Сибирский математический журнал
Сентябрь—октябрь, 2006. Том 47, № 5

УДК 517.956.35

АСИМПТОТИКА РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ ДИФФУЗИИ МАГНИТНОГО ПОЛЯ В ВЕЩЕСТВО

Т. А. Джангвеладзе, З. В. Кигурадзе

Аннотация: Исследовано асимптотическое поведение решения при бесконечном возрастании времени системы нелинейных интегродифференциальных уравнений, возникающей при математическом моделировании задачи диффузии магнитного поля в вещество. Установлен соответствующий порядок сходимости.

Ключевые слова: диффузия магнитного поля, нелинейная интегродифференциальная система, асимптотическое поведение решения.

§ 1. Введение

При моделировании процессов диффузии магнитного поля в средах, коэффициент электропроводности которых существенно зависит от температуры, и других прикладных задачах, получаются нелинейные дифференциальные и интегродифференциальные уравнения и системы таких уравнений.

Предположим, что магнитное поле распространяется в вещество, коэффициент электропроводности которого зависит от температуры. В квазистационарном приближении соответствующая система Максвелла имеет вид [1, с. 238]

$$\frac{\partial H}{\partial t} = -\operatorname{rot}(\nu_m \operatorname{rot} H), \tag{1.1}$$

$$c_\nu \frac{\partial \theta}{\partial t} = \nu_m (\operatorname{rot} H)^2, \tag{1.2}$$

где $H = (H_1, H_2, H_3)$ — вектор напряженности магнитного поля, θ — температура, c_ν и ν_m характеризуют теплоемкость и электропроводность среды. Система (1.1) определяет распространение магнитного поля в среде, а уравнение (1.2) — изменение температуры за счет джоулева нагрева.

Модель (1.1), (1.2) в некоторых случаях удобно изучать, придавая ей интегродифференциальный вид. Если $c_\nu = c_\nu(\theta)$ и $\nu_m = \nu_m(\theta)$, то после интегрирования уравнения (1.2) по времени и подстановки в (1.1) получается система [2]

$$\frac{\partial H}{\partial t} = -\operatorname{rot}\left[a\left(\int_0^t |\operatorname{rot} H|^2 d\tau\right)\operatorname{rot} H\right], \tag{1.3}$$

где функция $a = a(S)$ определена для $S \in [0, \infty)$.

Указанная интегродифференциальная модель сложна и поддается изучению пока только для частных классов. Отметим, что для металлических проводников, где нелинейность имеет вид $a(S) = \exp(S)$, получается очень сложная система [2, 3].

Рассмотрим плоское магнитное поле H вида $H = (0, 0, U)$, где $U = U(x, y, t)$ — скалярная функция времени и двух пространственных переменных. Тогда $\operatorname{rot} H = \big(\partial U/\partial y, -\partial U/\partial x, 0\big)$ и система (1.3) примет вид

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \nabla \left[a\left(\int\limits_0^t |\nabla U|^2 d\tau \right) \nabla U \right], \tag{1.4}$$

где $\nabla U = \big(\partial U/\partial x, \partial U/\partial y\big)$.

Изучение уравнений типа (1.3), (1.4) началось в работах [2, 3]. В этих работах, в частности, доказаны теоремы существования обобщенного решения первой краевой задачи для одномерного пространственного варианта при $a(S) = 1 + S$ и единственность для более общих случаев.

Одномерный вариант для случая $a(S) = (1 + S)^p$, $0 < p \le 1$, изучен в [4]. В этой работе, с использованием метода компактности [5; 6, с. 118–132], доказана теорема существования и единственности решения первой краевой задачи в пространстве $L_{2p+2}\big(0, T; \overset{\circ}{W}{}^1_{2p+2}(0, 1) \cap W^2_2(0, 1)\big)$, причем $\partial U/\partial t \in L_2(Q_T)$, где $Q_T = (0, 1) \times (0, T)$, а T — фиксированное положительное число. Исследование для многомерных случаев впервые проведено в работе [7]. В [8] основное внимание уделяется асимптотическому поведению решения при $t \to \infty$. В работах [9–11] уравнения типа (1.3), (1.4) и их некоторые обобщения исследованы по схеме условно слабо замкнутых операторов.

Модель Максвелла сложна для теоретического исследования и практического применения при решении конкретных диффузионных задач. Поэтому чаще используются ее упрощенные варианты. В работе [12] изложен вывод одномерных аналогов диффузионных процессов с двумя компонентами вектора магнитной проницаемости $H = (H_\varphi, H_z)$ в цилиндрических токоносителях. Система Максвелла в этом случае имеет следующий вид:

$$\begin{gathered} \frac{\partial H_\varphi}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{v}{r} \frac{\partial r H_\varphi}{\partial r} \right), \quad \frac{\partial H_z}{\partial t} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}\left(v r \frac{\partial H_z}{\partial r} \right), \\ \frac{\partial \theta}{\partial t} = v\left[\left(\frac{\partial H_z}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial r H_\varphi}{\partial r} \right)^2 \right]. \end{gathered} \tag{1.5}$$

Отметим, что исследование уравнений типа системы (1.5) в интегродифференциальной трактовке проводится также в работе [13] и многих других.

