Сибирский математический журнал
Сентябрь—октябрь, 2005. Том 46, № 5

УДК 533.70+533.6.0118

КАЧЕСТВЕННЫЕ СВОЙСТВА ОДНОЙ КИНЕТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ БИНАРНОГО ГАЗА

Ю. Н. Григорьев, М. И. Омельянчук

Аннотация: Рассматривается система кинетических уравнений с одномерным скоростным пространством. Система представляет простую математическую модель, описывающую на молекулярном уровне эволюцию двухкомпонентной смеси газов. Исследованы качественные свойства ее решений, в частности, законы сохранения, спектр линеаризованной задачи, в пространственно однородном случае представлена наиболее широкая алгебра Ли допустимых операторов и построены в замкнутой форме некоторые точные решения. Указаны способы построения численных схем, консервативных в смысле выполнения дискретных законов сохранения концентраций компонент и энергии.

Ключевые слова: система кинетических уравнений типа Больцмана, преобразование Фурье, пространственно однородный случай, спектральные свойства, инвариантные решения, дискретная модель, законы сохранения.

Памяти Тадея Ивановича Зеленяка

Введение

Кинетическое уравнение Больцмана и его обобщение на многокомпонентные газовые смеси являются основой математического аппарата кинетической теории газов [1]. Чрезвычайная сложность этих уравнений в недалеком прошлом заставляла искать упрощенные подходы к решению задач о течениях газов при сильных отклонениях от термодинамического равновесия, например, в процессах с высоким энергетическим порогом в сильных ударных волнах, в газодинамических лазерах, на поверхностях гиперзвуковых летательных аппаратов [2].

Современный уровень развития вычислительной техники позволяет реально перейти к математическому моделированию подобных процессов непосредственно на основе уравнений Больцмана. В частности, это можно осуществить с использованием схемы расщепления, предложенной в [3] для газов с максвелловским потенциалом взаимодействия. При этом специфика обозначенных физических задач требует построения консервативных численных методов, обеспечивающих высокую точность расчетов для достаточно протяженного диапазона энергий молекул.

В данной работе изучаются некоторые качественные свойства системы кинетических уравнений, являющейся математической моделью малой размерности системы уравнений Больцмана бинарной газовой смеси. В качестве модели

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 05–01–00359).

простого газа такое уравнение впервые введено в [4]. Его математические свойства и инвариантные решения изучались в работах [5, 6–9] (см. также обзор в [10]). В [3] это уравнение использовалось при отработке численной схемы для задачи релаксации пространственно однородного газа.

Чтобы получить обозримые результаты, необходимые для построения и тестирования численных схем, мы рассматриваем систему двух уравнений и простейшую модель молекулярного взаимодействия, на которых можно воспроизвести основные математические особенности кинетики многокомпонентной смеси. Однако бóльшая часть результатов статьи допускает распространение на подобные системы произвольного числа уравнений и более сложные случаи молекулярного взаимодействия.

1. Основные уравнения и их свойства

Система кинетических уравнений, обобщающая предложенную в [11] модель на случай бинарного газа, записывается в виде

$$\frac{\partial f_i(t,v_i,x)}{\partial t} + v_i\frac{\partial f_i}{\partial x} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} dw_i \int\limits_{-\pi}^{\pi} d\theta g_{ii}(\theta)[f_i(v_i')f_i(w_i') - f_i(v_i)f_i(w_i)]$$

$$+ \int\limits_{-\infty}^{\infty} dw_j \int\limits_{-\pi}^{\pi} d\theta g_{ij}(\theta)[f_i(v_i')f_i(w_j') - f_i(v_i)f_j(w_j)] \equiv \sum_{(j)} J(f_i,f_j), \quad i = 1,2. \tag{1.1}$$

Здесь $f_i(t,v_i,x)$ — функция распределения i-й компоненты, $t \in \mathbb{R}^1_+$, $v_i, x \in \mathbb{R}^1$, а $g_{ij}(\theta) = g_{ji}(\theta)$, $g_{ii}(\theta)$ — неотрицательные функции рассеяния с условиями нормировки

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} g_{ii}(\theta)\,d\theta = \int\limits_{-\pi}^{\pi} g_{ij}(\theta)\,d\theta = 1.$$

Для сокращения записи в подынтегральных выражениях в правой части (1.1) оставлены только скоростные переменные функций распределения, которыми эти функции различаются. Процессу «соударения» модельных молекул $(v_i,w_j) \to (v_i',w_j')$ соответствует ортогональное преобразование поворота на плоскости:

$$(v_i',w_j')' = A(v_i,w_i)', \quad A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

При соударениях имеют место элементарные законы сохранения числа частиц (пар) и «энергий»: $v_i^2 + w_j^2 = v_i'^2 + w_j'^2$.

Пространственно однородные равновесные решения (1.1), которые достигаются при $t \to \infty$, будем рассматривать в виде

$$f_{i,0} = \frac{n_i}{\sqrt{2\pi}} e^{-v_i^2/2}, \quad i = 1,2, \tag{1.2}$$

где $n_i = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f_{i,0}\,dv_i$ — концентрация частиц сорта i.

Свойства симметрии функционалов от правых частей системы (1.1) дает

Лемма 1. *Для произвольной функции $\psi(v_i)$, на которой функционал*

$$I(\psi(v_i)) \equiv I(\psi_i) = \sum_{(j)} \int\limits_{-\infty}^{\infty} dv_i\psi_i J(f_i,f_j)$$

ограничен, имеют место соотношения

$$I(\psi_i) = \frac{1}{2} \sum_{(j)} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_{-\pi}^{\pi} g_{ij}(\theta)(\psi_i - \psi_i')[f_i' f_j' - f_i f_j]\, dv_i dw_j d\theta, \tag{1.3}$$

$$I(\psi) = \sum_{(i)} I(\psi_i) = \frac{1}{4} \sum_{(i)} \sum_{(j)} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_{-\pi}^{\pi} g_{ij}(\theta)(\psi_i + \psi_j - \psi_i' - \psi_j')[f_i' f_j' - f_i f_j]\, dv_i dw_j d\theta, \tag{1.4}$$

$$I(\psi_i) = \frac{1}{2} \sum_{(j)} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_{-\pi}^{\pi} g_{ij}(\theta)(\psi_i' - \psi_i) f_i f_j\, dv_i dw_j d\theta, \tag{1.5}$$

где штрихи у функций означают, что эти функции зависят от штрихованных скоростных переменных, получаемых из исходных ортогональным преобразованием «соударения».

Доказательство. В функционале

$$I(\psi_i) = \frac{1}{2} \sum_{(j)} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \psi_i g_{ij}(\theta)[f_i' f_j' - f_i f_j]\, dv_i dw_j d\theta \tag{1.6}$$

выполним ортогональную замену скоростных переменных $(v_i, w_i)' = A'(v_i', w_i')'$ с матрицей $A' = A^{-1}$, поменяв местами штрихованные и нештрихованные переменные.

