Сибирский математический журнал
Июль—август, 2005. Том 46, № 4

УДК 517.53

УСЛОВИЯ СХОДИМОСТИ ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫХ ДРОБЕЙ ПРИ УЗЛАХ, ОТДЕЛЕННЫХ ОТ ОСОБЫХ ТОЧЕК ФУНКЦИИ

А. Г. Липчинский

Аннотация: Рассматривается интерполяционный процесс для класса функций, имеющих конечное число особых точек, с помощью рациональных функций, полюсы которых совпадают с особыми точками интерполируемой функции. Узлы интерполяции образуют треугольную матрицу и отделены от особых точек функции. Найдено необходимое и достаточное условие равномерной сходимости на любом компакте, не содержащем особых точек функции, последовательности интерполяционных дробей к интерполируемой функции, а также другие условия сходимости.

Ключевые слова: аналитическая функция, особая точка функции, интерполяционный процесс, рациональная дробь, равномерная сходимость, расходимость.

Класс однозначных аналитических функций, не имеющих других особых точек, кроме, быть может, точек a_s, $s = 1, 2, \dots, p+1$, $a_{p+1} = \infty$, обозначим через $A(a_1, a_2, \dots, a_{p+1})$.

Существует единственная [1] рациональная функция вида

$$R_{n-1}(z) = \frac{P_{n-1}(z)}{Q_{m_n}(z)}, \tag{1}$$

где $P_{n-1}(z)$ — многочлен степени $n-1$, $Q_{m_n}(z) = \prod\limits_{k=1}^{p} (z - a_k)^{m_n^{(k)}}$, $m_n^{(k)}$ — натуральные числа, $\sum\limits_{k=1}^{p} m_n^{(k)} = m_n \leq n-1$, интерполирующая функцию $f(z) \in A(a_1, a_2, \dots, a_{p+1})$ в узлах $\{z_j^{(n)}\}$, $j = 1, 2, \dots, n$, отделенных от точек a_s, т. е. расположенных на некотором компакте, не содержащем этих точек.

В работе найдено необходимое и достаточное условие равномерной сходимости на любом компакте, не содержащем точек a_k, $k = 1, 2, \dots, p$, последовательности (1), построенной для любой функции класса $A(a_1, a_2, \dots, a_{p+1})$ по матрице узлов $\{z_j^{(n)}\}$, расположенных на любом компакте, не содержащем точек a_s, $s = 1, 2, \dots, p+1$, к интерполируемой функции, а также другие условия сходимости интерполяционных дробей (1).

Пусть область $\overline{D}$ определяется неравенствами $|z| \leq r$, $|z - a_k| \geq 1/r$, $k = 1, 2, \dots, p$, где r так велико, что окружности $|z - a_k| = 1/r$ не пресекаются и расположены внутри круга $|z| \leq r$, а узлы интерполяции лежат на компакте, расположенном в области $\overline{D}$.

Для остаточного члена дробей (1) имеет место равенство [1, 2]

$$r_{n-1}(z)=\omega_n(z)\left[\sum_{k=1}^{p}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_k}\frac{f(t)\,dt}{\omega_n(t)(t-z)}+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_{p+1}}\frac{f(t)\,dt}{\omega_n(t)(t-z)}\right]=\omega_n(z)\sum_{s=1}^{p+1}I_n^{(s)}, \tag{2}$$

где

$$\omega_n(z)=\frac{1}{Q_{m_n}(z)}\prod_{j=1}^{n}\big(z-z_j^{(n)}\big),\ z\in\overline{D},\quad \Gamma_k:|t-a_k|=\frac{1}{d},\quad \Gamma_{p+1}:|t|=d,\ d>r,$$

контуры Γ_k и Γ_{p+1} положительно ориентированы относительно $\overline{D}$.

Лемма 1. *Остаточный член интерполяции* (2) *можно представить в виде*

$$r_{n-1}(z)=\omega_n(z)\left[\sum_{\nu=m_n^{(p+1)}+1}^{\infty}b_\nu^{(p+1)}c^{(p+1)}_{-(\nu-m_n^{(p+1)}-1)}(z)-\sum_{k=1}^{p}\sum_{\nu=m_n^{(k)}+1}^{\infty}b_{-\nu}^{(k)}c^{(k)}_{\nu-m_n^{(k)}-1}(z)\right], \tag{3}$$

где $c_l^{(k)}(z)$ — коэффициенты ряда Тейлора функции

$$\varphi_{n,k}(t)=\big[(t-a_k)^{m_n^{(k)}}\omega_n(t)(t-z)\big]^{-1}$$

в окрестности точки a_k, $b_\eta^{(s)}$ — коэффициент при η-м члене главной части ряда Лорана в окрестности точки a_s функции $f(t)$, $c_l^{(p+1)}(z)$ — коэффициенты разложения функции

$$\varphi_{n,p+1}(t)=[\omega_n(t)(t-z)]^{-1}t^{m_n^{(p+1)}+2},$$

$m_n^{(p+1)}=n-1-m_n$, в окрестности бесконечно удаленной точки.