Рассмотрим снова систему (1.3). Допустим, что вектор магнитного поля двухкомпонентный: $H = (0, U, V)$, где $U = U(x, t)$ и $V = V(x, t)$ — скалярные функции времени и одной пространственной переменной. Тогда

$$\operatorname{rot}(a(S) \operatorname{rot} H) = \left(0, -\frac{\partial}{\partial x}\left[a(S) \frac{\partial U}{\partial x} \right], -\frac{\partial}{\partial x}\left[a(S) \frac{\partial V}{\partial x} \right] \right),$$

где

$$S(x, t) = \int\limits_0^t \left[\left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial x} \right)^2 \right] d\tau \tag{1.6}$$

и система (1.3) примет вид

$$\frac{\partial U}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}\left[a(S) \frac{\partial U}{\partial x} \right] = 0, \quad \frac{\partial V}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}\left[a(S) \frac{\partial V}{\partial x} \right] = 0. \tag{1.7}$$

В [14–17] исследуются некоторые вопросы асимптотического поведения решения начально-краевых задач для системы типа (1.6), (1.7).

Цель настоящей работы — изучение асимптотического поведения при $t \to \infty$ решения первой краевой задачи для системы (1.6), (1.7).

Отметим, что вопросам существования и единственности решения задач, изучаемых в настоящей статье и аналогичных им, посвящены работы [2–4, 7, 9–11, 13, 14].

§ 2. Постановка задачи и стабилизация решений

Рассмотрим следующую нелинейную интегродифференциальную систему:

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left[a(S)\frac{\partial U}{\partial x}\right], \quad \frac{\partial V}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left[a(S)\frac{\partial V}{\partial x}\right], \tag{2.1}$$

где

$$S(x,t) = \int_0^t \left[\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2\right] d\tau,$$

а $a = a(S)$ — заданная функция своего аргумента.

В цилиндре $(0,1)\times(0,\infty)$ для системы (2.1) поставим следующую начально-краевую задачу:

$$U(0,t) = U(1,t) = V(0,t) = V(1,t) = 0, \quad t \geq 0, \tag{2.2}$$

$$U(x,0) = U_0(x), \quad V(x,0) = V_0(x), \quad x \in [0,1], \tag{2.3}$$

и изучим асимптотическое поведение решения задачи (2.1)–(2.3) при неограниченном возрастании времени.

Исследование вопроса стабилизации разобьем на несколько этапов.

Лемма 2.1. *Если* $a(S) \geq a_0 = \text{const} > 0$, $U_0, V_0 \in L_2(0,1)$, *то для решения задачи* (2.1)–(2.3) *справедлива оценка*

$$\|U\| + \|V\| \leq C\exp(-a_0 t).$$

Всюду через C будем обозначать различные константы, не зависящие от t, U и V, а через $\|\cdot\|$ — норму пространства $L_2(0,1)$.

Доказательство. Умножим первое уравнение системы (2.1) на U и проинтегрируем по области $(0,1)$. Используя формулу интегрирования по частям и учитывая краевые условия (2.2), получаем

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|U\|^2 + \int_0^1 a(S)\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 dx = 0. \tag{2.4}$$

Из (2.4) с помощью неравенства Пуанкаре — Фридрихса и с учетом условия $a(S) \geq a_0$ следует, что

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|U\|^2 + a_0\|U\|^2 \leq 0. \tag{2.5}$$

Аналогично

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|V\|^2 + \int_0^1 a(S)\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 dx = 0, \quad \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|V\|^2 + a_0\|V\|^2 \leq 0.$$

Отсюда, учитывая (2.4) и (2.5), получаем

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\|U\|^2+\|V\|^2)+\int\limits_0^1 a(S)\left[\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2\right]dx=0, \tag{2.6}$$

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\|U\|^2+\|V\|^2)+a_0(\|U\|^2+\|V\|^2)\le 0. \tag{2.7}$$

Из неравенства (2.7) имеем

$$\frac{d}{dt}[\exp(2a_0t)(\|U\|^2+\|V\|^2)]\le 0.$$

Интегрируя последнее неравенство по отрезку $(0,t)$, приходим к результату леммы 2.1.

Таким образом, имеет место стабилизация решения при $t\to\infty$ в норме пространства $L_2(0,1)$, причем сходимость экспоненциальная.

Отметим, что стабилизация решения при $t\to\infty$ справедлива и в норме пространства $W_2^1(0,1)$. Теперь приступим к доказательству этого факта.

Пусть функции $a=a(S)$, $U_0=U_0(x)$ и $V_0=V_0(x)$ удовлетворяют дополнительным условиям: $a'(S)\ge 0$, $a''(S)\le 0$, $U_0,V_0\in W_2^2(0,1)$, $U_0(0)=U_0(1)=V_0(0)=V_0(1)=0$. Из (2.6) легко получаются априорные оценки

$$\|U\|\le C,\quad \int\limits_0^t\left\|\frac{\partial U}{\partial x}\right\|^2d\tau\le C,\quad \|V\|\le C,\quad \int\limits_0^t\left\|\frac{\partial V}{\partial x}\right\|^2d\tau\le C. \tag{2.8}$$

Оценим следующий интеграл:

$$\int\limits_0^t\left|\frac{d}{d\tau}\left\|\frac{\partial U}{\partial x}\right\|^2\right|d\tau=\int\limits_0^t\left|\frac{d}{d\tau}\int\limits_0^1\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2dx\right|d\tau$$

$$\le 2\int\limits_0^t\int\limits_0^1\left|\frac{\partial U}{\partial x}\right|\left|\frac{\partial^2 U}{\partial x\partial\tau}\right|dxd\tau\le\int\limits_0^t\left\|\frac{\partial U}{\partial x}\right\|^2d\tau+\int\limits_0^t\left\|\frac{\partial^2 U}{\partial x\partial\tau}\right\|^2d\tau.$$