Так как якобиан преобразования равен единице, результат можно записать в виде

$$I(\psi_i) = \frac{1}{2} \sum_{(j)} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \psi_i' g_{ij}(\theta)[f_i f_j - f_i' f_j']\, dv_i dw_j d\theta.$$

Складывая это выражение с исходным выражением (1.6), приходим к (1.3).

Теперь, используя соотношение (1.3), запишем сумму

$$I(\psi) = \frac{1}{2} \sum_{(i)} \sum_{(j)} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_{-\pi}^{\pi} g_{ij}(\theta)(\psi_i - \psi_i')[f_i' f_j' - f_i f_j]\, dv_i dw_j d\theta.$$

Очевидно, что выражение в правой части не меняется при взаимной замене индексов i, j. Поэтому

$$I(\psi) = \frac{1}{2} \sum_{(i)} \sum_{(j)} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_{-\pi}^{\pi} g_{ij}(\theta)(\psi_j - \psi_j')[f_i' f_j' - f_i f_j]\, dv_j dw_j d\theta.$$

Складывая это выражение с предыдущим, убеждаемся в справедливости (1.4).

Для доказательства (1.5) рассмотрим равенство

$$\sum_{(j)} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_{-\pi}^{\pi} g_{ij}(\theta)\psi_i f_i' f'\, dv_i dw_j d\theta = \sum_{(j)} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_{-\pi}^{\pi} g_{ij}(\theta)\psi_i' f_i f_j\, dv_i dw_j d\theta,$$

полученное ортогональной заменой $(v_i, w_j)' = A'(v_i', w_j')'$ в левой части. Вычитая из обеих частей равенства интеграл

$$\sum_{(j)} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\pi}^{\pi} g_{ij}(\theta)\psi_i f_i f_j \, dv_i dw_j d\theta,$$

получаем формулу (1.5).

Рассмотрим пространственно однородный случай системы (1.1):

$$\frac{\partial f_i(t, v_i)}{\partial t} = \sum_{(j)} J(f_i, f_j). \tag{1.7}$$

Следствие. *Для пространственно однородной системы* (1.7) *в случае, когда функции распределения не зависят от переменной* x, *имеют место законы сохранения концентраций и энергии:*

$$\sum_{(i)} \int_{-\infty}^{\infty} f_i(t, v_i) \, dv_i = \sum_{(i)} \int_{-\infty}^{\infty} f_{i,0}(v_i) \, dv_i = \sum_{(i)} n_i = 1, \tag{1.8}$$

$$\sum_{(i)} \int_{-\infty}^{\infty} v_i^2 f_i(t, v_i) \, dv_i = \sum_{(i)} \int_{-\infty}^{\infty} v_i^2 f_{i,0}(v_i) \, dv_i = 1. \tag{1.9}$$

Соотношения (1.8), (1.9) получаются интегрированием по скоростным переменным уравнений системы в пространственно однородном случае с функциями $\psi_i = 1, v_i^2$ и последующим суммированием по компонентам. Из свойства симметрии (1.4) и микроскопических законов сохранения следует, что

$$\frac{\partial}{\partial t} \sum_{(i)} \int_{-\infty}^{\infty} f_i(t, v_i) \, dv_i = 0, \quad \frac{\partial}{\partial t} \sum_{(i)} \int_{-\infty}^{\infty} v_i^2 f_i(t, v_i) \, dv_i = 0$$

для любого момента времени, а также в пределе при $t \to \infty$.

В системе (1.7) выполним преобразование Фурье по скоростным переменным. Прямое и обратное преобразования Фурье определим формулами

$$\varphi_i(k_i) = \int_{-\infty}^{\infty} f_i(v_i) e^{-2\pi i k_i v_i} \, dv_i, \tag{1.10}$$

$$f_i(v_i) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_i(k_i) e^{2\pi i k_i v_i} \, dk_i, \quad i = 1, 2. \tag{1.11}$$

Применив к системе (1.7) преобразование Фурье (1.10), перепишем интегралы от правой части с помощью соотношения (1.5) из леммы 1. В результате находим

$$\frac{\partial \varphi_i(t, k_i)}{\partial t} = \sum_{(j)} \int_{-\infty}^{\infty} dv_i \int_{-\infty}^{\infty} dw_i \int_{-\pi}^{\pi} d\theta g_{ij}(\theta) [e^{-2\pi i k_i v_i'} - e^{-2\pi i k_i v_i}] f_i(v_i) f_j(w_j)$$

$$= \sum_{(j)} \int_{-\pi}^{\pi} d\theta g_{ij}(\theta) \left[\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dv_i dw_j e^{-2\pi i k_i v_i'} f_i f_j - \int_{-\infty}^{\infty} dv_i e^{-2\pi i k_i v_i} f_i(v_i) \int_{-\infty}^{\infty} dw_j f_j(w_j) \right].$$

Из ортогонального преобразования «соударения» имеем $v_i' = v_i \cos\theta + w_j \sin\theta$. Окончательно получаем

$$\frac{\partial \varphi_i(t,k_i)}{\partial t} = \sum_{(j)} \int\limits_{-\pi}^{\pi} d\theta g_{ij}(\theta)[\varphi_i(k_i\cos\theta)\varphi_j(k_i\sin\theta) - \varphi_i(k_i)\varphi_j(0)]$$
$$= \sum_{(j)} G(\varphi_i,\varphi_j), \quad i = 1,2. \quad (1.12)$$

Преобразование Фурье равновесных решений имеет вид

$$\varphi_{i,0}(k_i) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f_{i,0} e^{-2\pi i k_i v_i}\, dv_i = \frac{n_i}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-v_i^2/2} e^{-\pi i k_i v_i}\, dv_i = n_i e^{-2\pi^2 k_i^2}. \quad (1.13)$$

Функции $\varphi_i(k_i,t)$ по терминологии теории вероятностей будем называть характеристическими.

