$. Так как $L \leq \Phi(G)$, то $L \leq S$ и поэтому $S \cap K = L$. Значит, K — c-квазинормальная в G подгруппа. Следовательно, условия теоремы справедливы для G/L и поэтому $G/L \in \mathscr{F}$ по выбору группы G. Но так как $L \leq \Phi(G)$ и по условию $\mathscr{F}$ — насыщенная формация, то $G \in \mathscr{F}$. Полученное противоречие с выбором группы G показывает, что $F(E/L) \neq F/L$.

(12) $E = G$ — *неразрешимая группа.*

Предположим, что E — разрешимая группа. Пусть L — минимальная нормальная подгруппа из G, содержащаяся в $\Phi(G) \cap P$. Тогда по лемме 2.10 $F/L = F(E/L)$. С другой стороны, по лемме 2.13(3) $F^*(E/L) = F(E/L)$. Значит, в силу (1) $F^*(E/L) = F(E/L) = F^*/L$, что противоречит (11). Следовательно, E — неразрешимая группа, поэтому ввиду (3) $E = G$.

(13) G *имеет единственную максимальную нормальную подгруппу* M, *которая содержит* F, M *сверхразрешима и* G/M — *простая неабелева группа* (это вытекает из (2) и (12)).

(14) G/F — *простая неабелева группа, и если* L — *минимальная нормальная подгруппа группы* G, *которая содержится в* $\Phi(G) \cap P$, *то* G/L — *квазинильпо-*

тентная группа.

Пусть L — минимальная нормальная подгруппа группы G, содержащаяся в $\Phi(G) \cap P$. Тогда ввиду (11) $F^*(E/L) \neq F^*/L$. Следовательно, в силу леммы 2.13(2) $F/L = F^*/L$ — собственная подгруппа из $F^*(G/L)$. Согласно лемме 2.13(4) $F^*(G/L) = F(G/L)E(G/L)$, где $E(G/L)$ — слой группы G/L. Ввиду (13) каждый главный ряд группы G имеет только один неабелев фактор. Но $E(G/L)/Z(E(G/L))$ — прямое произведение простых неабелевых групп. Так как ввиду леммы 2.10 $F(G/L) = F/L$, то $F^*(G/L) = G/L$ — квазинильпотентная группа. Ясно, что $F(G/L) = F/L$ и $G/F \simeq (G/L)/(F/L)$ — простая неабелева группа.

(15) $F^* = P$.

Предположим, что $P \neq F$, и пусть Q — силовская q-подгруппа группы F, где $q \neq p$. Ввиду (14) $Q \leq Z_\infty(G)$. Значит, по теореме 13.6 из [11] $F^*(G/Q) = F^*/Q$, поэтому по лемме 2.6 условия теоремы справедливы для G/Q (относительно G/Q) и тем самым по выбору группы G группа G/Q сверхразрешима. Это влечет разрешимость группы G, что противоречит (12). Этим доказано (15).

(16) $\Phi(P) = 1$.

Допустим, что $\Phi(P) \neq 1$. Пусть L — минимальная нормальная подгруппа группы G, которая содержится в $\Phi(P)$. Тогда ввиду (14) G/L квазинильпотентна и поэтому по лемме 2.14 G квазинильпотентна. Но тогда $F = F^* = G$. Полученное противоречие доказывает (16).

(17) *Если H — нормальная подгруппа группы P и H квазинормальна в G, то H нормальна в G.*

Действительно, ввиду (14) и (15) $PO^p(G) = G$, поэтому по лемме 2.5 H нормальна в G.

(18) $|P : D| > p$.