Доказательство. Рассмотрим интеграл $I_n^{(k)}$. Так как функция $f(t)$ аналитическая на окружности Γ_k и внутри ее, за исключением, быть может, точки a_k, то в некоторой проколотой окрестности этой точки она представима рядом Лорана [3]

$$f(t)=\sum_{-\infty}^{+\infty}b_\nu^{(k)}(t-a_k)^\nu. \tag{4}$$

Следовательно, в этой окрестности имеет место равенство

$$f(t)(t-a_k)^{m_n^{(k)}}=\sum_{-\infty}^{+\infty}b_\nu^{(k)}(t-a_k)^{\nu+m_n^{(k)}}. \tag{5}$$

Функция $\varphi_{n,k}(t)$ аналитическая на окружности Γ_k и внутри ее, за исключением точки a_k, которая является правильной точкой функции, значит, в $\rho_k=\min\big\{\big|a_k-z_j^{(k)}\big|,\,|a_k-z|\big\}$-окрестности точки a_k она разлагается в сходящийся ряд Тейлора

$$\varphi_{n,k}(t)=\sum_{l=0}^{\infty}c_l^{(k)}(z)(t-a_k)^l. \tag{6}$$

Рассматриваемый интеграл $I_n^{(k)}$ равен коэффициенту при минус первой степени разложения подынтегральной функции в ряд по степеням $(t-a_k)$, взятому со знаком минус [3]. Из равенств (5), (6) находим, что этот коэффициент равен $\sum\limits_{\nu=m_n^{(k)}+1}^{\infty} b_{-\nu}^{(k)} c_{\nu-m_n^{(k)}-1}^{(k)}(z)$. Таким образом,

$$I_n^{(k)} = -\sum_{\nu=m_n^{(k)}+1}^{\infty} b_{-\nu}^{(k)} c_{\nu-m_n^{(k)}-1}^{(k)}(z), \quad k = 1, 2, \ldots, p. \tag{7}$$

Поскольку функция $f(t)$ аналитическая на окружности Γ_{p+1} и вне круга $|t| \le d$, за исключением, быть может, точки $t = \infty$, то в окрестности бесконечно удаленной точки она разлагается в ряд Лорана $\sum\limits_{-\infty}^{+\infty} b_\nu^{(p+1)} t^\nu$. В этой окрестности имеет место равенство

$$f(t) \cdot t^{-(m_n^{(p+1)}+2)} = \sum_{-\infty}^{+\infty} b_\nu^{(p+1)} t^{\nu-(m_n^{(p+1)}+2)}. \tag{8}$$

Бесконечно удаленная точка является правильной для функции $\varphi_{n,p+1}(t)$, следовательно, в окрестности такой точки ее разложение имеет вид

$$\varphi_{n,p+1}(t) = \sum_{l=0}^{\infty} c_{-l}^{(p+1)}(z) t^{-l}. \tag{9}$$

Последний ряд сходится при $|t| > \rho_{p+1} = \max\bigl\{\bigl|z_j^{(n)}\bigr|, |z|\bigr\}$, $j = 1, 2, \ldots, n$.

Из равенств (8), (9) найдем, что коэффициент при минус первой степени разложения подынтегральной функции в ряд Лорана в окрестности бесконечно удаленной точки равен $\sum\limits_{\nu=m_n^{(p+1)}+1}^{\infty} b_\nu^{(p+1)} c_{-(\nu-m_n^{(p+1)}-1)}^{(p+1)}(z)$. Следовательно,

$$I_n^{(p+1)} = \sum_{\nu=m_n^{(p+1)}+1}^{\infty} b_\nu^{(p+1)} c_{-(\nu-m_n^{(p+1)}-1)}^{(p+1)}(z). \tag{10}$$

Из последнего равенства и (7) получаем утверждение леммы.

Положим

$$\lim_{t\to a_s} \varphi_{n,s}(t) = \varphi_{n,s}(a_s), \quad s = 1, 2, \ldots, p+1.$$

Лемма 2. *Для интегралов $I_n^{(s)}$ в остаточном члене* (2) *интерполяционного процесса имеют место равенства*

$$I_n^{(k)} = \varphi_{n,k}(a_k) O\bigl(b_{-m_n^{(k)}-1}^{(k)}\bigr), \ k = 1, 2, \ldots, p, \quad I_n^{(p+1)} = O\bigl(b_{m_n^{(p+1)}+1}^{(p+1)}\bigr). \tag{11}$$

Доказательство. Так как ряд (6) сходится в круге $|t - a_k| < \rho_k$, то

$$\varlimsup_{l\to\infty} \sqrt[l]{\bigl|c_1^{(k)}(z)\bigr|} = \frac{1}{\rho_k}.$$

Поскольку ряд (4) сходится в некоторой проколотой окрестности точки a_k, то для коэффициентов главной части ряда справедливо равенство

$$\varlimsup_{\nu\to\infty} \sqrt[\nu]{|b_{-\nu}|} = 0.$$

Заметим, что при любом $m_n^{(k)}$ имеет место равенство

$$\overline{\lim_{\nu\to\infty}}\bigl|c^{(k)}_{\nu-m_n^{(k)}-1}(z)\bigr|^{1/\nu} = \overline{\lim_{\nu\to\infty}}\Bigl[\bigl|c^{(k)}_{\nu-m_n^{(k)}-1}(z)\bigr|^{\frac{1}{\nu-m_n^{(k)}-1}}\Bigr]^{1-\frac{m_n^{(k)}+1}{\nu}} = \frac{1}{\rho_k},$$

следовательно,

$$\overline{\lim_{\nu\to\infty}}\bigl|c^{(k)}_{\nu-m_n^{(k)}-1}(z)b_{-\nu}\bigr|^{1/\nu} = \overline{\lim_{\nu\to\infty}}\bigl|c^{(k)}_{\nu-m_n^{(k)}-1}(z)\bigr|^{1/\nu}\cdot\lim_{\nu\to\infty}|b_{-\nu}|^{1/\nu} = 0.$$

Из последнего равенства заключаем, что при достаточно больших $m_n^{(k)}$ члены ряда (7) по абсолютной величине убывают быстрее, чем в геометрической прогрессии. Максимальным членом ряда является первый. Таким образом, приходим к выводу, что справедливо равенство

$$I_n^{(k)} = c_0^{(k)}(z)O\bigl(b^{(k)}_{-m_n^{(k)}-1}\bigr) = \varphi_{n,k}(a_k)O\bigl(b^{(k)}_{-m_n^{(k)}-1}\bigr).$$

Рассуждая аналогично и принимая во внимание, что $\varphi_{n,p+1}(\infty)=1$, из (10) получим второе равенство в (11).