Используя соотношения (1.8), (1.9) и формулы (1.10), выразим законы сохранения в терминах образов Фурье. Закон сохранения числа частиц примет вид

$$\sum_{(i)} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f_i(t,v_i)\, dv_i = \sum_{(i)} \varphi_i(t,0) = 1, \quad \varphi_i(t,0) = n_i. \quad (1.14)$$

Соответственно закон сохранения энергии выразится так:

$$\sum_{(i)} \int\limits_{-\infty}^{\infty} v_i^2 f_i(t,v_i)\, dv_i = -\sum_{(i)} \varphi_i''(0)\frac{1}{4\pi^2} = 1. \quad (1.15)$$

2. Спектральные свойства линеаризованной задачи

Рассмотрим линеаризованную в окрестности равновесных решений (1.13) систему (1.12). Положим

$$\varphi_i(t,k_i) = \varphi_{i,0}(1 + \psi_i(t,k_i)). \quad (2.1)$$

Подстановка (2.1) в уравнения (1.12) приводит к системе для функций ψ_i:

$$\frac{\partial \psi_i(t,k_i)}{\partial t} = \sum_{(j)} n_j \int\limits_{-\pi}^{\pi} g_{ij}(\theta)[\psi_i(k_i\cos\theta) + \psi_j(k_i\sin\theta) - \psi_i(k_i) - \psi_j(0)]\, d\theta, \quad i = 1,2. \quad (2.2)$$

Будем искать решение линеаризованной системы в виде степенных рядов

$$\psi_i(t,k_i) = \sum_{m=1}^{\infty} l_m^{(i)}(t)\frac{k_i^m}{m!}, \quad i = 1,2. \quad (2.3)$$

В пространстве скоростей это с точностью до нормирующих коэффициентов соответствует разложению решения по полиномам Эрмита [12]. Начало суммирования с $m = 1$ учитывает закон сохранения концентраций в форме (1.14), откуда следует (см. (2.1)) равенство $l_0^{(i)} = 0$. Дважды дифференцируя (2.1) по k_i, получаем, что закон сохранения энергии (1.15) приводит еще к одному ограничению вида $\sum\limits_{(i)} n_i l_2^{(i)} = 0$. Подставив ряды (2.3) в (2.2), приходим к однородной системе для коэффициентов разложения:

$$\frac{d\bar{l}_m}{dt} = A_m \bar{l}_m, \quad m = 1, 2, \dots,$$

где $\bar{l}_m = \big(l_m^{(1)}, l_m^{(2)}\big)'$, а матрица A_m выглядит следующим образом:

$$A_m = \begin{pmatrix} n_1\lambda_{11}^{(m)} + n_2\lambda_{12}^{(m)} & n_2\sigma_{12}^{(m)} \\ n_1\sigma_{21}^{(m)} & n_2\lambda_{22}^{(m)} + n_1\lambda_{21}^{(m)} \end{pmatrix}. \tag{2.4}$$

Здесь

$$\lambda_{ii}^{(m)} = \int\limits_{-\pi}^{\pi} g_{ii}(\theta)[\cos^m\theta + \sin^m\theta - 1 - \delta_{m0}]\, d\theta,$$

$$\lambda_{12}^{(m)} = \lambda_{21}^{(m)} = \int\limits_{-\pi}^{\pi} g_{12}(\theta)(\cos^m - 1)\, d\theta, \quad \sigma_{12}^{(m)} = \sigma_{21}^{(m)} = \int\limits_{-\pi}^{\pi} g_{12}(\theta)(\sin^m\theta - \delta_{m_0})\, d\theta.$$

В случае изотропного рассеяния, когда $g_{ij}(\theta) = \frac{\nu_{ij}}{2\pi}$, эти выражения вычисляются в явном виде:

$$\lambda_{ii}^{(m)} = \begin{cases} \nu_{ii}(2\alpha_k - 1), & m = 2k,\ k > 1, \\ -\nu_{ii}, & m = 2k+1,\ k = 1, 2\dots, \end{cases}$$

$$\sigma_{ij}^{(m)} = \begin{cases} \nu_{ij}\alpha_k, & m = 2k,\ k > 1, \\ 0, & m = 2k+1,\ k = 1, 2\dots, \end{cases}$$

$$\lambda_{ij}^{(m)} = \begin{cases} \nu_{ii}(\alpha_k - 1), & m = 2k,\ k > 1, \\ -\nu_{ij}, & m = 2k+1,\ k = 1, 2\dots, \end{cases}$$

где $\alpha_k = \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}$.

Лемма 2. 1. *Спектр линеаризованной задачи лежит на отрицательной полуоси.*

2. *Матрица A_2 имеет простое нулевое собственное значение с собственным вектором $\bar{l} = (a, a)'$.*

3. *Приведенные собственные значения имеют следующий вид. Для $m = 2k$*

$$\alpha_{1,2}^{(m)} = \frac{\mu_{1,2}^{(m)}}{|\lambda^{(m)}|} = -\frac{1}{2}\big(n_1\nu_{11} + n_2\nu_{22} + \delta_{12}^{(m)}\big) \pm \frac{1}{2}\sqrt{\big[n_2\nu_{22} - n_1\nu_{11} + \delta_{12}^{(m)}(n_1 - n_2)\big]^2 + 4n_1n_2\gamma_{12}^{2(m)}},$$

$$\delta_{12}^{(m)} = \frac{\nu_{12}(\alpha_k - 1)}{|2\alpha_k - 1|}, \quad \gamma_{12}^{(m)} = \frac{\nu_{12}\alpha_k}{|2\alpha_k - 1|}.$$

Для $m = 2k+1$

$$\alpha_1^{(m)} = -(n_1\nu_{11} + n_2\nu_{12}), \quad \alpha_2^{(m)} = -(n_2\nu_{22} + n_1\nu_{12}), \tag{2.5}$$

где

$$\lambda_m = \begin{cases} (1 - \delta_{m0})(2\alpha_k - 1), & m = 2k, \\ -1, & m = 2k+1, \end{cases}$$

— *собственные значения линеаризованной задачи в скалярном случае* [5].

4. *Матрицы* A_4 *и* A_6 *имеют единственные собственные значения, удовлетворяющие равенству* $\frac{\mu_1^{(4)}}{4} = \frac{\mu_1^{(6)}}{6}$ $\left(\alpha_1^{(4)} = \alpha_1^{(6)}\right)$, *тогда и только тогда, когда молекулярные параметры связаны соотношением*

$$n_2\nu_{22} - n_1\nu_{11} = (n_2 - n_1)\nu_{12}. \tag{2.6}$$

При этом нечетные собственные значения становятся кратными: $\alpha_1^{(m)} = \alpha_2^{(m)}$.

Доказательство. Для матриц A_m рассмотрим симметризующие преобразования подобия $\widetilde{A}_m = SA_mS^{-1}$ с матрицей $S = \mathrm{Diag}\left(n_1^{1/2}, n_1^{1/2}\right)$. Так как преобразование подобия не меняет спектров и ранга матриц A_m, их спектральные свойства можно получить, исследуя матрицы $\widetilde{A}_m$.