Допустим, что $|P : D| = p$. Ввиду (11) $\Phi(G) \cap P \neq 1$. Пусть N — минимальная нормальная подгруппа из G, которая содержится в $\Phi(G) \cap P$. Согласно (16) для некоторой максимальной подгруппы V из P имеем $P = NV$. Допустим, что V квазинормальна в G. Так как V — максимальная в P подгруппа, то ввиду (17) V нормальна в G. Но по (10) $|N| > p$ и поэтому $N \neq N \cap V \neq 1$, что противоречит минимальности N. Значит, V не является квазинормальной в G подгруппой. Поскольку ввиду (6) и условия теоремы V c-квазинормальна в G, то G имеет квазинормальную подгруппу T такую, что $T \cap V$ квазинормальна в G. Допустим, что $N \leq T$. Ясно, что $N \cap V$ нормальна в P. Покажем, что подгруппа $N \cap V$ квазинормальна в G. Для этого необходимо установить, что подгруппа $N \cap V$ перестановочна с каждой циклической q-подгруппой группы G, где q — произвольный простой делитель порядка группы G. Пусть $\langle x \rangle$ — произвольная циклическая q-подгруппа группы G. Если $q = p$, то $\langle x \rangle \leq P$ и поэтому $(N \cap V)\langle x \rangle = \langle x \rangle (N \cap V)$. Пусть теперь $q \neq p$, и пусть $X = (T \cap V)\langle x \rangle$ и X_p — силовская p-подгруппа из X. Ввиду леммы 2.5 $X_p \leq T \cap V$. Тогда $X = (T \cap V)\langle x \rangle \cap N\langle x \rangle = (N \cap V)\langle x \rangle$ — подгруппа группы G. Следовательно, $N \cap V$ — квазинормальная в G подгруппа, и поэтому ввиду (17) $N \cap V$ нормальна в G. Но $N \cap V \neq 1$, что противоречит минимальности N. Тем самым $N \not\subseteq T$, и поэтому $N \cap T_G = 1$. Так как $G = TV$, то G/T_G — p-группа. Согласно (14) $G \simeq G/N \cap T_G$ квазинильпотентна, что противоречит (1). Следовательно, (18) доказано.

(19) $O_{p'}(G) = 1$.

Действительно, допустим, что $O_{p'}(G) \neq 1$. Тогда ввиду (13) $G = O_{p'}(G)P = O_{p'}(G) \times P = F^* = F$; противоречие.

(20) $O^p(G) = G$.

Допустим, что $O^p(G) \neq G$. Тогда G имеет нормальную подгруппу T такую, что $|G : T| = p$. Покажем, что условия теоремы справедливы для T. Ясно, что $F \cap T \leq F^*(T)$. Ввиду (14) $T/F \cap T$ — простая неабелева группа. Следовательно, если $F \cap T \neq F^*(T)$, то $F^*(T) = T$ и поэтому $G = TF = F^* = F$ нильпотентна; противоречие. Значит, $F \cap T = F^*(T)$, и в силу (18) условия теоремы справедливы для T. Отсюда $T \in \mathscr{F}$. Значит, по лемме 2.16 и ввиду (19) $G \in \mathscr{F}$. Полученное противоречие доказывает (20).

(21) *Каждая подгруппа H из P, порядка, равного порядку подгруппы D, нормальна в G.*

Покажем, что каждая подгруппа H группы P порядка, равного порядку подгруппы D, квазинормальна в G. Допустим, что некоторая подгруппа H из P порядка, равного порядку подгруппы D, не является квазинормальной в G. Тогда по лемме 2.6(5) G имеет нормальную подгруппу T такую, что $TH = G$ и $|G : T| = p$. Но тогда $O^p(G) \neq G$, что противоречит (2). Следовательно, каждая подгруппа H из P такая, что $|H| = |D|$, квазинормальна в G. Ввиду (20) и леммы 2.5 имеем (21).

Заключительное противоречие.

Пусть N — минимальная нормальная подгруппа из G такая, что $N \leq P$. Ввиду (16) для некоторой максимальной подгруппы M из P имеем $P = NM$. Пусть H — подгруппа группы P такая, что $H \leq M$ и $|H| = |D|$. Тогда в силу (21) H нормальна в G и, очевидно, $N \nsubseteq H$. Значит, $N \cap H = 1$, поэтому G имеет минимальную нормальную подгруппу $L \neq N$ такую, что $L \leq P$. Ввиду (14) по крайней мере одна из подгрупп N, L имеет простой порядок, что невозможно в силу (10). Полученное противоречие завершает доказательство теоремы.

Авторы выражают глубокую благодарность рецензенту за полезные замечания, в частности, за предложенный термин «c-квазинормальная подгруппа».