Отсюда

$$\int\limits_0^t\left|\frac{d}{d\tau}\left\|\frac{\partial U}{\partial x}\right\|^2\right|d\tau\le C+\int\limits_0^t\left\|\frac{\partial^2 U}{\partial x\partial\tau}\right\|^2d\tau. \tag{2.9}$$

Аналогично

$$\int\limits_0^t\left|\frac{d}{d\tau}\left\|\frac{\partial V}{\partial x}\right\|^2\right|d\tau\le C+\int\limits_0^t\left\|\frac{\partial^2 V}{\partial x\partial\tau}\right\|^2d\tau. \tag{2.10}$$

Оценим интегралы, стоящие в правых частях неравенств (2.9) и (2.10). Для этого продифференцируем уравнения системы (2.1) по t и умножим их соответственно на $\partial U/\partial t$ и $\partial V/\partial t$. Учитывая краевые условия (2.2), получаем

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\|\frac{\partial U}{\partial t}\right\|^2+\int\limits_0^1 a'(S)\left[\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2\right]\frac{\partial U}{\partial x}\frac{\partial^2 U}{\partial x\partial t}dx$$

$$+\int\limits_0^1 a(S)\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x\partial t}\right)^2dx=0,$$

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\|\frac{\partial V}{\partial t}\right\|^2+\int_0^1 a'(S)\Big[\Big(\frac{\partial U}{\partial x}\Big)^2+\Big(\frac{\partial V}{\partial x}\Big)^2\Big]\frac{\partial V}{\partial x}\frac{\partial^2 V}{\partial x\partial t}dx$$
$$+\int_0^1 a(S)\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x\partial t}\right)^2 dx=0.$$

Сложив эти тождества и проведя простые преобразования, будем иметь

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\left\|\frac{\partial U}{\partial t}\right\|^2+\left\|\frac{\partial V}{\partial t}\right\|^2\right)+\frac{1}{4}\int_0^1 a'(S)\frac{\partial}{\partial t}\Big[\Big(\frac{\partial U}{\partial x}\Big)^4+\Big(\frac{\partial V}{\partial x}\Big)^4\Big]dx$$
$$+\frac{1}{2}\int_0^1 a'(S)\Big[\Big(\frac{\partial V}{\partial x}\Big)^2\frac{\partial}{\partial t}\Big(\frac{\partial U}{\partial x}\Big)^2+\Big(\frac{\partial U}{\partial x}\Big)^2\frac{\partial}{\partial t}\Big(\frac{\partial V}{\partial x}\Big)^2\Big]dx$$
$$+\int_0^1 a(S)\Big[\Big(\frac{\partial^2 U}{\partial x\partial t}\Big)^2+\Big(\frac{\partial^2 V}{\partial x\partial t}\Big)^2\Big]dx=0,$$

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\left\|\frac{\partial U}{\partial t}\right\|^2+\left\|\frac{\partial V}{\partial t}\right\|^2\right)+\frac{1}{4}\int_0^1 a'(S)\frac{\partial}{\partial t}\Big[\Big(\frac{\partial U}{\partial x}\Big)^4+\Big(\frac{\partial V}{\partial x}\Big)^4\Big]dx$$
$$+\frac{1}{2}\int_0^1 a'(S)\frac{\partial}{\partial t}\Big[\Big(\frac{\partial U}{\partial x}\Big)^2\Big(\frac{\partial V}{\partial x}\Big)^2\Big]dx+\int_0^1 a(S)\Big[\Big(\frac{\partial^2 U}{\partial x\partial t}\Big)^2+\Big(\frac{\partial^2 V}{\partial x\partial t}\Big)^2\Big]dx=0,$$

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\left\|\frac{\partial U}{\partial t}\right\|^2+\left\|\frac{\partial V}{\partial t}\right\|^2\right)+\int_0^1 a(S)\Big[\Big(\frac{\partial^2 U}{\partial x\partial t}\Big)^2+\Big(\frac{\partial^2 V}{\partial x\partial t}\Big)^2\Big]dx$$
$$+\frac{1}{4}\int_0^1 a'(S)\frac{\partial}{\partial t}\Big\{\Big[\Big(\frac{\partial U}{\partial x}\Big)^2+\Big(\frac{\partial V}{\partial x}\Big)^2\Big]^2\Big\}dx=0.$$

Проинтегрируем полученное тождество по промежутку $(0,t)$:

$$\frac{1}{2}\left(\left\|\frac{\partial U}{\partial t}\right\|^2+\left\|\frac{\partial V}{\partial t}\right\|^2\right)-\frac{1}{2}\left(\left\|\frac{\partial U}{\partial t}\right\|^2+\left\|\frac{\partial V}{\partial t}\right\|^2\right)\Big|_{t=0}$$
$$+\int_0^t\int_0^1 a(S)\Big[\Big(\frac{\partial^2 U}{\partial x\partial \tau}\Big)^2+\Big(\frac{\partial^2 V}{\partial x\partial \tau}\Big)^2\Big]dxd\tau+\frac{1}{4}\int_0^1 a'(S)\Big[\Big(\frac{\partial U}{\partial x}\Big)^2+\Big(\frac{\partial V}{\partial x}\Big)^2\Big]^2dx$$
$$-\frac{1}{4}\int_0^1 a'(S)\Big[\Big(\frac{\partial U}{\partial x}\Big)^2+\Big(\frac{\partial V}{\partial x}\Big)^2\Big]^2dx\Big|_{t=0}$$
$$-\frac{1}{4}\int_0^t\int_0^1 a''(S)\Big[\Big(\frac{\partial U}{\partial x}\Big)^2+\Big(\frac{\partial V}{\partial x}\Big)^2\Big]^3dxd\tau=0.$$