С помощью лемм 1 и 2 остаточный член интерполяционного процесса (2) можно записать в виде

$$\begin{aligned} r_{n-1}(z) &= \omega_{n,p+1}(z)O\bigl(b^{(p+1)}_{m_n^{(p+1)}+1}\bigr) - \sum_{k=1}^{p}\omega_{n,k}(z)O\bigl(b^{(k)}_{-m_n^{(k)}-1}\bigr) \\ &= \Phi_{n,(p+1)}(z) - \sum_{k=1}^{p}\Phi_{n,k}(z), \qquad (12)\end{aligned}$$

где $\omega_{n,s}(z) = \omega_n(z)\varphi_{n,s}(a_s)$, $s=1,2,\dots,p+1$.

Лемма 3. *При любом фиксированном $r>1$ величины $|\omega_{n,s}(z)|^{1/n}$, $z\in\overline{D}$, ограничены.*

Доказательство. Пусть $s\ne p+1$, тогда при $1\le\alpha\le p$ получим

$$|\omega_{n,\alpha}(z)|^{1/n} = \left|\frac{\prod_{j=1}^{n}\bigl(z-z_j^{(n)}\bigr)\prod_{k=1,\,k\ne\alpha}^{p}(a_\alpha-a_k)^{m_n^{(k)}}}{\prod_{k=1}^{p}(z-a_k)^{m_n^{(k)}}\prod_{j=1}^{n}\bigl(a_\alpha-z_j^{(n)}\bigr)(a_\alpha-z)}\right|^{1/n}$$

$$\le \frac{\max_j\bigl|z-z_j^{(n)}\bigr|\bigl\{\max_{k\ne\alpha}|a_\alpha-a_k|\bigr\}^{\frac{m_n-m_n^{(\alpha)}}{n}}}{\bigl\{\min_{1\le k\le p}|z-a_k|\bigr\}^{m_n/n}\min_j\bigl|a_\alpha-z_j^{(n)}\bigr|\,|a_\alpha-z|^{1/n}} \le \frac{2r(2r)^{m_n/n}}{(1/r)^{m_n/n}(1/r)^{1/n+1}} < 4r^4.$$

Аналогично при $s=p+1$

$$|\omega_{n,p+1}(z)|^{1/n} = |\omega_n(z)|^{1/n} \le \frac{2r}{(1/r)^{m_n/n}} < 2r^2.$$

Лемма 4. *Пусть*

$$\underline{\lim_{n\to\infty}}\frac{m_n^{(\tau)}}{n} = 0, \quad 1\le\tau\le p+1.$$

Каково бы ни было число $q>1$, существуют по крайней мере одна точка a_α, $\tau\ne\alpha$, и последовательность натуральных чисел $\{n_\alpha\}$ такие, что в некоторой ρ-окрестности точки a_α имеет место неравенство

$$|\omega_{n_\alpha,\tau}(z)|^{1/n_\alpha} \ge q. \qquad (13)$$

Доказательство. Поскольку $\varliminf\limits_{n\to\infty} \frac{m_n^{(\tau)}}{n} = 0$, существует последовательность натуральных чисел $\{n_\tau\}$ такая, что $\lim\limits_{n_\tau\to\infty} m_{n_\tau}^{(\tau)}(n_\tau)^{-1} = 0$. Так как $\sum\limits_{s=1}^{p+1} m_n^{(s)} = n-1$, существуют по крайней мере одно значение $s=\alpha$ и такая подпоследовательность $\{n_\alpha\}$ последовательности $\{n_\tau\}$, что $m_{n_\alpha}^{(\alpha)}(n_\alpha)^{-1} > \frac{1}{p+1}$.

Пусть сначала $\tau \neq p+1$. Полагая, что $\alpha \neq p+1$ в некоторой окрестности точки a_α, будем иметь

$$|\omega_{n_\alpha,\tau}(z)| = |z-a_\alpha|^{-m_{n_\alpha}^{(\alpha)}} \left| \frac{\prod\limits_{j=1}^{n_\alpha}\bigl(z-z_j^{(n_\alpha)}\bigr) \prod\limits_{k=1,\,k\neq\tau}^{p} (a_\tau-a_k)^{m_{n_\alpha}^{(k)}}}{\prod\limits_{j=1}^{n_\alpha}\bigl(a_\tau-z_j^{(n_\alpha)}\bigr) \prod\limits_{k=1,\,k\neq\alpha}^{p} (z-a_k)^{m_{n_\alpha}^{(k)}}(a_\tau-z)} \right|,$$

откуда аналогично лемме 3 находим

$$|\omega_{n_\alpha,\tau}(z)|^{1/n_\alpha} \geq \frac{B_1}{|z-a_\alpha|^{\frac{1}{p+1}}},$$

где $B_1>0$ не зависит от n_α. В силу того, что $|z-a_\alpha|$ может быть выбран какой угодно малой величиной, заключаем, что неравенство (13) имеет место.