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ore O.* Contributions in the theory of groups of finite order // Duke Math. J. 1939. V. 5, N 2. P. 431–460.
2. *Ito N., Szép J.* Uber die Quasinormalteiler von endlichen Gruppen // Act. Sci. Math. 1962. V. 23. P. 168–170.
3. *Deskins W. E.* On quasinormal subgroups of finite groups // Math. Z. 1963. Bd 82, N 2. S. 125–132.
4. *Thompson J. G.* An example of core-free quasinormal subgroups of p-groups // Math. Z. 1967. Bd 96. N 2. S. 226–227.
5. *Stonehewer S. E.* Permutable subgroups in infinite groups // Math. Z. 1972. Bd 125, N 1. S. 1–16.
6. *Maier R., Schmid P.* The embedding of permutable subgroups in finite groups // Math. Z. 1973. Bd 131, N 3. S. 269–272.
7. *Schmid P.* Subgroups permutable with all Sylow subgroups // J. Algebra. 1998. V. 207, N 1. P. 285–293.
8. *Schmidt R.* Subgroup lattices of groups // De Gruyter expositions in mathematics. Berlin; New York: Walter de Gruyter, 1994. V. 14. P. 475.
9. *Baer R.* Classes of finite groups and their properties // Illinois Math. J. 1957. V. 1, N 1. P. 115–187.
10. *Wang Y.* c-Normality of groups and its properties // J. Algebra. 1996. V. 180, N 2. P. 954–965.
11. *Huppert B., Blackburn N.* Finite groups. III. Berlin; New York: Springer-Verl., 1982.

12. *Buckley J.* Finite groups whose minimal subgroups are normal // Math. Z. 1970. Bd 116, N 1. S. 15–17.
13. *Srinivasan S.* Two sufficient conditions for supersolubility of finite groups // Israel J. Math. 1980. V. 35, N 3. P. 210–214.
14. *Ramadan M.* Influence of normality on maximal subgroups of Sylow subgroups of a finite group // Acta Math. Hungar. 1992. V. 59, N 1–2. P. 107–110.
15. *Ballester-Bolinches A., Pedraza-Aguilera M. C.* On minimal subgroups of finite groups // Acta Math. Hungar. 1996. V. 73, N 4. P. 335–342.
16. *Li D., Guo X.* The influence of c-normality of subgroups on the structure of finite groups. II // Comm. Algebra. 1998. V. 26, N 5. P. 1913–1922.
17. *Ballester-Bolinches A., Wang Y.* Finite groups with c-normal minimal subgroups // J. Pure Appl. Algebra. 2000. V. 153, N 2. P. 121–127.
18. *Wei H.* On c-normal maximal and minimal subgroups of Sylow subgroups of finite groups // Comm. Algebra. 2001. V. 29, N 5. P. 2193–2200.
19. *Guo W., Shum K. P., Skiba A. N.* G-covering subgroup systems for the classes of supersoluble and nilpotent groups // Israel J. Math. 2003. V. 138, N 1. P. 125–138.
20. *Wei H., Wang Y., Li Y.* On c-normal maximal and minimal subgroups of Sylow subgroups of finite groups. II // Comm. Algebra. 2003. V. 31, N 10. P. 4807–8411.
21. *Веньбинь Го, Шам К. П., Скиба А. Н.* G-накрывающие системы подгрупп для классов p-сверхразрешимых и p-нильпотентных конечных групп // Сиб. мат. журн. 2004. Т. 45, № 3. С. 527–539.
22. *Alsheik Ahmad A.* Finite groups with given c-permutable subgroups // Algebra Discrete Math. 2004. N 2. P. 9–16.
23. *Skiba A. N.* A note on c-normal subgroups of finite groups // Algebra Discrete Math. 2005. N 3. P. 85–95.
24. *Miao L., Guo W.* Finite groups with some primary subgroups $\mathscr{F}$-s-supplemented // Comm. Algebra. 2005. V. 33, N 8. P. 2789–2800.
25. *Шеметков Л. А.* Формации конечных групп. М.: Наука, 1978.
26. *Huppert B.* Endliche Gruppen. I. Berlin; Heidelberg; New York: Springer-Verl., 1967.
27. *Сергиенко В. И.* Критерий p-разрешимости для конечных групп // Мат. заметки. 1971. Т. 9, № 4. С. 375–383.
28. *Gorenstein D.* Finite groups. New York; Evanston; London: Harper and Row, 1968.
29. *Doerk K., Hawkes T.* Finite soluble groups. Berlin; New York: Walter de Gruyter, 1992.

Статья поступила 22 июня 2006 г., окончательный вариант — 4 февраля 2007 г.

Скиба Александр Николаевич
Гомельский гос. университет им. Ф. Скорины, математический факультет,
Гомель 246019, Беларусь
`Skiba@gsu.unibel.by`

Титов Олег Владимирович
Белорусский гос. университет транспорта, электротехнический факультет,
Гомель 246653, Беларусь
`O.Titov@tut.by`