Учитывая начальное условие (2.3) и ограничения на функцию $a = a(S)$, получим

$$\int_0^t \int_0^1 \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial \tau}\right)^2 dx d\tau + \int_0^t \int_0^1 \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial \tau}\right)^2 dx d\tau \le C.$$

Отсюда

$$\int_0^t \left\|\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial \tau}\right\|^2 d\tau \le C, \quad \int_0^t \left\|\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial \tau}\right\|^2 d\tau \le C. \tag{2.11}$$

Окончательно из полученных неравенств (2.8)–(2.11) вытекает, что

$$\int_0^t \left\|\frac{\partial U}{\partial x}\right\|^2 d\tau \le C, \quad \int_0^t \left|\frac{d}{d\tau}\left\|\frac{\partial U}{\partial x}\right\|^2\right| d\tau \le C,$$

$$\int_0^t \left\|\frac{\partial V}{\partial x}\right\|^2 d\tau \le C, \quad \int_0^t \left|\frac{d}{d\tau}\left\|\frac{\partial V}{\partial x}\right\|^2\right| d\tau \le C.$$

Эти априорные оценки справедливы для любого t, поэтому, применяя рассуждения работ [18; 19, с. 101–103], получаем

$$\left\|\frac{\partial U(\cdot,t)}{\partial x}\right\| \to 0, \quad \left\|\frac{\partial V(\cdot,t)}{\partial x}\right\| \to 0 \quad \text{при } t \to \infty.$$

Таким образом, справедлива

Теорема 2.1. *Если* $a(S) \ge a_0 = \mathrm{const} > 0$, $a'(S) \ge 0$, $a''(S) \le 0$, $U_0, V_0 \in W_2^2(0,1)$, $U_0(0) = V_0(0) = U_0(1) = V_0(1) = 0$, *то для решения задачи* (2.1)–(2.3) *имеют место следующие асимптотические формулы:*

$$\|U(\cdot,t)\|_{W_2^1(0,1)} \to 0, \quad \|V(\cdot,t)\|_{W_2^1(0,1)} \to 0 \quad \textit{при } t \to \infty. \tag{2.12}$$

Соотношение (2.12) доказывает стабилизацию нестационарного решения задачи (2.1)–(2.3), но не дает информации о скорости сходимости.

§ 3. Оценка порядка сходимости в норме пространства W_2^1

Перейдем к оценке порядка сходимости асимптотического поведения решения задачи (2.1)–(2.3). Точнее, покажем что сходимость в соотношении (2.12) имеет экспоненциальный характер. В этом параграфе получена также асимптотика с указанием порядка для $\|\partial U/\partial t\|$ и $\|\partial V/\partial t\|$.

Сформулируем основную теорему настоящего параграфа.

Теорема 3.1. *Если* $a(S) \ge a_0 = \mathrm{const} > 0$, $a'(S) \ge 0$, $a''(S) \le 0$, $U_0, V_0 \in W_2^2(0,1)$, $U_0(0) = V_0(0) = U_0(1) = V_0(1) = 0$, *то для решения задачи* (2.1)–(2.3) *справедлива следующая оценка:*

$$\left\|\frac{\partial U}{\partial x}\right\| + \left\|\frac{\partial U}{\partial t}\right\| + \left\|\frac{\partial V}{\partial x}\right\| + \left\|\frac{\partial V}{\partial t}\right\| \le C \exp\left(-\frac{a_0}{2} t\right).$$

Для доказательства этой теоремы получим необходимые априорные оценки.

Лемма 3.1. *Если* $a(S) \geq a_0 = \mathrm{const} > 0$, $a'(S) \geq 0$, $a''(S) \leq 0$, $U_0, V_0 \in W_2^2(0,1)$, $U_0(0) = V_0(0) = U_0(1) = V_0(1) = 0$, *то для решения задачи* (2.1)–(2.3) *справедлива оценка*

$$\exp(a_0 t)\left[\sigma_1(\|U\|^2 + \|V\|^2) + \sigma_2\left(\left\|\frac{\partial U}{\partial x}\right\|^2 + \left\|\frac{\partial V}{\partial x}\right\|^2\right) + \sigma_3\left(\left\|\frac{\partial U}{\partial t}\right\|^2 + \left\|\frac{\partial V}{\partial t}\right\|^2\right)\right]$$
$$+ \sigma_4\left(\int\limits_0^t \exp(a_0\tau)\left\|\frac{\partial U}{\partial x}\right\|^2 d\tau + \int\limits_0^t \exp(a_0\tau)\left\|\frac{\partial V}{\partial x}\right\|^2 d\tau\right) \leq C,$$

где σ_1–σ_4 — *положительные постоянные.*

Доказательство. Умножим первое уравнение системы (2.1) на $\partial U/\partial t$ и проинтегрируем по области $(0,1)$. Используя формулу интегрирования по частям и учитывая краевые условия (2.2), получаем

$$\left\|\frac{\partial U}{\partial t}\right\|^2 + \frac{1}{2}\int\limits_0^1 a(S)\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 dx = 0. \tag{3.1}$$

Аналогично

$$\left\|\frac{\partial V}{\partial t}\right\|^2 + \frac{1}{2}\int\limits_0^1 a(S)\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 dx = 0. \tag{3.2}$$