1. Покажем, что линеаризованная задача имеет чисто отрицательный спектр. Рассмотрим квадратичные формы

$$(\widetilde{A}_m\bar{l}, \bar{l}) = \left(n_1\lambda_{11}^{(m)} + n_2\lambda_{12}^{(m)}\right)l_1^2 + 2n_1^{1/2}n_2^{1/2}\sigma_{12}^{(m)}l_1l_2 + \left(n_2\lambda_{22}^{(m)} + n_1\lambda_{12}^{(m)}\right)l_2^2.$$

Подставив в это равенство значения матричных элементов для изотропного рассеяния, при $m = 2k + 1$ имеем

$$(\widetilde{A}_m l, l) = (-n_1\nu_{11} - n_2\nu_{12})l_1^2 + (-n_2\nu_{22} - n_1\nu_{12})l_2^2 = -\sum_{i\neq j,\, j=1}\left(n_i\nu_{ii}l_i^2 + n_i\nu_{ij}l_j^2\right) < 0,$$

т. е. для нечетных m квадратичные формы строго отрицательны. Соответственно при $m = 2k$

$$(\widetilde{A}_m l, l) = 2(\alpha_k - 1)\sum_{(i)} n_i\nu_{ii}l_i^2 + \nu_{12}(\alpha_k - 1)\left(n_1^{1/2}l_2 - n_2^{1/2}l_1\right)^2$$
$$+ 2\nu_{12}(2\alpha_k - 1)n_1^{1/2}n_2^{1/2}l_1l_2.$$

Легко видеть, что $\alpha_k = \frac{(2k-1)}{2k}\frac{(2k-3)}{(2k-2)}\dots\frac{1}{2}$ есть произведение правильных дробей, у которых числитель на единицу меньше знаменателя. Следовательно, $\alpha_k - 1 < 0$. Соответственно $2\alpha_k$ отличается от α_k только последним сомножителем, который равен 1. Поэтому $2\alpha_k < 1$ и $2\alpha_k - 1 < 0$. В результате квадратичные формы для $m = 2k$ также отрицательны. Отсюда следует строгая отрицательность собственных значений всех матриц A_k, $k > 1$.

2. Рассмотрим матрицу $\widetilde{A}_2$ ($k = 1$). Ее собственные значения $\mu_1^{(2)} = 0$, $\mu_2^{(2)} = -\frac{\nu_{12}}{2}$ вычисляются непосредственно. Квадратичная форма

$$(\widetilde{A}_2\bar{l}, \bar{l}) = -\frac{\nu_{12}}{2}\left(n_1^{1/2}l_2 - n_2^{1/2}l_1\right)^2$$

обращается в нуль на единственном с точностью до постоянного множителя a векторе $\bar{l}_2 = \left(an_1^{1/2}, an_2^{1/2}\right)'$. Соответственно несимметризованная матрица A имеет собственный вектор $\bar{a} = S^{-1}\bar{l}_2 = (a, a)'$, отвечающий нулевому собственному значению.

3. Собственные значения линеаризованной задачи вычисляются явно как корни квадратных характеристических уравнений

$$\det(\widetilde{A}_m - \mu^{(m)}E) = 0.$$

4. Справедливость последнего пункта леммы проверяется непосредственно. Лемма 2 полностью доказана.

3. Инвариантные решения системы однородных уравнений

В работе [13] для случая одного уравнения найдена наиболее широкая группа Ли допускаемых преобразований. Базисные инфинитезимальные операторы соответствующей алгебры имеют вид

$$X_1^{(1)} = \partial_t, \quad X_2^{(1)} = k^2\varphi\partial_\varphi, \quad X_3^{(1)} = k\partial_k, \quad X_4^{(1)} = \varphi\partial_\varphi - t\partial_t, \tag{3.1}$$

где ∂_x — оператор дифференцирования по x. Аналогичный результат получен в [14] для системы уравнений Больцмана многокомпонентного газа. Исходя из них и системы уравнений для характеристических функций (1.12), можно сформулировать следующее утверждение.

Теорема 1. *Наиболее широкой группой Ли, допускаемой системой* (1.12), *является четырехпараметрическая группа G^4, соответствующая алгебра которой определяется базисом операторов*

$$X_1^{(1)} = \partial_t, \quad X_2^{(1)} = \sum_{(i)} k_i^2\varphi_i\partial_{\varphi_i}, \quad X_3^{(1)} = \sum_{(i)} k_i\partial_{k_i}, \quad X_4^{(1)} = \sum_{(i)} \varphi_i\partial_{\varphi_i} - t\partial_t. \tag{3.2}$$

Доказательство теоремы практически совпадает с доказательством теоремы 1 в [14] и поэтому опускается.

Ограничимся здесь построением инвариантных БКВ-решений, аналогичных решению уравнения Больцмана, найденному А. В. Бобылевым, М. Круком и Т. Т. Ву (см. ссылки в [5, 14]). Для случая одного уравнения соответствующий класс подробно исследован в [5]. В него, в частности, включены незнакоопределенные решения, для которых не выполнялся закон сохранения энергии. Хотя такие решения в дальнейшем рассматривались для других кинетических уравнений (см. обзор в [10]), в данном случае они исключаются из рассмотрения как нефизические. В этой связи аналогично [14] БКВ-решениям сопоставим оператор $X_{BKW} = X_2 - X_3 + c^{-1}X_1$. Согласно этому виду инфинитезимального оператора инвариантные решения имеют представление

$$\varphi_i(k_i, t) = \exp[4\pi^2(y_i - x_i)]\Phi_i(y_i), \quad y_i = x_i\theta_0 e^{ct}, \ x_i = \frac{k_i^2}{2}, \tag{3.3}$$

где автомодельные переменные y_i неотрицательны.

Подстановка (3.3) в систему (1.12) дает следующую систему фактор-уравнений для функций $\Phi_i(y_i)$:

$$cy_i\left(\frac{d\Phi_i}{dy_i} + 4\pi^2 y_i\Phi_i(y_i)\right) = \sum_{(j)} \int_{-\pi}^{\pi} d\theta g_{ij}(\theta)[\Phi_i(y_i\cos\theta)\Phi_j(y_i\sin\theta) - \Phi_i(y_i)\Phi_j(0)]. \tag{3.4}$$

Аналогично [5] ее решение ищем в виде рядов

$$\Phi_i(y_i) = n_i\left(1 + \sum_{m=1}^{\infty} b_m^{(i)}\frac{y_i^m}{m!}\right). \tag{3.5}$$

Здесь в структуре ряда учтен закон сохранения концентраций (1.14), так как $\varphi_i(0, t) = n_i$. Дважды дифференцируя (3.3) с учетом (3.5), получаем, что закон сохранения энергии в форме (1.15) накладывает дополнительное ограничение на первые коэффициенты рядов в виде

$$-\frac{1}{4\pi^2}\sum_{(i)} n_i b_1^{(i)} = 1.$$

Для коэффициентов имеем однородные рекуррентные системы

$$(cE - B_m)\bar{b}_m = -4c\pi^2\bar{b}_{m-1} + \bar{f}_m, \quad m = 1, 2\ldots, \; \bar{b}_0 = (1, 1), \; \bar{f}_1 = 0, \tag{3.6}$$

матрицы которых выражаются через матрицы (2.4) четных мод линеаризованной задачи

$$B_m = \frac{A_{2m}}{m} = \frac{1}{m}\begin{pmatrix} n_1\lambda_{11}^{(2m)} + n_2\lambda_{12}^{(2m)} & n_2\sigma_{12}^{(2m)} \\ n_1\sigma_{21}^{(2m)} & n_2\lambda_{22}^{(2m)} + n_1\lambda_{21}^{(2m)} \end{pmatrix},$$

$$f_m^{(i)} = \frac{1}{m}\sum_{(j)}\sum_{n=1}^{m-1} C_m^n b_n^{(j)} b_{m-n}^{(i)} n_j \int_{-\pi}^{\pi} d\theta g_{ij}(\theta)\cos^{2(m-n)}\theta\sin^{2n}\theta.$$

Для изотропного рассеяния при $g_{ij}(\theta) = \frac{\nu_{ij}}{2\pi}$ интеграл в правой части $f_m^{(i)}$ вычисляется таким образом:

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos^{2(m-n)}\theta\sin^{2n}\theta d\theta = 2\pi\frac{(2n-1)!!(2(m-n)-1)!!}{(2m)!!}.$$

С учетом полученных для (3.6) соотношений описание класса БКВ-решений дается следующей теоремой.