Если же $\alpha = p+1$, то в окрестности бесконечно удаленной точки будем иметь

$$|\omega_{n_{p+1},\tau}(z)|^{1/n_{p+1}} = |\omega_{n_{p+1}}(z)|^{1/n_{p+1}} \geq |z|^{\frac{m_{n_{p+1}}^{(p+1)}+1}{n_{p+1}}} \left(\frac{1-Q_1}{1+Q_2}\right) \geq |z|^{\frac{1}{p+1}} \cdot B_2,$$

где $0<Q_1<1$, $0<Q_2<1$, B_2 не зависит от n_{p+1}. Отсюда следует, что при достаточно больших $|z|$ будет выполняться неравенство (13).

Пусть теперь $\tau = p+1$. В таком случае $\alpha\neq p+1$ и в окрестности точки a_α получаем

$$|\omega_{n_\alpha,p+1}(z)|^{1/n_\alpha} = |\omega_{n_\alpha}(z)|^{1/n_\alpha} \geq |z-a_\alpha|^{-\frac{m_{n_\alpha}^{(\alpha)}}{n_\alpha}} \left| \frac{\prod\limits_{j=1}^{n_\alpha}\bigl(z-z_j^{(n_\alpha)}\bigr)}{\prod\limits_{k=1,\,k\neq\alpha}^{p} (z-a_k)^{m_{n_\alpha}^{(k)}}} \right|^{1/n_\alpha} \geq \frac{B_3}{|z-a_\alpha|^{\frac{1}{p+1}}},$$

где B_3 не зависит от n_α. В силу того, что $|z-a_\alpha|$ может быть как угодно малым, убеждаемся в справедливости (13).

Лемма 5. *Для того чтобы последовательность* (1), *построенная для любой функции $f(z)\in A(a_1,a_2,\dots,a_{p+1})$ по матрице узлов $\bigl\{z_j^{(n)}\bigr\}$, отделенных от точек a_s, $s=1,2,\dots,p+1$, равномерно сходилась в некоторой замкнутой области $\overline{G}$, не содержащей точек a_s, к функции $f(z)$, необходимо и достаточно, чтобы в равенстве* (12) *при $z\in\overline{G}$, $n\to\infty$ для всех s имела место сходимость $\Phi_{n,s}(z)\to 0$.*

Доказательство. Необходимость. Возьмем такую функцию $\psi(z) \in A(a_1,a_2,\dots,a_{p+1})$, которая имеет единственную особую точку a_τ, $1\leq\tau\leq p+1$. В этом случае $r_{n-1}(z) = \Phi_{n,\tau}(z)$, где $b_{m_n(\tau)}^{(\tau)}$ — соответствующие коэффициенты ряда Лорана функции $\psi(z)$. Отсюда ясно, что правая и левая части одновременно стремятся или не стремятся к нулю в области $\overline{G}$ при $n\to\infty$. В частности, если интерполяционный процесс сходится, то $\Phi_{n,\tau}(z) \to 0$. Пусть теперь $f(z)$ — произвольная функция класса $A(a_1, a_2, \dots, a_{p+1})$ и последовательность (1), построенная для этой функции, равномерно сходится в $\overline{G}$ к функции $f(z)$, но для одного или нескольких τ, $1 \le \tau \le p+1$, $\Phi_{n,\tau}(z)$ не стремятся к нулю при $z \in G$, $n \to \infty$. Если τ одно, то все слагаемые в правой части (12), кроме $\Phi_{n,\tau}(z)$, стремятся к нулю, следовательно, $r_{n-1}(z) = \varepsilon_n(z) + \Phi_{n,\tau}(z)$, где $\varepsilon_n(z)$ бесконечно малая при $n \to \infty$, $z \in G$. Так как $r_{n-1}(z)$ стремится к нулю при $n \to \infty$, $z \in G$, то и $\Phi_{n,\tau}(z) \to 0$, $z \in G$, при $n \to \infty$, что противоречит предположению. В этом случае необходимость доказана.

Если же таких τ несколько, то, выбрав $\psi(z)$ так, чтобы главные части лорановских разложений в окрестности точки a_τ функций $f(z)$ и $\psi(z)$ совпадали, получим, что при одних и тех же узлах интерполяции $\{z_j^{(n)}\}$ и при одинаковых кратностях полюсов дробей (1) в точках a_s значения $\Phi_{n,\tau}(z)$ для функций $f(z)$ и $\psi(z)$ равны. Поскольку по предположению для любой функции из $A(a_1, a_2, \dots, a_{p+1})$ величина $r_{n-1}(z)$ стремится к нулю в области $\overline{G}$, то $\Phi_{n,\tau}(z)$ для функции $\psi(z)$ стремится к нулю, значит, и $\Phi_{n,\tau}(z)$ для функции $f(z)$ стремится к нулю. Снова получили противоречие с предположением, что и доказывает необходимость.

Доказательство достаточности очевидно.

Теорема 1. *Для того чтобы последовательность интерполяционных дробей* (1), *построенная для любой функции $f(z) \in A(a_1, a_2, \dots, a_{p+1})$ по матрице узлов $\{z_j^{(n)}\}$, отделенных от точек a_s, $s = 1, 2, \dots, p+1$, равномерно сходилась на любом компакте, не содержащем точек a_k, $k = 1, 2, \dots, p$, к функции $f(z)$, необходимо и достаточно, чтобы $\varliminf_{n\to\infty} \frac{m_n^{(s)}}{n} = \gamma_s > 0$ для всех s.*

Доказательство. Заметим сначала, что интерполяционный процесс сходится тогда и только тогда, когда каждое из слагаемых в правой части (12) стремится к нулю при $n \to \infty$ (лемма 5).