Продифференцируем первое уравнение системы (2.1) по переменной t:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial a(S)}{\partial t}\frac{\partial U}{\partial x} + a(S)\frac{\partial^2 U}{\partial t \partial x}\right] = 0, \tag{3.3}$$

и умножим полученное скалярно на U:

$$\int\limits_0^1 \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} U\,dx + \int\limits_0^1 \frac{\partial a(S)}{\partial t}\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 dx + \frac{1}{2}\int\limits_0^1 a(S)\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 dx = 0. \tag{3.4}$$

Аналогично

$$\int\limits_0^1 \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} V\,dx + \int\limits_0^1 \frac{\partial a(S)}{\partial t}\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 dx + \frac{1}{2}\int\limits_0^1 a(S)\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 dx = 0. \tag{3.5}$$

Из тождеств (3.1), (3.2), (3.4) и (3.5) следует, что

$$\int\limits_0^1 \left(\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} U + \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} V\right) dx + \left(\left\|\frac{\partial U}{\partial t}\right\|^2 + \left\|\frac{\partial V}{\partial t}\right\|^2\right)$$
$$+ \int\limits_0^1 a(S)\frac{\partial}{\partial t}\left[\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2\right] dx + \int\limits_0^1 \frac{\partial a(S)}{\partial t}\left[\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2\right] dx = 0.$$

С учетом равенства

$$\int\limits_0^1 \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} W\,dx + \left\|\frac{\partial W}{\partial t}\right\|^2 = \frac{1}{2}\frac{d^2}{dt^2}\|W\|^2,$$

где W — произвольная функция, предыдущее тождество примет вид

$$\frac{1}{2}\frac{d^2}{dt^2}(\|U\|^2+\|V\|^2)+\frac{d}{dt}\int\limits_0^1 a(S)\left[\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2\right]dx=0. \tag{3.6}$$

Умножим уравнения (3.3) на $\partial U/\partial t$ и проинтегрируем полученное тождество по $(0,1)$. Используя опять формулу интегрирования по частям, краевые условия (2.2) и неравенство Пуанкаре — Фридрихса, получаем

$$\frac{d}{dt}\left\|\frac{\partial U}{\partial t}\right\|^2+2a_0\left\|\frac{\partial U}{\partial t}\right\|^2+\frac{1}{2}\int\limits_0^1 a'(S)\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^4dx+\int\limits_0^1 a'(S)\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2dx\le 0. \tag{3.7}$$

Аналогично

$$\frac{d}{dt}\left\|\frac{\partial V}{\partial t}\right\|^2+2a_0\left\|\frac{\partial V}{\partial t}\right\|^2+\frac{1}{2}\int\limits_0^1 a'(S)\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^4dx+\int\limits_0^1 a'(S)\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2dx\le 0. \tag{3.8}$$

Из неравенств (3.7) и (3.8) следует, что

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\left(\left\|\frac{\partial U}{\partial t}\right\|^2+\left\|\frac{\partial V}{\partial t}\right\|^2\right)&+2a_0\left(\left\|\frac{\partial U}{\partial t}\right\|^2+\left\|\frac{\partial V}{\partial t}\right\|^2\right)\\&+\frac{1}{2}\int\limits_0^1 a'(S)\frac{\partial}{\partial t}\left[\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^4+\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^4\right]dx\\&+\int\limits_0^1 a'(S)\frac{\partial}{\partial t}\left[\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2\right]dx\le 0.\end{aligned} \tag{3.9}$$

Умножим (2.6), (2.7) и (3.6) на α, β и γ соответственно, где α,β,γ — положительные постоянные. Суммируя полученные соотношения и неравенство (3.9), приходим к тому, что

$$\begin{aligned}\frac{\alpha+\beta}{2}\frac{d}{dt}(\|U\|^2+\|V\|^2)&+\alpha\int\limits_0^1 a(S)\left[\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2\right]dx\\&+\beta a_0(\|U\|^2+\|V\|^2)+\frac{\gamma}{2}\frac{d^2}{dt^2}(\|U\|^2+\|V\|^2)\\&+\gamma\frac{d}{dt}\int\limits_0^1 a(S)\left[\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2\right]dx+\frac{d}{dt}\left(\left\|\frac{\partial U}{\partial t}\right\|^2+\left\|\frac{\partial V}{\partial t}\right\|^2\right)\\&+2a_0\left(\left\|\frac{\partial U}{\partial t}\right\|^2+\left\|\frac{\partial V}{\partial t}\right\|^2\right)+\frac{1}{2}\int\limits_0^1 a'(S)\frac{\partial}{\partial t}\left[\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^4+\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^4\right]dx\\&+\int\limits_0^1 a'(S)\frac{\partial}{\partial t}\left[\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2\right]dx\le 0.\end{aligned}$$

После несложных преобразований имеем

$$
\begin{gathered}
\frac{\alpha+\beta}{2}\left[\frac{d}{dt}(\|U\|^2+\|V\|^2)+\frac{2\beta a_0}{\alpha+\beta}(\|U\|^2+\|V\|^2)\right] \\
+\gamma\left\{\frac{d}{dt}\int\limits_0^1 a(S)\left[\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2\right]dx++\frac{\alpha}{\gamma}\int\limits_0^1 a(S)\left[\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2\right]dx\right\} \\
+\frac{d}{dt}\left(\left\|\frac{\partial U}{\partial t}\right\|^2+\left\|\frac{\partial V}{\partial t}\right\|^2\right)+2a_0\left(\left\|\frac{\partial U}{\partial t}\right\|^2+\left\|\frac{\partial V}{\partial t}\right\|^2\right) \\
+\frac{\gamma}{2}\frac{d^2}{dt^2}(\|U\|^2+\|V\|^2)+\frac{1}{2}\int\limits_0^1 a'(S)\frac{\partial}{\partial t}\left\{\left[\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2\right]^2\right\}dx\le 0. \qquad (3.10)
\end{gathered}
$$