Теорема 2. 1. *Если* $c \neq \frac{\mu_{1,2}^{2m}}{m}$, *то каждая система* (3.6) *имеет единственное решение* $\bar{b}_m = ((-4\pi^2)^m, (-4\pi^2)^m)'$, $m = 1, 2\ldots$. *В этом случае* БКВ-*решения системы* (1.9) *суть равновесные максвелловские функции вида* (1.2).

2. *При выборе* $c = \frac{\mu_{1,2}^{(2m)}}{m}$ *для некоторого* $m = 1, 2\ldots$ *в общем случае характеристические функции* БКВ-*решений получаются в виде бесконечных рядов* (3.5).

3. БКВ-*решения системы* (1.9) *имеют вид*

$$f_i(v_i, t) = \frac{n_i}{\sqrt{2\pi(1-\theta(t))}}e^{-\frac{v_i^2}{2(1-\theta(t))}}\left[1 + \frac{\theta(t)}{2(1-\theta(t))}\left(\frac{v_i^2}{(1-\theta(t))} - 1\right)\right], \quad i = 1, 2,$$
$$\theta = \theta_0 e^{ct}, \quad 0 < \theta_0 < \frac{2}{3}, \tag{3.7}$$

аналогичный БКВ-*решению для одного уравнения* [5], *тогда и только тогда, когда параметры газовой смеси удовлетворяют условию* (2.6) *и параметр* c *определен как*

$$c = -\frac{1}{8}(n_i\nu_{ii} + n_j\nu_{ij}). \tag{3.8}$$

4. *Если положить* $c = \mu_2^{(2)} = -\frac{\nu_{12}}{2}$ *при условии*

$$\nu_{12} = \frac{\nu_{22}}{8}, \tag{3.9}$$

то для одного из газов БКВ-*решение имеет вид нестационарного максвелловского распределения*

$$f_1(v_1,t) = n_1 \frac{1}{\sqrt{2\pi(1-\theta)}} e^{-\frac{v_1^2}{2(1-\theta)}}, \tag{3.10}$$

а второе решение принимает вид

$$f_2(v_2,t) = n_2 \frac{1}{\sqrt{2\pi(1-\theta)}} e^{-\frac{v_2^2}{2(1-\theta)}} \left[1 + \frac{\theta}{2n_2(1-\theta)}\left(\frac{v_2^2}{1-\theta} - 1\right)\right],$$
$$\theta = \theta_0 e^{ct}, \quad 0 < \theta_0 \le \frac{2n_2}{1+2n_2}. \tag{3.11}$$

Доказательство. 1. Если $c \neq \frac{\mu_{1,2}^{(2m)}}{m}$, то матрицы $(cE - B_m)$ обратимы и системы (3.6) рекуррентно разрешимы. При $c \neq 0$ для $m = 1$

$$(cE - A_2)\bar{b}_1 = -4c\pi^2 \bar{b}_0.$$

Очевидно, $\bar{b}_1 = -4\pi^2(1,1)'$ удовлетворяет этой системе, так как $\bar{b}_1$ одновременно является собственным вектором матрицы A_2, отвечающим собственному значению $\mu_1^{(2)} = 0$. Далее по индукции проверяется, что для $m \ge 2$ решениями систем (3.6) будут векторы $\bar{b}_m = ((-4\pi^2)^m, (-4\pi^2)^m)'$. При этом $\Phi_i = n_i \exp(-4\pi^2 y_i)$, в силу (3.3) соответствующие характеристические функции $\varphi_i(k_i,t)$ совпадают с (1.13) и БКВ-решения сводятся к равновесным максвелловским функциям (1.2).

2. Если выбрать $c = c_n^{(i)} = \mu_i^{(2n)}$ для некоторого n при $i = 1$ или $i = 2$, то для $m < n$ коэффициенты $\bar{b}_m$ имеют вид $((-4\pi^2)^m, (-4\pi^2)^m)'$, при $m = n$ коэффициент $b_n^{(i)}$ может быть выбран произвольно, а $b_n^{(j)}$, $j \neq i$, определяется однозначно. Для $m > n$ коэффициенты определяются однозначно обращением невырожденных матриц $\left(c_m^{(i)} E - B_m\right)$. В этом случае характеристические функции БКВ-решений получаются в виде бесконечных рядов (3.5), а БКВ-решения выражаются рядами по полиномам Эрмита [12], вид и сходимость которых здесь не рассматриваются.

3. Для тестов особый интерес представляют БКВ-решения в элементарных функциях, в частности, вида (3.7). Для одного модельного уравнения подобное решение получено в [5] путем обрыва цепочки рекуррентных уравнений при выборе $c = \frac{\lambda^{(4)}}{4} = \frac{\lambda^{(6)}}{6}$. Как видно из выражения $|\lambda^{(m)}| = -(2\alpha_m - 1)$, такое соотношение действительно имеет место в скалярном случае. Для системы (3.6) аналогичные решения возможны при $\bar{b}_1 = (-4\pi^2, -4\pi^2)'$, $\bar{b}_2 = \bar{b}_3 = 0$. Для того чтобы получить $\bar{b}_2 = 0$, необходимо и достаточно, чтобы система (3.6) при $m = 2$ имела нулевую правую часть. Это выполняется, если $\bar{f}_2 = 4\pi^2 c\bar{b}_1$. Но

$$f_2^{(i)} = \frac{1}{8}(4\pi)^2(n_i\nu_{ii} + n_j\nu_{ij}).$$

Отсюда

$$c = -\frac{1}{8}(n_i\nu_{ii} + n_j\nu_{ij}), \quad i \neq j = 1,2.$$

При этом, положив $\bar{b}_2 = 0$, получаем в правой части системы при $m = 3$

$$f_3^{(i)} = \frac{1}{3}\sum_{(j)}\sum_{n=1}^{2} c_3^n b_n^{(j)} b_{3-n}^{(i)} n_j \frac{(2n-1)!!(2(3-n)-1)!!}{6!!},$$