Теорему достаточно доказать для области $\overline{D}$.

Необходимость. Пусть последовательность (1), построенная для любой функции $f(z) \in A(a_1, a_2, \dots, a_{p+1})$ по матрице узлов $\{z_j^{(n)}\}$, равномерно сходится к $f(z)$ в области $\overline{D}$, где $r > 1$ произвольно и удовлетворяет условиям построения области $\overline{D}$, но при этом существует одно или несколько τ, $1 \le \tau \le p+1$, таких, что $\gamma_\tau = 0$. Возьмем последовательность $\{n_\tau\}$, по которой выполняется

$$\lim_{n_\tau\to\infty} m_{n_\tau}^{(\tau)}(n_\tau)^{-1} = \lim_{n_\tau\to\infty} \gamma_{n_\tau}^{(\tau)} = 0.$$

На основании леммы 4 для любого $q > 1$ найдутся по крайней мере одна точка a_α, $1 \le \alpha \le p+1$, $\alpha \ne \tau$, и подпоследовательность $\{n_\tau\}$ такие, что в некоторой ρ-окрестности точки a_α выполняется неравенство (13). Далее будем считать, что $1/r < \rho$. При таком выборе r в область $\overline{D}$ попадают точки z, для которых выполняется неравенство $1/r \le |a_\alpha - z| < \rho$, значит, имеет место (13).

Возьмем число q_1, $1 < q_1 < q$. Рассмотрим подкласс функций класса $A(a_1, a_2, \dots, a_{p+1})$, коэффициенты главной части лорановских разложений которых в окрестности точки a_τ по подпоследовательности $\{n_\alpha\}$ удовлетворяют неравенству

$$\bigl|b_{-m_{n_\alpha}-1}^{(\tau)}\bigr| \ge q_1^{-n_\alpha}, \text{ если } \tau \ne p+1, \quad \text{и} \quad \bigl|b_{m_{n_\alpha}+1}^{(p+1)}\bigr| \ge q_1^{-n_\alpha}, \text{ если } \tau = p+1.$$

Такие функции в классе $A(a_1, a_2, \dots, a_{p+1})$ существуют, так как

$$q_1^{-\frac{n_\alpha}{m_{n_\alpha}^{(\tau)}+1}} = q_1^{-\frac{1}{\gamma_{n_\alpha}^{(\tau)}+\frac{1}{n_\alpha}}} \to 0 \quad \text{при } n \to \infty.$$

Если функция $f(z)$ принадлежит этому подклассу, то в кольце $1/r \le |a_\alpha - z| < \rho$ для слагаемого с индексом τ, $1 \le \tau \le p+1$, в равенстве (12) по подпоследовательности $\{n_\alpha\}$ будем иметь

$$|\Phi_{n_\alpha,\tau}(z)|^{1/n_\alpha} \ge \frac{q}{q_1} > 1.$$

Таким образом, слагаемое, для которого $\gamma_\tau = 0$, в равенстве (12) по подпоследовательности $\{n_\alpha\}$ не стремится к нулю, следовательно, интерполяционный процесс, построенный для функции $f(z)$, расходится в кольце $1/r \le |a_\alpha - z| < \rho$, принадлежащем области $\overline{D}$.

Итак, последний вывод противоречит нашему предположению о сходимости последовательности (1) в области $\overline{D}$ для любой функции $f(z) \in A(a_1, a_2, \dots, a_{p+1})$, значит, наше предположение неверно. Необходимость доказана.

Достаточность. Пусть

$$\lim_{n\to\infty} \frac{m_n^{(s)}}{n} = \lim_{n\to\infty} \gamma_n^{(s)} = \gamma_s > 0, \quad s = 1, 2, \dots, p+1.$$

Покажем, что при любом фиксированном $r > 1$, удовлетворяющем условиям построения области $\overline{D}$, последовательность (1) равномерно сходится в $\overline{D}$ к интерполируемой функции $f(z) \in A(a_1, a_2, \dots, a_{p+1})$.

Действительно, величины $|\omega_{n,s}(z)|^{1/n}$, $z \in \overline{D}$, равномерно по n ограничены (лемма 3). Поскольку $\lim\limits_{\nu\to\infty} \sqrt[\nu]{|b_{-\nu}|} = 0$, $\nu = 1, 2, \dots, k$, то

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \bigl|b^{(k)}_{-m_n^{(k)}-1}\bigr|^{1/n} &= \lim_{n\to\infty} \Bigl[\bigl|b^{(k)}_{-m_n^{(k)}-1}\bigr|^{1/(m_n+1)}\Bigr]^{(m_n+1)/n} \\ &= \lim_{n\to\infty} \Bigl[\bigl|b^{(k)}_{-m_n^{(k)}-1}\bigr|^{1/(m_n+1)}\Bigr]^{\gamma_n^{(s)}+1/n} = 0, \quad k = 1, 2, \dots, p.\end{aligned}$$

Точно так же убедимся в справедливости равенства

$$\lim_{n\to\infty} \bigl|b^{(p+1)}_{m_n^{(p+1)}+1}\bigr|^{1/n} = 0.$$

Так как $|\omega_{n,s}(z)|^{1/n}$, $s = 1, 2, \dots, p+1$, равномерно по n ограничены в $\overline{D}$, а $\lim\limits_{n\to\infty} \bigl|b_\eta^{(s)}\bigr|^{1/n} = 0$ при $\gamma_s > 0$, то $\bigl|\omega_{n,s}(z) b_\eta^{(s)}\bigr|^{1/n} = |\Phi_{n,s}(z)|^{1/n}$ являются бесконечно малыми при $n \to \infty$. Таким образом, каждое слагаемое в правой части равенства (12) стремится к нулю при $n \to \infty$. Значит, $\lim\limits_{n\to\infty} r_{n-1}(z) = 0$, $z \in \overline{D}$. Теорема доказана.