Допустим, что $\frac{2\beta a_0}{\alpha+\beta}=\frac{\alpha}{\gamma}=a_0$, тогда $\alpha=\beta=\frac{\alpha+\beta}{2}=a_0\gamma$. Учитывая эти соотношения, запишем (3.10) в виде

$$
\begin{gathered}
a_0\gamma\frac{d}{dt}[\exp(a_0t)(\|U\|^2+\|V\|^2)]+\gamma\frac{d}{dt}\left\{\exp(a_0t)\int\limits_0^1 a(S)\left[\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2\right]dx\right\} \\
+\frac{d}{dt}\left[\exp(a_0t)\left(\left\|\frac{\partial U}{\partial t}\right\|^2+\left\|\frac{\partial V}{\partial t}\right\|^2\right)\right]+\exp(a_0t)\left\{a_0\left(\left\|\frac{\partial U}{\partial t}\right\|^2+\left\|\frac{\partial V}{\partial t}\right\|^2\right)\right. \\
\left.+\frac{\gamma}{2}\frac{d^2}{dt^2}(\|U\|^2+\|V\|^2)+\frac{1}{2}\int\limits_0^1 a'(S)\frac{\partial}{\partial t}\left\{\left[\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2\right]^2\right\}dx\right\}\le 0.
\end{gathered}
$$

Интегрируя полученное неравенство по отрезку $(0,t)$ и учитывая начальные условия (2.3), получаем

$$
\begin{gathered}
a_0\gamma\exp(a_0t)(\|U\|^2+\|V\|^2)+\gamma\exp(a_0t)\int\limits_0^1 a(S)\left[\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2\right]dx \\
+\exp(a_0t)\left(\left\|\frac{\partial U}{\partial t}\right\|^2+\left\|\frac{\partial V}{\partial t}\right\|^2\right)+a_0\int\limits_0^t\exp(a_0\tau)\left(\left\|\frac{\partial U}{\partial \tau}\right\|^2+\left\|\frac{\partial V}{\partial \tau}\right\|^2\right)d\tau \\
+\frac{\gamma}{2}\int\limits_0^t\exp(a_0\tau)\frac{d^2}{d\tau^2}(\|U\|^2+\|V\|^2)d\tau \\
+\frac{1}{2}\int\limits_0^t\exp(a_0\tau)\int\limits_0^1 a'(S)\frac{\partial}{\partial \tau}\left\{\left[\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2\right]^2\right\}dxd\tau\le C. \qquad (3.11)
\end{gathered}
$$

Отметим, что справедливо соотношение

$$
\begin{gathered}
\int\limits_0^t\exp(a_0\tau)\int\limits_0^1 a'(S)\frac{\partial}{\partial \tau}\left\{\left[\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2\right]^2\right\}dxd\tau \\
=\exp(a_0t)\int\limits_0^1 a'(S)\left[\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2\right]^2dx
\end{gathered}
$$

$$
\begin{aligned}
&- \int_0^1 a'(S)\left[\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2\right]^2 dx\Big|_{t=0} \\
&- a_0 \int_0^t \exp(a_0\tau) \int_0^1 a'(S)\left[\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2\right]^2 dxd\tau \\
&- \int_0^t \exp(a_0\tau) \int_0^1 a''(S)\left[\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2\right]^3 dxd\tau \\
&\geq -a_0 \int_0^t \exp(a_0\tau) \int_0^1 a'(S)\left[\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2\right]^2 dxd\tau - C, \qquad (3.12)
\end{aligned}
$$

а также тождество

$$
\begin{aligned}
\int_0^t \exp(a_0\tau)\frac{d^2}{d\tau^2}\|U\|^2 d\tau &= \exp(a_0 t)\frac{d}{dt}\|U\|^2 - a_0 \int_0^t \exp(a_0\tau)\frac{d}{d\tau}\|U\|^2 d\tau \\
&- \frac{d}{dt}\|U\|^2\Big|_{t=0} = 2\exp(a_0 t)\int_0^1 U\frac{\partial U}{\partial t}dx - a_0\exp(a_0 t)\|U\|^2 \\
&+ a_0^2 \int_0^t \exp(a_0\tau)\|U\|^2 d\tau + a_0\|U_0\|^2 - \frac{d}{dt}\|U\|^2\Big|_{t=0}.
\end{aligned}
$$

Аналогично

$$
\begin{aligned}
\int_0^t \exp(a_0\tau)\frac{d^2}{d\tau^2}\|V\|^2 d\tau &= 2\exp(a_0 t)\int_0^1 V\frac{\partial V}{\partial t}dx - a_0\exp(a_0 t)\|V\|^2 \\
&+ a_0^2 \int_0^t \exp(a_0\tau)\|V\|^2 d\tau + a_0\|V_0\|^2 - \frac{d}{dt}\|V\|^2\Big|_{t=0}.
\end{aligned}
$$

Применяя в последних тождествах неравенство Коши, получаем

$$
\begin{aligned}
\int_0^t \exp(a_0\tau)\frac{d^2}{d\tau^2}(\|U\|^2 + \|V\|^2)d\tau &\geq -(\varepsilon + a_0)\exp(a_0 t)(\|U\|^2 + \|V\|^2) \\
&- \frac{1}{\varepsilon}\exp(a_0 t)\left(\left\|\frac{\partial U}{\partial t}\right\|^2 + \left\|\frac{\partial V}{\partial t}\right\|^2\right) - C. \qquad (3.13)
\end{aligned}
$$