и так как $b_1^{(j)}b_2^{(i)}+b_2^{(j)}b_1^{(i)}=0$, то $f_3^{(i)}=0$, т. е. при $m=3$ получается однородная система и мы можем выбрать $\bar{b}_3=0$. Далее все остальные коэффициенты разложения будут рекуррентно обращаться в нуль. Найденное условие на параметр c эквивалентно условию (2.6). Таким образом, получаем характеристические функции в виде

$$\varphi_i(k_i,t)=\exp[4\pi^2(y_i-x_i)]n_i\left(1-4\pi^2\frac{k_i^2}{2}\theta(t)\right).$$

Выполнив обратное преобразование Фурье (1.11), приходим к БКВ-решению вида (3.7). Из условия неотрицательности функции распределения при $t=0$, $v_i=0$ получается ограничение на параметр θ_0 в виде

$$1-\frac{\theta_0}{(1-\theta_0)2}>0,\quad 0<\theta_0<\frac{2}{3}.$$

4. Для системы (1.7) имеется другая возможность построения БКВ-решений в замкнутой форме. Выберем параметр $c=\mu_2^{(2)}=-\frac{\nu_{12}}{2}$. Так как $B_1=A_2$, то $\left(\mu_2^{(2)}E-B_1\right)$ — вырожденная матрица ранга $r=1$. Система (3.6) при $m=1$ сводится к одному уравнению, в котором выберем $b_1^{(1)}=0$. Тогда $b_2^{(1)}=-4\pi^2\frac{1}{n_2}$. Отметим, что такой выбор коэффициентов удовлетворяет ограничению, которое накладывает закон сохранения энергии: $-\frac{1}{4\pi^2}b_2^{(1)}n_2=1$. Для обрыва рядов надо потребовать равенство нулю правой части системы при $m=2$. Как и выше, для этого необходимо и достаточно, чтобы $\bar{f}_2=4c\pi^2\bar{b}_1$. Подстановка значений c, $\bar{b}_1$ дает $f_2^{(1)}=\frac{1}{2}\sum\limits_{(j)}b_1^{(j)}b_1^{(1)}n_j\nu_{1j}\frac{1}{8}=0$, так как $b_j^{(1)}=0$. При $i=2$

$$f_2^{(2)}=\frac{1}{2}\sum_{(j)}b_1^{(j)}b_1^{(2)}n_j\nu_{2j}\frac{1}{8}=\frac{1}{16}n_2\nu_{12}(4\pi^2)^2\frac{1}{n_2^2}=\frac{1}{16}\nu_{12}\frac{1}{n_2}(4\pi^2)^2,$$

$$4c\pi^2b_1^{(2)}=4\pi^2\left(-\frac{\nu_{12}}{2}\right)\left(-4\pi^2\frac{1}{n_2}\right)=(4\pi^2)^2\frac{1}{2n_2}\nu_{12}.$$

Отсюда получаем дополнительное соотношение на параметры вида (1.9)

$$\nu_{12}=\frac{\nu_{22}}{8}.$$

В результате правая часть системы при $m=2$ обращается в нуль. Это позволяет выбрать $\bar{b}_2=0$. При этом правая часть системы при $m=3$, равная $-4c\pi^2\bar{b}_2+\bar{f}_3$, также обращается в нуль, так как

$$f_3^{(i)}=\frac{1}{3}\sum_{(j)}\left[C_3^1b_1^{(j)}b_2^{(i)}n_j\frac{(3)!!}{6!!}+C_3^2b_2^{(j)}b_1^{(i)}n_j\frac{(3)!!}{6!!}\right]=0.$$

Таким образом, ряды обрываются. Решения принимают вид

$$\varphi_1(k_1,t)=n_1\exp(4\pi^2(y_1-x_1)),\quad \varphi_2(k_2,t)=n_2\exp(4\pi^2(y_2-x_2))\left(1-\frac{4\pi^2}{n_2}y_2\right).$$

Обратное преобразование Фурье дает в этом случае функции распределения (3.10), (3.11). Для обеспечения неотрицательности функции распределения f_2 при $t=0$, $v_i=0$, как и выше, получаем ограничение $0<\theta_0\le\frac{2n_2}{1+2n_2}$. Теорема полностью доказана.

4. Законы сохранения в дискретной модели

Численную реализацию пространственно однородной задачи (1.9) ((1.12)), которая может также служить вспомогательной задачей релаксации в схеме расщепления по физическим процессам [3], будем рассматривать на регулярных сетках с шагами h_k, h_v:

$$k_{1,n} = nh_k, \quad v_{1,m} = mh_v, \quad n, m = -M, \dots, M, \quad h_k = \frac{1}{2a}, \quad h_v = \frac{1}{2\Omega}, \tag{4.1}$$

где $[-a, a]$, $[-\Omega, \Omega]$ — интервалы изменения переменных v_i и k_i соответственно. Проекции функций f_i, φ_i на сетки обозначим через $f_{i,m} = f_i(mh_v)$, $\varphi_{i,n} = \varphi_i(nh_k)$. Дискретные прямое и обратное преобразования Фурье определим формулами

$$\varphi_{i,n} = h_v \sum_{m=-M}^{M-1} f_{i,m} e^{-\frac{i\pi mn}{M}}, \quad f_{i,m} = h_k \sum_{n=-M}^{M-1} \varphi_{i,n} e^{\frac{i\pi mn}{M}}. \tag{4.2}$$

Консервативность концентраций. Интегралы (1.8), определяющие концентрации n_i, будем аппроксимировать квадратурными формулами левых прямоугольников $n_i = I_1 \approx h_v \sum\limits_{m=-M}^{M-1} f_m$. Подставим сюда представление сеточной функции $\{f_m\}$ в виде (4.2) и выполним очевидные преобразования:

$$n_i \approx h_v h_k \sum_{n=-M}^{M-1} \sum_{m=-M}^{M-1} \varphi_{i,n} e^{\frac{i\pi mn}{M}}$$
$$= h_v h_k \left(2M\varphi_{i,0} + \sum_{n=-M}^{M-1} \varphi_{i,n} \sum_{m=-M}^{M-1} (e^{\frac{i\pi n}{M}})^m \right) = \varphi_{i,0}.$$

Таким образом, квадратурная формула прямоугольников, вычисляемая по дискретному массиву значений $\{f_m\}$, дает точное значение n_i. Для простоты будем предполагать, что интегрирование по времени осуществляется на основе одной из схем типа Рунге — Кутта. При интегрировании уравнений для нахождения $\varphi_{i,0}^{p+1}$ на $(p+1)$-м временном слое вычисляются значения правых частей (1.12) в промежуточные моменты времени (стадии):

$$\sum_{(j)} G\big(\varphi_{i,0}^{p+\delta}, \varphi_{j,0}^{p+\delta}\big) = \sum_{(j)} \frac{\nu_{ij}}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \big[\varphi_{i,0}^{p+\delta} \varphi_{j,0}^{p+\delta} - \varphi_{i,0}^{p+\delta} \varphi_{j,0}^{p+\delta}\big]\, d\theta. \tag{4.3}$$

Очевидно, что при любой аппроксимации интеграла по θ это выражение тождественно равно нулю. Отсюда следует, что $\varphi_{i,0}^{p+1} = \varphi_{i,0}^{p} = \dots = \varphi_{i,0}^{0} = n_i$, т. е. такая схема консервативна относительно концентраций компонент.