Замечание 1. Как мы уже отметили, при выполнении условий теоремы величины $|\Phi_{n,s}(z)|^{1/n}$, $z \in \overline{D}$, $s = 1, 2, \dots, p+1$, являются бесконечно малыми при $n \to \infty$, следовательно, каково бы ни было число $\varepsilon > 0$, при всех достаточно больших n будет выполняться неравенство

$$|f(z) - R_{n-1}(z)| < \varepsilon^n, \quad z \in \overline{D}.$$

Из доказанной теоремы ясно, что если при заданных узлах интерполяции есть возможность распорядиться кратностями полюсов дробей (1) в особых точках функции, то для сходимости интерполяционного процесса, построенного для любой функции класса $A(a_1, a_2, \dots, a_{p+1})$, нужно это сделать так, чтобы выполнялись неравенства $\gamma_s > 0$, $s = 1, 2, \dots, p+1$. Если же такой возможности не представляется, то все же можно выделить подкласс функций класса $A(a_1, a_2, \dots, a_{p+1})$ таких, что на любом компакте, не содержащем точек a_k, $k = 1, 2, \dots, p$, будет обеспечена сходимость последовательности (1) к интерполируемой функции при условии $\lim\limits_{n\to\infty} \gamma_n^{(\tau)} = 0$, $1 \le \tau \le p+1$. В частности, имеет место

Теорема 2. *Пусть для одного или нескольких* τ, $1 \le \tau \le p+1$, *имеем* $\lim\limits_{n\to\infty} \gamma_n^{(\tau)} = 0$. *Для того чтобы последовательность интерполяционных дробей* (1), *построенных для функций класса* $A(a_1, a_2, \dots, a_{p+1})$ *по матрице узлов* $\{z_j^{(n)}\}$, *отделенных от точек* a_s, $s = 1, 2, \dots, p+1$, *равномерно сходилась на любом компакте, не содержащем точек* a_k, $k = 1, 2, \dots, p$, *к интерполируемой функции, необходимо и достаточно, чтобы для всех* τ *имели место равенства* $\lim\limits_{n\to\infty} \big|b_\eta^{(\tau)}\big|^{1/n} = 0$, *где* $\eta = -m_n^{(\tau)} - 1$, *если* $1 \le \tau \le p$, *и* $\eta = m_n^{(p+1)} + 1$, *если* $\tau = p+1$, $m_n^{(\tau)} \to \infty$.

Доказательство. Необходимость. Предположим, что последовательность (1), построенная для функции $f(z) \in A(a_1, a_2, \dots, a_{p+1})$ по узлам $\{z_j^{(n)}\}$, равномерно сходится на любом компакте, не содержащем точек a_k, но для некоторого τ, $1 \le \tau \le p+1$, будет $\varlimsup\limits_{n\to\infty} \big|b_\eta^{(\tau)}\big|^{1/n} = \bar{\gamma}_\tau > 0$. В таком случае существует последовательность $\{n_\tau\}$ такая, что $\lim\limits_{n_\tau\to\infty} \big|b_\eta^{(\tau)}\big|^{1/n_\tau} = \bar{\gamma}_\tau$.

Поскольку $\lim\limits_{n\to\infty} \gamma_n^{(\tau)} = 0$, имеем $\lim\limits_{n_\tau\to\infty} \gamma_{n_\tau}^{(\tau)} = 0$. Следовательно, по лемме 4 для $q > \frac{1}{\bar{\gamma}_\tau}$ найдутся по крайней мере одна точка a_α, $\tau \ne \alpha$, и подпоследовательность $\{n_\alpha\}$ последовательности $\{n_\tau\}$ такие, что в некоторой ρ-окрестности точки a_α выполнено неравенство

$$|\omega_{n_\alpha,\tau}(z)|^{1/n_\alpha} > \frac{1}{\bar{\gamma}_\tau}.$$

Теорему достаточно доказать для области $\overline{D}$, где можно считать $1/r < \rho$. Тогда в кольце $1/r \le |a_\alpha - z| < \rho$, принадлежащем области $\overline{D}$, для слагаемых с индексом τ в равенстве (12), для которых $\bar{\gamma}_\tau > 0$, справедливо неравенство

$$|\Phi_{n_\alpha,\tau}(z)|^{1/n_\alpha} > \frac{\bar{\gamma}_\tau}{\bar{\gamma}_\tau} = 1.$$

Таким образом, мы получили, что $r_{n-1}(z)$ на некотором множестве из области $\overline{D}$ не стремится к нулю при $n \to \infty$, что противоречит нашему предположению, значит, предположение неверно. Необходимость доказана.