Сложим равенства (3.4) и (3.5), умножим полученное на $\mu\exp(a_0 t)$, где

$\mu = \text{const} > 0$, и проинтегрируем по отрезку $(0, t)$:

$$\mu \int_0^t \exp(a_0\tau) \int_0^1 \left(\frac{\partial^2 U}{\partial \tau^2} U + \frac{\partial^2 V}{\partial \tau^2} V \right) dx d\tau$$

$$+ \mu \int_0^t \exp(a_0\tau) \int_0^1 a'(S) \left[\left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial x} \right)^2 \right]^2 dx d\tau$$

$$+ \frac{\mu}{2} \int_0^t \exp(a_0\tau) \int_0^1 a(S) \frac{\partial}{\partial \tau} \left[\left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial x} \right)^2 \right] dx d\tau = 0.$$

Использование формулы интегрирования по частям дает

$$\mu \exp(a_0 t) \int_0^1 \frac{\partial U}{\partial t} U dx - a_0 \mu \int_0^t \exp(a_0\tau) \int_0^1 \frac{\partial U}{\partial \tau} U dx d\tau - \mu \int_0^t \exp(a_0\tau) \left\| \frac{\partial U}{\partial \tau} \right\|^2 d\tau$$

$$+ \mu \exp(a_0 t) \int_0^1 \frac{\partial V}{\partial t} V dx - a_0 \mu \int_0^t \exp(a_0\tau) \int_0^1 \frac{\partial V}{\partial \tau} V dx d\tau - \mu \int_0^t \exp(a_0\tau) \left\| \frac{\partial V}{\partial \tau} \right\|^2 d\tau$$

$$+ \mu \int_0^t \exp(a_0\tau) \int_0^1 a'(S) \left[\left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial x} \right)^2 \right]^2 dx d\tau$$

$$+ \frac{\mu}{2} \int_0^t \exp(a_0\tau) \int_0^1 a(S) \frac{\partial}{\partial \tau} \left[\left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial x} \right)^2 \right] dx d\tau = C.$$

Применяя в последнем тождестве неравенство Коши и принимая во внимание соотношения (2.6), (3.1) и (3.2), имеем

$$- \varepsilon' \mu \exp(a_0 t)(\|U\|^2 + \|V\|^2) - \frac{\mu \exp(a_0 t)}{4\varepsilon'} \left(\left\| \frac{\partial U}{\partial t} \right\|^2 + \left\| \frac{\partial V}{\partial t} \right\|^2 \right)$$

$$+ a_0 \mu \int_0^t \exp(a_0\tau) \int_0^1 a(S) \left[\left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial x} \right)^2 \right] dx d\tau$$

$$- \mu \int_0^t \exp(a_0\tau) \left(\left\| \frac{\partial U}{\partial \tau} \right\|^2 + \left\| \frac{\partial V}{\partial \tau} \right\|^2 \right) d\tau$$

$$+ \mu \int_0^t \exp(a_0\tau) \int_0^1 a'(S) \left[\left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial x} \right)^2 \right]^2 dx d\tau$$

$$- \mu \int_0^t \exp(a_0\tau) \left(\left\| \frac{\partial U}{\partial \tau} \right\|^2 + \left\| \frac{\partial V}{\partial \tau} \right\|^2 \right) d\tau \le C. \quad (3.14)$$

Из леммы 2.1 при $\eta > 0$ следует, что

$$\eta \exp(a_0 t)(\|U\|^2 + \|V\|^2) \le C. \quad (3.15)$$

Комбинируя неравенства (3.11)–(3.15), получаем

$$\exp(a_0 t)\Bigg[\left(a_0\gamma - \frac{\gamma(\varepsilon + a_0)}{2} - \mu\varepsilon' + \eta\right)(\|U\|^2 + \|V\|^2) + \gamma a_0\left(\left\|\frac{\partial U}{\partial x}\right\|^2 + \left\|\frac{\partial V}{\partial x}\right\|^2\right)$$

$$+\left(1 - \frac{\gamma}{2\varepsilon} - \frac{\mu}{4\varepsilon'}\right)\left(\left\|\frac{\partial U}{\partial t}\right\|^2 + \left\|\frac{\partial V}{\partial t}\right\|^2\right)\Bigg] + (a_0 - 2\mu)\int\limits_0^t \exp(a_0\tau)\left(\left\|\frac{\partial U}{\partial \tau}\right\|^2 + \left\|\frac{\partial V}{\partial \tau}\right\|^2\right)d\tau$$

$$+\left(\mu - \frac{a_0}{2}\right)\int\limits_0^t \exp(a_0\tau)\int\limits_0^1 a'(S)\left[\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2\right]^2 dx\,d\tau$$

$$+ a_0^2\mu\int\limits_0^t \exp(a_0\tau)\left(\left\|\frac{\partial U}{\partial x}\right\|^2 + \left\|\frac{\partial V}{\partial x}\right\|^2\right)d\tau \le C.$$

Для завершения доказательства леммы 3.1 осталось проверить, что коэффициенты, стоящие в левой части полученного неравенства, можно выбрать соответствующим образом. Действительно, этого можно, например, добиться, подбирая свободные параметры следующим образом: $\mu = a_0/2$, $\varepsilon = \varepsilon' = a_0$, $\gamma < 7a_0/4$ и $\eta \ge a_0^2/2$.