Консервативность по энергии. Рассмотрим дискретную аппроксимацию интеграла энергии (1.9) и его выражения в образах Фурье (1.15). Значения функций φ_i в ближайших к нулю узлах обозначим через $\varphi_{i,\pm} = \varphi_i(\pm h_k)$. Вторые производные в (1.15) будем приближать разделенными разностями второго порядка

$$\Delta\varphi_{i,0} = \frac{\varphi_{i,-} - 2\varphi_{i,0} + \varphi_{i,+}}{h_k^2}. \tag{4.4}$$

Подставив в правую часть выражения $\varphi_{i,\pm}$ в виде дискретного преобразования Фурье (4.2), получаем

$$\Delta\varphi_{i,0} = \frac{h_v}{h_k^2}\sum_{m=-M}^{M-1} f_{i,m}\left(e^{-\frac{i\pi m}{M}} - 2 + e^{\frac{i\pi m}{M}}\right) = \frac{h_v}{h_k^2}\sum_{m=-M}^{M-1} f_{i,m} 4\sin^2\frac{\pi m}{2M}.$$

Как правило, $M = 2^r$ достаточно велико [11], функции распределения экспоненциально убывают при $m \to \pm M$, и основной вклад в сумму, стоящую в правой части, получается при умеренных m. Это позволяет принять $\sin\frac{\pi m}{2M} \approx \frac{\pi m}{2M}$. Так как $4M^2h_k^2 = (2\Omega)^2 = \frac{1}{h_v^2}$, то в результате с точностью до $O(h_v^2)$ следует равенство

$$-\frac{1}{4\pi^2}\sum_{(i)}\Delta\varphi_{i,0} = \sum_{(i)} h_v \sum_{m=-M}^{M-1}(mh_v)^2 f_m \approx I_2 = 1, \tag{4.5}$$

где интегралы энергии аппроксимируются квадратурными формулами левых прямоугольников.

Рассмотрим возможности выполнения дискретного закона сохранения энергии при численном интегрировании по времени с использованием схем Рунге — Кутта. Очевидно, что для консервативности в данном случае необходимо, чтобы сумма разностных отношений в (4.4) оставалась постоянной на всех временных слоях. Воспользуемся разложением φ_i в ряд Тейлора в окрестности $k_i = 0$. С точностью до $O(k_i^3)$ имеем

$$\varphi_i(k_i, t) = \varphi_i(0,t) + \varphi_i'(0,t)k_i + \varphi_i''(0,t)\frac{k_i^2}{2} + O(k_i^3). \tag{4.6}$$

Подставляя (4.6) в правые части системы (1.12), с точностью до $O(k_i^2)$ находим

$$\sum_{(j)} G(\varphi_i, \varphi_j) = \sum_{(j)} \nu_{ij}\left[\varphi_{i,0}\varphi_{j,0} + \frac{k_i^2}{4}\left(\varphi_{i,0}\varphi_{j,0}'' + \varphi_{i,0}''\varphi_{j,0}\right) - \varphi_i(k_i)\varphi_j(0)\right]. \tag{4.7}$$

Заметим, что здесь асимптотика (4.6) использовалась только при вычислении интегралов по угловой переменной θ.

Вычислим значения (4.7) при $k_i = \pm h_k$, заменив вторые производные разностными отношениями (4.4). В результате получаем

$$\sum_{(j)} G(\varphi_{i+}, \varphi_{j+}) = -\sum_{(j)} \nu_{ij}\left[\frac{1}{4}\varphi_{i,0}(\varphi_{i,-} + \varphi_{j,+}) + \frac{1}{4}\varphi_{j,0}(\varphi_{i,-} + \varphi_{i,+}) - \varphi_{i,+}\varphi_{j,0}\right], \tag{4.8}$$

$$\sum_{(j)} G(\varphi_{i-}, \varphi_{j-}) = \sum_{(i)} \nu_{ij}\left[\frac{1}{4}\varphi_{j,0}(\varphi_{i,-} + \varphi_{j,+}) + \frac{1}{4}\varphi_{i,0}(\varphi_{j,-} + \varphi_{i,+}) - \varphi_{i,+}\varphi_{j,0}\right]. \tag{4.9}$$

Прямое вычисление показывает, что на любом временном слое имеет место соотношение

$$\sum_{(i)}\left[\sum_{(j)} G(\varphi_{i,+}, \varphi_{j,+}) + \sum_{(j)} G(\varphi_{i,-}, \varphi_{j,-})\right] = 0. \tag{4.10}$$

Действительно, подстановка значений (4.8), (4.9) дает

$$\sum_{(i)}\left[\sum_{(j)} G_i(\varphi_{i,+}, \varphi_{j,+}) + \sum_{(j)} G_i(\varphi_{i,-}, \varphi_{j,-})\right]$$
$$= \frac{1}{2}\sum_{(i)}\sum_{(j)} \nu_{ij}[\varphi_{i,0}(\varphi_{j,-} + \varphi_{j,+}) - \varphi_{j,0}(\varphi_{i,-} + \varphi_{i,+})].$$

Очевидно, что встречная замена индексов суммирования $i \leftrightarrow j$ с учетом симметрии $\nu_{ij} = \nu_{ji}$ не меняет этого выражения. С другой стороны, непосредственно видно, что в суммах справа такая замена приводит к изменению знака на обратный. Отсюда и следует равенство (4.10). В результате при интегрировании по времени с использованием схем Рунге — Кутта имеет место дискретный закон сохранения энергии в форме (4.5).

При этом непосредственно проверяется, что к приближенным выражениям для интегралов (4.8), (4.9) по переменной θ приводят квадратурные формулы трапеций, вычисляемые на узлах $\theta_m = -\pi + \frac{m\pi}{2}$, $m = 0, 1, \dots, 4$. Например,

$$\sum_{(j)} G(\varphi_{i,+}, \varphi_{j,+}) = \sum_{(j)} \nu_{ij} \left\{ \frac{1}{2\pi} \frac{\pi}{2} \sum_{m=0}^{3} \frac{1}{2} \left[\varphi_i\left(h_k \cos\left(-\pi + \frac{m\pi}{2}\right)\right) \right.\right.$$
$$\times \varphi_j\left(h_k \sin\left(-\pi + \frac{m\pi}{2}\right)\right) + \varphi_i\left(h_k \cos\left(-\pi + (m+1)\frac{\pi}{2}\right)\right)$$
$$\left.\left. \times \varphi_j\left(h_k \sin\left(-\pi + (m+1)\frac{\pi}{2}\right)\right)\right] - \varphi_i(h_k)\varphi_j(0) \right\}.$$

Заметим, что при таком подходе требуемая точность $O(h_k^2)$ достигается на небольшом числе узлов, причем нет необходимости в дополнительной интерполяции по переменным k_i.