Достаточность. Для тех слагаемых в равенстве (12), для которых $\gamma_s > 0$, в теореме 1 доказано, что $|\Phi_{n,s}(z)|^{1/n} \to 0$, $z \in \overline{D}$, при $n \to \infty$. Если же $s = \tau$, то по-прежнему $|\omega_{n,\tau}(z)|^{1/n}$ равномерно по n ограничены в $\overline{D}$, а $\lim\limits_{n\to\infty} \big|b_\eta^{(\tau)}\big|^{1/n} = 0$ по условию теоремы. Следовательно, $|\Phi_{n,s}(z)|^{1/n}$ также стремится к нулю в области $\overline{D}$ при $n \to \infty$. Значит, все слагаемые в (12) стремятся к нулю при $n \to \infty$ и $z \in \overline{D}$. Теорема доказана.

При условиях теоремы 2 замечание 1 остается в силе.

Из теоремы 2 ясно, что класс сходимости интерполяционного процесса зависит от γ_s и в случае, когда $\gamma_\tau = 0$ хотя бы для одного $s = \tau$, он у́же, чем класс функций $A(a_1, a_2, \dots, a_{p+1})$, и, следовательно, условие $m_n^{(k)} \to \infty$ не может обеспечить сходимость интерполяционного процесса для любой функции класса $A(a_1, a_2, \dots, a_{p+1})$, в том числе и при специальных узлах интерполяции.

Пример. Рассмотрим функцию $f_1(z) = \sum\limits_{l=1}^{\infty} c_l z^{-1}$. Будем интерполировать ее с помощью рациональных дробей

$$R_{n-1}(z) = P_{n-1}(z) z^{-m_n}, \quad m_n \le n-1, \tag{14}$$

в корнях степени n из единицы. Положим

$$c_{m_n+1} = \left(\frac{m_n+1}{n}\right)^{m_n+1}, \quad \lim_{n\to\infty} \frac{m_n}{n} = 0,$$

m_n — неубывающая последовательность, $m_n \to \infty$. В данном случае $\overline{D}$ — кольцо $1/r \le |z| < r$, $r > 1$. Воспользуемся обозначениями и терминами из [2, гл. I, § 4]. Тогда $\overline{D} = \overline{B}$ — множество типа B^2 с дополнительными областями $B^1 : |z| < 1/r$ и $B^2 : |z| > r$.

Далее, $\omega_{1,n}(z) = -\frac{z^n-1}{z^{m_n+1}}$, $\omega_{2,n}(z) = \frac{z^n-1}{z^{m_n}}$,

$$|\theta_{1,n}(z)| = \sqrt[m_n+1]{|\omega_{1,n}(z)|} \cdot |c_1\varphi_1(z)|^{-1} = \sqrt[m_n+1]{\left|\frac{z^n-1}{z^{m_n+1}}\right|} \cdot |z| = \sqrt[m_n+1]{|z^n-1|},$$

$$|\theta_{2,n}(z)| = \sqrt[n-m_n]{|\omega_{2,n}(z)|} \cdot |c_2\varphi_2(z)|^{-1} = \frac{1}{|z|} \sqrt[n-m_n]{\left|\frac{z^n-1}{z^{m_n}}\right|} = \sqrt[n-m_n]{\left|1 - \frac{1}{z^n}\right|}.$$

Отсюда находим

$$\lim_{m_n\to\infty} |\theta_{1,n}(z)| \rightrightarrows 1, \ z \in B^1, \quad \lim_{n\to\infty} |\theta_{2,n}(z)| \rightrightarrows 1, \ z \in B^2.$$

Таким образом, для множества $\overline{B}$ все условия теоремы 1 из [2, § 4, п. 2°] выполнены, и последовательность (14) должна сходиться к $f_1(z)$ равномерно на множестве $\overline{B}$ при любом $r > 1$. Однако это не так.

Заметим, что все коэффициенты главной части ряда Лорана функции $f_1(z)$ в окрестности бесконечно удаленной точки равны нулю, следовательно, на основании леммы 2 $I_n^2 = 0$. Значит,

$$|r_{n-1}(z)| = \left|\omega_{1,n}(z) O\big(b^{(1)}_{-m_n-1}\big)\right| = \left|\omega_{1,n}(z) O\left(\left(\frac{m_n+1}{n}\right)^{m_n+1}\right)\right|.$$

Поскольку $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{m_n}{n} = 0$, при $|z| > 1$ получаем

$$\lim_{n\to\infty} |r_{n-1}(z)|^{1/n} = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{z^n-1}{z^{m_n+1}}\right|^{1/n} \cdot \left|O\left(\left(\frac{m_n+1}{n}\right)^{m_n+1}\right)\right|^{1/n}$$
$$= |z| \lim_{n\to\infty} \left(\frac{m_n+1}{n}\right)^{\frac{m_n+1}{n}} = |z| > 1.$$

Отсюда следует, что последовательность (14) расходится при $|z| > 1$. Из приведенного примера заключаем, что условие $\lim\limits_{n\to\infty} m^{(n)} = \infty$, указанное в теореме 1 из [2, § 4, п. 2°], не обеспечивает сходимости интерполяционного процесса на множестве $\overline{B}$ при выполненных условиях (4) или (5) этой теоремы.

Теорема 3. *Для того чтобы последовательность* (1), *построенная для любой функции из класса* $A(a_1, a_2, \dots, a_{p+1})$ *по матрице узлов* $\{z_j^{(n)}\}$, *отделенных от точек* a_s, $s = 1, 2, \dots, p+1$, *равномерно сходилась к интерполируемой функции в некоторой замкнутой области* $\overline{G}$, *не содержащей точек* a_s, *необходимо выполнение неравенства* $\varlimsup\limits_{n\to\infty} |\Phi_{n,s}(z)|^{1/n} \le 1$, *и достаточно, чтобы* $\varlimsup\limits_{n\to\infty} |\Phi_{n,s}(z)|^{1/n} < 1$ *для всех* s *в области* $\overline{G}$, $\lim\limits_{n\to\infty} m_n^{(s)} = \infty$.