Таким образом, лемма 3.1 доказана.

Из леммы 3.1 следует справедливость теоремы 3.1.

Из априорных оценок, полученных в настоящей работе, с учетом метода компактности и модифицированного варианта метода Галеркина [5, 6] вытекает справедливость следующего утверждения.

Теорема 3.2. *Если* $a(S) \ge a_0 = \text{const} > 0$, $a'(S) \ge 0$, $a''(S) \le 0$, $U_0, V_0 \in W_2^2(0,1)$, $U_0(0) = V_0(0) = U_0(1) = V_0(1) = 0$, *то существует единственное решение* (U, V) *задачи* (2.1)–(2.3), *обладающее свойствами:*

$$U, V \in L_2\big(0,\infty; \overset{\circ}{W}{}_2^1(0,1) \cap W_2^2(0,1)\big), \quad U_{xt}, V_{xt} \in L_2(0,\infty; L_2(0,1)).$$

Отметим, что в конечном цилиндре $(0,1)\times(0,T)$ аналогичная теорема для случая $a(S) = 1+S$ доказана в работе [2], для случая $a(S) = (1+S)^p$, $0 < p \le 1$ — в [4], а для многомерного пространственного варианта — в [7].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Электродинамика сплошных сред. М.: Гостехтеориздат, 1958.
2. *Гордезиани Д. Г., Джангвеладзе Т. А., Коршия Т. К.* О существовании и единственности решения одного класса нелинейных параболических задач // Дифференц. уравнения. 1983. Т. 19, № 7. С. 1197–1207.
3. *Гордезиани Д. Г., Джангвеладзе Т. А., Коршия Т. К.* Об одном классе нелинейных параболических уравнений, возникающих в задачах диффузии электромагнитного поля // Труды ИПМ им. И. Н. Векуа ТГУ. 1983. Т. 13. С. 7–35.
4. *Джангвеладзе Т. А.* Первая краевая задача для одного нелинейного уравнения параболического типа // Докл. АН СССР. 1983. Т. 269, № 4. С. 839–842.
5. *Вишик М. И.* О разрешимости краевых задач для квазилинейных параболических уравнений высших порядков // Мат. сб. 1962. Т. 59, № 101(доп.). С. 289–325.
6. *Лионс Ж.-Л.* Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. М.: Мир, 1972.
7. *Джангвеладзе Т. А.* Об одном нелинейном интегродифференциальном уравнении параболического типа // Дифференц. уравнения. 1985. Т. 21, № 1. С. 41–46.

8. *Jangveladze T. A., Kiguradze Z. V.* The asymptotic behavior of the solution of one nonlinear integro-differential parabolic equation // Rep. Enl. Sess. Sem. I. Vekua Inst. Appl. Math. 1995. V. 10, N 1. P. 36–38.

9. *Лаптев Г. И.* Квазилинейные параболические уравнения, содержащие в коэффициентах оператор Вольтерра // Мат. сб. 1988. Т. 136, № 4. С. 530–540.

10. *Лаптев Г. И.* Математические особенности задач о проникновении магнитного поля в вещество // Журн. вычислит. математики и мат. физики. 1988. Т. 28, № 9. С. 1332–1345.

11. *Лаптев Г. И.* Математические особенности задач о проникновении магнитного поля в вещество для квазистационарного приближения // Изв. вузов. Математика. 1989. № 7. С. 10–12.

12. *Джангвеладзе Т. А., Любимов Б. Я., Коршия Т. К.* О численном решении одного класса неизотермических задач диффузии электромагнитного поля // Труды ИПМ им. И. Н. Векуа ТГУ. 1986. Т. 18. С. 5–47.

13. *Long N. T., Dinh A. P. N.* Nonlinear parabolic problem associated with the penetration of a magnetic field into a substance // Math. Meth. Appl. Sci. 1993. V. 16, N 4. P. 281–295.

14. *Jangveladze T. A.* On one class of nonlinear integro-differential parabolic equations // Rep. Sem. I. Vekua Inst. Appl. Math. 1997. V. 23. P. 51–87.

15. *Jangveladze T. A., Kiguradze Z. V.* Estimates of a stabilization rate as $t \to \infty$ of solutions of a nonlinear integro-differential equation // Georgian Math. J. 2002. V. 9, N 1. P. 57–70.

16. *Jangveladze T. A., Kiguradze Z. V.* Estimates of a stabilization rate as $t \to \infty$ of solutions of a nonlinear integro-differential diffusion system // J. Appl. Math. Inform. Mech. 2003. V. 8, N 2. P. 1–19.

17. *Kiguradze Z. V.* The asymptotic behavior of the solutions of one nonlinear integro-differential model // Sem. of I. Vekua Inst. of Appl. Math., REPORTS. 2004. V. 30. P. 21–31.

18. *Кажихов А. В.* О стабилизации решений начально-краевой задачи для уравнений баротропной вязкой жидкости // Дифференц. уравнения. 1979. Т. 15, № 4. С. 662–667.

19. *Антонцев С. Н., Кажихов А. В., Монахов В. Н.* Краевые задачи механики неоднородных жидкостей. Новосибирск: Наука, 1983.

Статья поступила 1 апреля 2005 г., окончательный вариант — 24 января 2006 г.

Джангвеладзе Темур Амиранович, *Кигурадзе Зураб Важаевич*
Тбилисский гос. университет им. И. Джавахишвили,
ул. Университетская, 2, Тбилиси 0186, Грузия
tjangv@yahoo.com, zkigur@yahoo.com