Использование асимптотики решений. Можно указать еще один подход, который обеспечивает не только выполнение дискретных законов сохранения, но и правильное стремление к равновесным решениям (1.2). Очевидно, что последнее принципиально важно при численном интегрировании на больших значениях времени задач пространственно однородной релаксации.

Подставим асимптотические разложения (4.6) в систему (1.12). Оставляя члены до $O(k_i^2)$ включительно, приходим к системе вида

$$\dot{\varphi}'_{i,0} k_i + \dot{\varphi}''_{i,0} \frac{k_i^2}{2} = -k_i \sum_{(j)} \nu_{ij} \varphi'_{i,0} \varphi_{j,0} - \frac{k_i^2}{2} \sum_{(j)} \frac{\nu_{ij}}{2} \left(n_j \varphi''_{i,0} - n_i \varphi''_{j,0}\right), \quad i = 1, 2,$$

где точки означают производные по времени. Последняя расщепляется по степеням k_i на две системы, которые записываются в следующем виде:

$$\dot{\varphi}'_{i,0} = \alpha_i \varphi'_{i,0}, \quad \alpha_i = -(\nu_{ii} n_i + \nu_{ij} n_j), \quad i \neq j = 1, 2, \tag{4.11}$$

$$\dot{\varphi}''_{i,0} = \frac{\nu_{ij}}{2} \left(n_i \varphi''_{j,0} - n_j \varphi''_{i,0}\right), \quad i \neq j = 1, 2. \tag{4.12}$$

Здесь положено $\varphi_{i,0} = n_i$.

Можно заметить, что имеет место связь со спектром линеаризованной задачи. Коэффициенты α_i совпадают с собственными значениями для нечетных мод (2.5). Матрица системы (4.12) есть матрица A_2 линеаризованной задачи (см. (2.4)). Таким образом, корни характеристического уравнения для (4.12) суть $\lambda_1 = \mu_1^{(2)} = 0$, $\lambda_2 = \mu_2^{(2)} = -\frac{\nu_{12}}{2}$. Решения систем (4.11), (4.12) записываются соответственно в виде

$$\varphi'_{i,0} = \varphi'_i(0,0) e^{\alpha_i t}, \quad \varphi''_{i,0} = C_{i,1} + C_{1,2} e^{\lambda_2 t}. \tag{4.13}$$

Найдем их выражения через решения линеаризованной задачи в виде (2.1), (2.3):

$$\varphi_i(k_i, t) = \varphi_{i,l} \left(1 + \sum_{m=1}^{\infty} l_m^{(i)}(t) \frac{k_i^m}{m!}\right). \tag{4.14}$$

Вычисляя значения производных при $k_i = 0$, получаем

$$\varphi'_{i,0} = n_i l_1^{(1)}(t), \quad \varphi''_{i,0} = n_i\big(-4\pi^2 + l_2^{(1)}(t)\big). \tag{4.15}$$

Теперь, чтобы обеспечить выполнение законов сохранения, можно использовать в точках $k_i = \pm h_k$ представление (4.6) с найденными по начальным данным коэффициентами (4.13) ((4.15)). При этом для выполнения закона сохранения концентраций достаточно положить $\varphi_{i,0} = n_i$. Подстановка асимптотических решений (4.6) $\varphi_i(\pm h_k, t) = \varphi_{i,\pm}$ в разностные соотношения (4.4) дает точные равенства $\Delta\varphi_{i,0} = \varphi''_i(0,t)$. Таким образом, дискретный закон сохранения энергии в виде (4.5) также будет выполнен.

Как известно [1], процесс релаксации к равновесным решениям (1.2) ((1.13)) на больших временах асимптотически близок к решениям линеаризованной задачи (4.14). Из (4.14), (4.15) непосредственно видно, что использование (4.6) в точках $k_i = 0, \pm h_k$, в которых набирается основное значение образа Фурье, гарантирует правильное асимптотическое приближение к равновесию.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ферцигер Дж., Капер Г.* Математическая теория процессов переноса в газах. М.: Мир, 1976.
2. *Осипов А. И., Уваров А. В.* Кинетические и газодинамические процессы в неравновесной молекулярной физике // Успехи физ. наук. 1992. Т. 162, № 11. С. 1–42.
3. *Григорьев Ю. Н., Михалицын А. Н.* Спектральный метод численного решения кинетического уравнения Больцмана // Журн. вычислит. математики и мат. физики. 1983. Т. 23, № 6. С. 1454–1463.
4. *Kac M.* Foundation of kinetic theory // Proc. 3rd Berkeley Sympos. Math. Stat. and Prob. Berkeley: Univ. Calif. Press, 1956. V. 8. P. 171–197.
5. *Григорьев Ю. Н.* Класс точных решений одного нелинейного кинетического уравнения // Динамика сплошной среды. 1976. № 26. С. 30–43.
6. *Cornille H., Gervois A., Protopopesku V.* Closed similarity solutions for a class of stationary nonlinear Boltzmann-like equations // J. Phys. A. 1984. V. 16. P. L343–L350.
7. *Cornille H.* Closed solution for the spatially homogeneous Kac's model of the nonlinear Boltzmann equation // J. Phys. A. 1984. V. 17. P. L235–L242.
8. *Cornille H.* Solution for the spatially inhomogeneous nonlinear Kac model of the Boltzmann equation // J. Math. Phys. 1985. V. 26, N 6. P. 1203–1214.
9. *Cornille H.* Oscillating Maxwellians // J. Phys. A. 1985. V. 18. P. L839–L844.
10. *Ernst M. H.* Nonlinear model-Boltzmann equations and exact solutions // Phys. Rep. 1981. V. 78, N 1. P. 1–171.
11. *Рошаль А. С.* Быстрое преобразование Фурье в вычислительной физике // Изв. вузов. Радиофизика. 1976. Т. 19, № 10. С. 1425–1454.
12. *Корн Г., Корн Т.* Справочник по математике. М.: Наука, 1973.
13. *Григорьев Ю. Н., Мелешко С. В.* Исследование инвариантных решений нелинейного кинетического уравнения Больцмана и его моделей. Новосибирск, 1986. (Препринт/СО АН СССР. Ин-т теорет. и прикл. механики; №18–86).
14. *Григорьев Ю. Н., Мелешко С. В.* Полная группа Ли и инвариантные решения системы уравнений Больцмана многокомпонентной смеси газов // Сиб. мат. журн. 1997. Т. 38, № 3. С. 510–525.

Статья поступила 31 мая 2005 г.

Григорьев Юрий Николаевич, *Омельянчук Мария Игоревна*
Институт вычислительных технологий СО РАН,
пр. Академика Лаврентьева, 6, Новосибирск 630090
grigor@ict.nsc.ru