Доказательство очевидно на основании леммы 5. Подчиняя область $\overline{G}$ и интерполируемые функции класса $A(a_1, a_2, \dots, a_{p+1})$ различным требованиям, из теоремы 3 можно получать различные следствия, в том числе

Следствие 1. *Пусть* $\lim\limits_{n\to\infty} \gamma_n^{(\tau)} = 0$ *для одного или нескольких* τ, $1 \le \tau \le p+1$. *Для того чтобы последовательность интерполяционных дробей* (1), *построенных для функций класса* $A(a_1, a_2, \dots, a_{p+1})$ *по матрице узлов* $\{z_j^{(n)}\}$, *отделенных от точек* a_s, $s = 1, 2, \dots, p+1$, *равномерно сходилась в замкнутой области* $\overline{G}$, *не содержащей точек* a_s, *к интерполируемой функции, необходимо выполнение неравенства*

$$\varlimsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{M_{n,\tau}} \le \lim_{n\to\infty} \left|b_\eta^{(\tau)}\right|^{-1/n}$$

и достаточно, чтобы

$$\varlimsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{M_{n,\tau}} < \lim_{n\to\infty} \left|b_\eta^{(\tau)}\right|^{-1/n}$$

при всех τ, *где* $M_{n,\tau} = \max\limits_{\overline{G}} |\omega_{n,\tau}(z)|$, $\eta = -m_n^{(\tau)} - 1$, *если* $1 \le \rho \le p$, *и* $\eta = m_n^{(\tau)} + 1$, *если* $\tau = p+1$, $n \to \infty$.

Доказательство. Для тех s, для которых $\lim\limits_{n\to\infty} \gamma_n^{(\tau)} > 0$, в доказательстве теоремы 1 показано, что соотношение $|\Phi_{n,s}(z)|^{1/n} \to 0$ выполняется на любом компакте, не содержащем точек a_s, $s = 1, 2, \dots, p+1$, $s \ne \tau$, и для любой функции класса $A(a_1, a_2, \dots, a_{p+1})$.

Необходимость и достаточность условий для τ таких, что $\lim\limits_{n\to\infty} \gamma_n^{(\tau)} = 0$, непосредственно вытекают из равенства (12) и теоремы 3.

Замечание 2. Как следует из приведенного выше примера, равенство $\lim\limits_{n\to\infty} m_n^{(s)} = \infty$, вообще говоря, не обеспечивает интерполяционного процесса. Однако если рассматривать функции из класса $A(a_1, a_2, \dots, a_{p+1})$, которые в одной или нескольких точках a_h, $1 \le h \le p+1$, имеют полюсы порядка не выше $m^{(h)}$, то для сходимости процесса можно не требовать неограниченного возрастания $m_n^{(h)}$; достаточно, чтобы при всех n начиная с некоторого N выполнялись неравенства $m_n^{(h)} \ge m^{(h)}$. В этом случае все коэффициенты $b_{m_n^{(h)}}^{(h)}$, где $m_n^{(h)} \ge m^{(h)}$, будут равны нулю и, следовательно, $\Phi_{n,h}(z) = 0$ при любом z, отличном от точек a_s, $s = 1, 2, \dots, p+1$.

Следствие 2. *Пусть* $\gamma_{\tau_\theta} = 0$ *для одного или нескольких* τ_θ, $\theta = 1, 2, \dots, \beta$, $1 \le \beta \le p+1$. *Если*

$$\varlimsup_{n\to\infty} |\Phi_{n,\tau_\theta}(z)|^{1/n} < 1, \quad z \in \overline{G}_\theta,\ \theta = 1, 2, \dots, \beta,$$

то последовательность интерполяционных дробей (1), *построенных для функции* $f(z) \in A(a_1, a_2, \dots, a_{p+1})$ *по матрице узлов* $\{z_j^{(n)}\}$, *отделенных от точек* a_s,

$s = 1, 2, \ldots, p+1$, *равномерно сходится на любом компакте, содержащемся в области* $\overline{G} = \bigcap\limits_{\theta=1}^{\beta} \overline{G}_\theta$, *не включающем точек* a_s.

Доказательство аналогично доказательству следствия 1.

Из доказанных теорем и следствий вытекает, что сходимость интерполяционного процесса с помощью дробей (1) в узлах, отделенных от особых точек функции, существенным образом зависит от распределения кратностей полюсов дробей (1) по особым точкам функции $f(z) \in A(a_1, a_2, \ldots, a_{p+1})$, свойств коэффициентов главных частей лорановских разложений интерполируемой функции в окрестностях точек a_s, $s = 1, 2, \ldots, p+1$, и матрицы узлов интерполяции.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Уолш Дж. Л.* Интерполяция и аппроксимация рациональными функциями в комплексной области. М.: Иностр. лит., 1961.

2. *Смирнов В. И., Лебедев Н. А.* Конструктивная теория функций комплексного переменного. М.; Л.: Наука, 1967.

3. *Маркушевич А. И.* Теория аналитических функций. М.: Наука, 1967. Т. 1.

Статья поступила 19 октября 2004 г.

Липчинский Александр Григорьевич
Ишимский гос. педагогический институт им. П. П. Ершова
ул. Ленина, 1, Ишим 627750 Тюменской обл.
igpi@ishim.ru